KONVERGENSI MODIFIKASI METODE NEWTON GANDA DENGAN MENGGUNAKAN KELENGKUNGAN KURVA

Yuslenita Muda[1], Wartono[2], Novi Maulana[3]
[1),2)] Laboratorium Matematika Terapan, Jurusan Matematika
[3)] Program Studi S1, Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Email: ilen_77@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Metode Newton Ganda adalah salah satu metode iterasi yang digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan nonlinier dengan konvergensi orde empat. Banyaknya iterasi yang digunakan oleh sebuah metode iterasi bergantung kepada orde konvergensinya. Semakin tinggi orde konvergensinya, semakin sedikit iterasi yang dilakukan. Oleh karena itu, pada kajian ini penulis memodifikasi metode Newton Ganda dengan menggunakan kelengkungan kurva untuk meningkatkan orde konvergensi. Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh bahwa modifikasi metode Newton Ganda dengan menggunakan kelengkungan kurva menghasilkan sebuah metode iterasi baru dengan konvergensi orde delapan.

Katakunci: Kelengkungan Kurva, Metode Newton Ganda, Orde Konvergensi.

ABSTRACT

The Double Newton's method is an iterative methods for solving nonlinear equations with fourth-order convergence. The number of iterations used by an iteration method depends on the order of convergence. The higher order of convergence, the fewer iterations are performed. The main aim of this paper is to modify the Double Newton's method by using curvature to increase the order of convergence. Based on this research, showed that the modification of Double Newton's method by using curvature produces a new iteretive method with eighth-order convergence.

Keywords: *Curvature, Double Newton's method, Order of convergence.*

PENDAHULUAN

Penentuan akar-akar persamaan merupakan salah satu persoalan yang terdapat dalam persamaan nonlinear. Untuk menentukan akar-akar persamaan suatu persamaan nonlinear yang cukup rumit digunakan metode iterasi sebagai pendekatan hasil numerik. Salah satu metode iterasi yang sering digunakan yaitu metode Newton dengan orde konvergensi berbentuk kuadratik. Oleh karena konvergensinya berorde dua, maka metode Newton cukup cepat menghampiri akar-akar persamaan nonlinier. Bentuk umum metode Newton adalah:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,... \quad (1)$$

Belakangan ini, beberapa peneliti telah melakukan berbagai macam pendekatan untuk meningkatkan orde konvergensi suatu metode iterasi. Salah satunya adalah Metode Newton Ganda yang memiliki orde konvergensi tingkat empat. Bentuk umum dari metode Newton Ganda (Traub, 1964) adalah

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} \quad (2)$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Selanjutnya, persamaan (2) dimodifikasi dengan melakukan beberapa pendekatan untuk meningkatkan orde konvergensi sehingga menghasilkan akar-akar untuk menghampiri nilai eksak dengan error yang kecil. Sanjay K. Khattri dan Ravi P. Agarwal (2010) telah memodifikasi metode Newton Ganda dengan Kuadratur yang menghasilkan orde konvergensi delapan. Selain itu, Sanjay K. Khattri dan Ioannis K. Argyros (2010) juga telah memodifikasi metode Newton Ganda dengan ekspansi Taylor yang menghasilkan orde konvergensi tujuh.

Selain teknik pendekatan kuadratur dan ekspansi Taylor, terdapat sebuah teknik yang juga dapat meningkatkan orde konvergensi suatu metode iterasi yang disebut kelengkungan kurva. Yong-Il Kim dan Changbun Chun (2010) telah memodifikasi metode Jarratt dengan menggunakan Kelengkungan Kurva yang menghasilkan orde konvergensi dua belas.

Oleh karena itu, pada makalah ini penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan memodifikasi metode Newton Ganda dengan menggunakan Kelengkungan Kurva untuk menghasilkan orde konvergensi yang tinggi.

BAHAN DAN METODE

Pandang persamaan metode Newton Ganda sebagai berikut:

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} \tag{3}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

dan kelengkungan kurva di $(x_n, f(x_n))$ adalah sebagai berikut:

$$\left(x - x_n + \frac{f(x_n)\left[1+f'(x_n)^2\right]}{f''(x_n)}\right)^2 + \left(y - f(x_n) + \frac{1+f'(x_n)^2}{f''(x_n)}\right)^2 = \frac{(1+f'(x_n)^2)^3}{f''(x_n)^2} \tag{4}$$

Sehingga untuk kelengkungan kurva yang berada pada $(z_n, f'(z_n))$ dapat dirumuskan kembali menjadi

$$\left(x - z_n + \frac{f'(z_n)\left[1+f'(z_n)^2\right]}{f''(z_n)}\right)^2 + \left(y - f'(z_n) + \frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)}\right)^2 = \frac{(1+f'(z_n)^2)^3}{f''(z_n)^2} \tag{5}$$

Persamaan (5) di atas selanjutnya diaproksimasi pada titik $(x_{n+1}, 0)$ terhadap sumbu x, sehingga diperoleh

$$\left(x_{n+1} - z_n + \frac{f'(z_n)\left[1+f'(z_n)^2\right]}{f''(z_n)}\right)^2 + \left(0 - f'(z_n) + \frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)}\right)^2 = \frac{(1+f'(z_n)^2)^3}{f''(z_n)^2} \tag{6}$$

Apabila manipulasi aljabar dilakukan terhadap persamaan (6) di atas, maka didapat

$$(x_{n+1} - z_n)^2 + 2\frac{f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}{f''(z_n)}(x_{n+1} - z_n) + f(z_n)^2 + 2f(z_n)\frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)} = 0 \tag{7}$$

Kemudian, persamaan (7) difaktorisasi terhadap $x_{n+1} - z_n$ sehingga persamaan (7) menjadi

$$(x_{n+1} - z_n)\left[(x_{n+1} - z_n) + 2\frac{f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}{f''(z_n)}\right] = -f(z_n)^2 + 2f(z_n)\frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)} \tag{8}$$

Selanjutnya, dengan melakukan manipulasi aljabar terhadap persamaan (8) didapat

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)^2 + 2f(z_n)\dfrac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)}}{\left[(x_{n+1} - z_n) + 2\dfrac{f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}{f''(z_n)}\right]}$$

Variabel x_{n+1} yang terletak disebelah kanan persamaan (8) di atas disubstitusikan dengan iterasi Newton yang menghasilkan

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)^2 + 2f(z_n)\dfrac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)}}{\left[\left(z_n - \dfrac{f(z_n)}{f'(z_n)} - z_n\right) + 2\dfrac{f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}{f''(z_n)}\right]}$$

$$= z_n - \frac{f'(z_n)f''(z_n)f(z_n)^2 + 2f(z_n)f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}{2f'(z_n)^2(1+f'(z_n)^2) - f(z_n)f''(z_n)} \quad (9)$$

Pada persamaan (9) dibutuhkan evaluasi turunan kedua. Untuk itu, turunan kedua pada persamaan (9) di atas diaproksimasikan pada

$$f''(z_n) \approx \frac{f'(w_n) - f'(z_n)}{w_n - z_n} \quad (10)$$

dengan

$$w_n = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad (11)$$

Sedemikian sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f'(z_n)f''(z_n)f(z_n)^2 + 2f(z_n)f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}{2f'(z_n)^2(1+f'(z_n)^2) - f(z_n)f''(z_n)}$$

$$= z_n - \frac{f'(z_n)\dfrac{(f'(w_n) - f'(z_n))}{w_n - z_n} f(z_n)^2 + 2f(z_n)f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}{2f'(z_n)^2(1+f'(z_n)^2) - f(z_n)\dfrac{(f'(w_n) - f'(z_n))}{w_n - z_n}} \quad (12)$$

Oleh karena $w_n = z_n - \dfrac{f(z_n)}{f'(z_n)}$, maka persamaan (12) menjadi

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f'(z_n)\dfrac{[f'(w_n) - f'(z_n)]}{z_n - \dfrac{f'(z_n)}{f(z_n)} - z_n} f(z_n)^2 + 2f(z_n)f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}{2f'(z_n)^2(1+f'(z_n)^2) - f(z_n)\dfrac{[f'(w_n) - f'(z_n)]}{z_n - \dfrac{f'(z_n)}{f(z_n)} - z_n}} \quad (13)$$

Selanjutnya, persamaan (13) dapat disederhanakan sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)\left[2 + 3f'(z_n)^2 - f'(z_n)f'(w_n)\right]}{f'(z_n) + 2f'(z_n)^3 + f'(w_n)} \quad (14)$$

Cara berbeda dapat diturunkan dengan memanipulasi persamaan (7). Variabel $(x_{n+1}-z_n)^2$ diganti dengan iterasi Newton yang menghasilkan

$$\left(\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}\right)^2+2\frac{f'(z_n)(1+f'(z_n)^2)}{f''(z_n)}\left(x_{n+1}-z_n\right)+f(z_n)^2+2f(z_n)\frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)}=0 \quad (15)$$

Kemudian, manipulasi aljabar dapat dilakukan pada persamaan (15) sehingga diperoleh

$$x_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)^2 f''(z_n)+2f(z_n)f'(z_n)^2}{2f'(z_n)^3} \quad (16)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan aproksimasi persamaan (10) terhadap persamaan (16) di atas, maka didapatkan

$$x_{n+1}=z_n-\frac{1}{2}\left(3-\frac{f'(w_n)}{f'(z_n)}\right)\frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad (17)$$

dengan $w_n=z_n-\dfrac{f(z_n)}{f'(z_n)}$, $z_n=y_n-\dfrac{f(y_n)}{f'(y_n)}$ dan $y_n=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Persamaan (17) di atas merupakan metode iterasi baru yang diperoleh dari modifikasi metode Newton Ganda menggunakan kelengkungan kurva. Aproksimasi nilai suatu fungsi f dengan menggunakan persamaan (17) untuk setiap iterasi dilakukan dengan enam evaluasi fungsi, yaitu tiga evaluasi fungsi f dan tiga f', dan terdiri dari empat tahap yaitu mencari y_n, z_n, w_n dan x_{n+1}.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas mengenai analisa konvergensi persamaan (17) di atas untuk mengetahui orde konvergensi dari persamaan (17) itu. Berikut ini teorema yang memberikan persamaan tingkat kesalahan dari persamaan (4.21) yang menunjukkan orde konvergensinya.

Teorema 3.1 Diberikan $f(x)$ adalah fungsi bernilai rill yang mempunyai turunan di $f: I \subseteq R \to R$, untuk I interval terbuka. Jika x_0 menghampiri α maka persamaan (17) di atas mempunyai orde konvergensi delapan dengan persamaan galat

$$e_{n+1}=-4{c_2}^7{e_n}^8+O({e_n}^9) \quad (18)$$

dengan $e_n=x_n-\alpha$ dan $C_k=\dfrac{1}{k!}\dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, k = 1, 2, 3, ...

Bukti: Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha)=0$. Asumsikan $f'(x)\neq 0$ dan $x_n=\alpha+e_n$, dan dengan menggunakan rumus ekspansi Taylor untuk mengaproksimasi fungsi f di sekitar x_n, diperoleh

$$\begin{aligned}f(x_n)&=f(\alpha+e_n)\\&=f(\alpha)+f'(\alpha)e_n+\frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^2+\frac{1}{3!}f'''(\alpha)e_n^3+O(e_n^4)\end{aligned} \quad (19)$$

Oleh karena $f(\alpha)$=0, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (19) diperoleh

$$\begin{aligned}f(x_n)&=f'(\alpha)\left(e_n+\frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)}+\frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha)e_n^3}{f'(\alpha)}+\frac{O(e_n^4)}{f'(\alpha)}\right)\\&=f'(\alpha)\left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O(e_n^4)\right)\end{aligned} \quad (20)$$

Jika untuk $f'(x_n)$ dilakukan ekspansi Taylor di sekitar $x=\alpha$ maka,

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\left(1+\frac{f''(\alpha)e_n}{f'(\alpha)}+\frac{1}{2!}\frac{f'''(\alpha)e_n^2}{f'(\alpha)}+\frac{O(e_n^3)}{f'(\alpha)}\right)$$
$$= f'(\alpha)\left(1+2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right) \quad (21)$$

Apabila persamaan (20) dibagi dengan persamaan (21) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + 2\left(c_2^2-c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right) \quad (22)$$

sehingga,

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \alpha + c_2e_n^2 - 2\left(c_2^2-c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right) \quad (23)$$

dengan demikian, maka

$$f(y_n) = f'(\alpha)\left[c_2e_n^2 - 2\left(c_2^2-c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right] \quad (24)$$

dan

$$f'(y_n) = f'(\alpha)\left[1+2c_2{}^2e_n^2 - 4c_2\left(c_2^2-c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right] \quad (25)$$

Selanjutnya, dengan cara yang sama maka diperoleh

$$\frac{f(y_n)}{f'(y_n)} = c_2e_n{}^2 - 2\left(c_2^2-c_3\right)e_n^3 - 2c_2{}^3e_n{}^4 + O\left(e_n^5\right) \quad (26)$$

Sehingga diperoleh

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} \quad (27)$$
$$= \alpha + 2c_2{}^3e_n{}^4 + O(e_n{}^5)$$

maka

$$f(z) = f'(\alpha)\left(2c_2{}^3e_n{}^4 + O(e_n{}^5)\right) \quad (28)$$
$$f'(z) = f'(\alpha)\left(1+4c_2{}^4e_n{}^4 + O(e_n{}^5)\right) \quad (29)$$

Sehingga

$$\frac{f(z_n)}{f'(z_n)} = 2c_2{}^3e_n{}^4 - 8c_2{}^7e_n{}^8 + O(e_n{}^9) \quad (30)$$

Kemudian substitusikan persamaan (27) dan (30) ke dalam persamaan (11) sehingga didapatkan

$$w_n = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$
$$= \alpha + 8c_2{}^7e_n{}^8 + O(e_n{}^9) \quad (31)$$

Sedemikian sehingga

$$f(w_n) = f'(\alpha)\left(8c_2{}^7e_n{}^8 + O(e_n{}^9)\right) \quad (32)$$

dan

$$f'(w_n) = f'(\alpha)\left(1+16c_2{}^8e_n{}^8 + O(e_n{}^9)\right) \quad (33)$$

Selanjutnya, dengan cara yang sama maka diperoleh

$$\frac{f'(w_n)}{f'(z)} = 1 - 4c_2{}^4e_n{}^4 + O(e_n{}^5) \quad (34)$$

Sehingga persamaan (17) diperoleh persamaan galatnya sebagai berikut:

$$e_{n+1} = -4c_2{}^7e_n{}^8 + O(e_n{}^9)$$

Simulasi Numerik

Pada bagian ini akan diberikan simulasi numerik menggunakan *software* Matlab versi 7.0.4 dengan digit error e=10^{-16} dan kriteria penghentian program komputer:

i. $|x_{n+1}-x_n| < \sqrt{e}$
ii. $|f(x_{n+1})| < \sqrt{e}$

yang bertujuan untuk membandingkan jumlah iterasi beberapa metode iteratif dalam menghampiri akar persamaan dari fungsi-fungsi berikut:

$f_1(x) = 2x\cos x + x - 3$

$\alpha \approx -3.5322516915364759$

$f_2(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x} - 3$

$\alpha \approx 9.6335955628326951$

$f_3(x) = e^x + x - 20$

$\alpha \approx 2.8424389537844470$

$f_4(x) = x^3 - +4x^2 - 10$

$\alpha \approx 1.3652300134140968$

$f_5(x) = (x+2)e^x - 1$

$\alpha \approx -0.4428544010023885$

Berdasarkan hasil perhitungan komputasi atau simulasi numerik diperoleh jumlah iterasi dari berbagai metode seperti: NW dinotasikan sebagai metode Newton dengan orde kovergensi dua, NG dinotasikan sebagai metode Newton Ganda dengan orde konvergensi empat, JMC dinotasikan sebagai metode Jarrat yang dimodifikasi menggunakan kelengkungan kurva dengan orde konvergensi dua belas oleh Young Il-Kim (2010), OM dinotasikan sebagai modifikasi metode Ostrowski dengan orde konvergensi delapan oleh Guofeng Zhang (2009) dan NGC dinotasikan sebagai persamaan (17) dengan orde konvergensi delapan. Berikut ini adalah tabel perbandingan jumlah iterasi dari metode tersebut.

Tabel 1. Perbandingan Jumlah Iterasi

$f(x)$	x_0	Jumlah Iterasi				
		NW	NG	JMC	OM	NGC
$f_1(x)$	-4.8	6	3	2	3	3
$f_2(x)$	15.5	4	3	2	2	2
$f_3(x)$	0.0	12	6	3	10	4
$f_4(x)$	1.6	4	3	2	2	2
$f_5(x)$	2.0	8	4	3	3	5

Selanjutnya untuk menegaskan tingkat orde konvergensi suatu metode iterasi, perlu dilakukan perbandingan terhadap hampiran akar-akar dari sebuah fungsi *f*. Salah satu metode yang digunakan untuk penegasan itu dikenal dengan istilah *Computational Order of Convergence* (COC). Berikut ini diberikan definisi tentang COC.

Definisi *Computational Order of Convergence* (Weerakoon, 2000). Diberikan α adalah akar dari $f(x)$, dan x_{n+1}, x_n dan x_{n-1} berturut-turut alalah iterasi yang dekat dengan α, maka *Computational Order of Convergence* (COC) ρ dapat diaproksimasikan dengan menggunakan rumus

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)\right|}$$

Atau

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(e_{n+1})/(e_n)\right|}{\ln\left|(e_n)/(e_{n-1})\right|}$$

Perhitungan COC melibatkan hasil pemograman pada tabel 1 dan menggunakan *software* Maple versi 9.5. Berikut ini adalah tabel perbandingan COC dari berbagai metode tersebut diatas.

Tabel 2. Perbandingan Nilai COC

$f(x)$	x_0	COC				
		NW	NG	JMC	OM	NGC
$f_1(x)$	-4.8	1.99	3.90	Ttd	3.96	6.03
$f_2(x)$	15.5	2.00	3.74	Ttd	Ttd	Ttd
$f_3(x)$	0.0	2.00	3.97	10.83	2.01	6.09
$f_4(x)$	1.6	2.02	3.99	Ttd	Ttd	Ttd
$f_5(x)$	2.0	1.50	3.29	9.59	5.56	3.92

KESIMPULAN

Pada makalah ini diberikan sebuah metode iterasi baru yang diperoleh dengan cara memodifikasi metode Newton Ganda dengan menggunakan kelengkungan kurva seperti terdapat pada persamaan (17). Aproksimasi nilai suatu fungsi *f* dengan menggunakan persamaan (17) untuk setiap iterasi dilakukan dengan enam evaluasi fungsi, yaitu tiga evaluasi fungsi *f* dan tiga f', dan terdiri dari empat tahap yaitu mencari y_n, z_n, w_n dan x_{n+1}. Berdasarkan hasil simulasi numerik pada Tabel 1 dan Tabel 2, NGC secara umum memiliki iterasi yang lebih sedikit dan nilai COC yang lebih tinggi dibandingkan metode iterasi Newton dan Newton Ganda. Sehingga, metode ini lebih efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinier dibandingkan metode lainnya yang memiliki orde konvergensi yang lebih rendah.

DAFTAR PUSTAKA

Chapra, Steven C., Raymond P. Canale, 2006, *Numerical Methods for Engineers, fifth edition*, MC Graw Hill, Singapura.

F, Traub J., 1964, *Iterative Method for The Solution of Equations*, Prentice Hall, New York.

JR, Frank Ayres & Elliot Mendelson, 2004, *Kalkulus Edisi Keempat*, Erlangga, Jakarta,

Khattri, Sanjai K. & Ioannis K. Argyros, 2010, How to Develop Fourth and Seventh Order Iterative Methods?, *Novi Sad J. Math, Vol. 40, No. 2.*

Kim, Yong-Il & Changbun Chun, 2010, *New Twelfth-Order Modifications of Jarratt's Method for Solving Nonlinear Equations*, Studies in Nonlinear Sciences 1,(1): 14-18.

Kim, Yong-Il, Changbun Chun, Weonbae Kim, 2010, *Some Third-Order Curvature Based Methods for solving Nonlinear Equations*, Studies in Nonlinear Sciences 1,(3):72-76.

Purcell, Edwin J., Dale Varberg., Steven E. Rigdon, 2004, *Kalkulus Edisi Kedelapan. Jilid 2*, Erlangga, Jakarta.

Smith, Robert T. & Roland B. Minton, 2002, *Calculus Second Edition*, MC Graw Hill, New York.

Weerakon, S. & Fernando, T.G.I., 2000, *A Variant of Newton's Method With Accelerated Third-Order Convergence.* Applied Mathematics Letters. 13:87-93.