PENYELESAIAN PERSAMAAN RICCATI DENGAN MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE

Wartono *), M. N. Muhaijir
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru 29293-Indonesia
*)e-mail: wartono@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Makalah ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial Riccati dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace (LADM). Metode dekomposisi Adomian Laplace merupakan metode semi analitik untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier yang mengkombinasikan antara tranformasi Laplace dan metode dekomposisi Adomian. Berdasarkan hasil perhitungan, metode dekomposisi Adomian Laplace dapat menghampiri penyelesaian persamaan diferensial biasa nonlinear.

Katakunci: Metode Dekomposisi Adomian Laplace, Persamaan Diferensial Biasa Nonlinear, Persamaan Riccati.

ABSTRACT

This paper discusses the solving of Riccati differential equation by using Laplace Adomian Decomposition Method (LADM). This method is a semi analytical method to solve for the nonlinear ordinary differential equation that combine between Laplace transform and Adomian Decompositiom Method. Based on the calculation results, the Laplace Adomian decomposition method can solve the solution of nonlinear ordinary differential equation..

Keywords: *Laplace Adomian Decomposition Method, Nonlinear Ordinary Differential Equation, Riccati Equation*

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial Riccati merupakan representasi matematis yang berasal dari persoalan-persoalan teknik, rekayasa dan sains terapan, seperti pemrosesan random, diffusi, stokastik, sintesa jaringan dan matematika finansial.

Oleh karena persamaan Riccati merupakan persamaan diferensial nonlinear dengan bentuk persamaan yang cukup kompleks, maka beberapa teknik analitik tidak dapat menyelesaian per-soalan ini. Untuk itu dikembangkan metode semi analitik yang dikontruksi dengan menggunakan deret.

Beberapa metode semi analitik telah dikembangkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial Riccati, seperti dekomposisi Adomian [2,5], iterasi variasi [3,7], transformasi diferensial [4], dan pertubasi homotopi [1].

Pada makalah ini akan dibahas penerapan metode dekomposisi Adomian Laplace (LADM) pada persamaan diferensial Riccati. Metode dekompsisi Adomian Laplace merupakan metode semi analitik yang mengkombinasikan antara metode dekomposisi Adomian (ADM) dengan transformasi Laplace.

Beberapa peneliti menerapkan metode ini untuk menyelesaikan beberapa tipe persamaan diferensial baik linear maupun nonlinear.

Syam dan Hamdan [8] menggunakan metode Dekomposisi Adomian Laplace untuk menyelesaikan persamaan Bratu. Yusufoglu [9] juga menggunakan algoritma Dekomposisi Laplace untuk mencari penyelesaian persamaan Duffing.

Perkembangan selanjutnya, Kiymas [5] juga melakukan kombinasi antara transformasi Laplace dengan metode dekomposisi Adomian untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa nonlinier orde dua dengan koefisien variabel.

BAHAN DAN METODE

a. Metode Dekomposisi Adomia

Metode dekomposisi Adomian adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier berdasarkan nilai awal dan hasil perhitungannya cukup efektif untuk menghampiri penyelesaian eksak. Secara umum dapat dituliskan

$$Ly + Ry + Ny = g(x) \quad (1)$$

atau

$$Ly = -Ry - Ny + g(x) \quad (2)$$

dengan $L = \dfrac{d^n}{dx^n}$ adalah operator dife-rensial. Diasumsikan bahwa invers operator L^{-1} ada, dan L^{-1} merupakan integral sebanyak orde pada L terhadap x dari 0 sampai x.

$$L^{-1}Ly = L^{-1}g(x) - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \quad (3)$$

dan penyelesaian umum persamaan (3) adalah

$$y = \Phi + L^{-1}g - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \quad (4)$$

dengan Φ adalah konstanta integral dan memenuhi $L\Phi = 0$. Jika L adalah operator diferensial orde satu, maka L^{-1} adalah integral tentu dan $\Phi = y(0)$, dan jika L adalah operator diferensial orde dua, maka L^{-1} adalah integral ganda dari 0 sampai x dan $\Phi = y(0) + y'(0)\,x$. Penyelesaian y merupakan jumlah deret tak hingga

$$y = \lim_{n\to\infty} \phi_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \quad (5)$$

dan bentuk suku nonlinear Ny merupakan jumlah polinomial Adomian yang dibe-rikan oleh

$$Ny = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (6)$$

dengan A_n adalah polinomial yang dihi-tung berdasarkan

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i\right)\Bigg|_{\lambda=0}$$

untuk

$n = 0, 1, 2, ...$

Berdasarkan persamaan (5) dan (6), maka persamaan (4) dapat ditulis kembali menjadi

$$y = \Phi + L^{-1}g - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} y_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (7)$$

dengan

$y_0 = \Phi + L^{-1}g$

$y_n = -L^{-1}Ry_{n-1} - L^{-1}A_{n-1}, \quad n \geq 1.$

b. Metode Dekomposisi Adomian Laplace

Metode dekomposisi Adomian Laplace (LADM) merupakan kombinasi metode dekomposisi Adomian dan kemudian mentranformasikan dengan bentuk Laplace. Metode ini telah digunakan untuk menyelesaikan beberapa persa-maan diferensial, misalnya persamaan Bratu [8], persamaan diferensial orde dua [5], persamaan Duffing [9].

Pandang kembali persamaan (2) dalam bentuk

$$Ly = g(x) - Ry - Ny \tag{8}$$

Penerapan transformasi Laplace pada persamaan (8) akan diperoleh

$$L\{Ly\} = L\{g(x)\} - L\{Ry\} - L\{Ny\} \tag{9}$$

Oleh karena

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \text{ dan } Ny = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

maka

$$L\{Ly\} = L\{g(x)\} - L\{Ry\} - L\left\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right\} \tag{10}$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

a. Aplikasi LADM Pada Persamaan Riccati

Persamaan Riccati secara umum ditulis

$$\frac{dy}{dt} = Q(t)y + R(t)y^2 + P(t), \tag{11}$$
$$y(0) = \alpha$$

dengan $Q(t)$, $R(t)$ dan $P(t)$ adalah koefi-sien dan α adalah nilai awal.

Penyelesain persamaan (11) ditentukan dengan menggunakan transformasi Laplace

$$L\{y'\} = s\,L\{y\} - y(0), \tag{12}$$

maka diperoleh

$$L\{y\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{1}{s} L\{P(t)\} + \frac{Q(t)}{s} L\{y\} + \frac{R(t)}{s} L\{y^2\} \tag{13}$$

Oleh karena

$$y = \phi_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} y_i \tag{14}$$

maka persamaan (11) dapat dibentuk kembali menjadi

$$L\left\{\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{1}{s} L\{P(t)\} + \frac{Q(t)}{s} L\left\{\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right\} + \frac{R(t)}{s} L\left\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right\} \tag{15}$$

Berdasarkan pada definisi Adomian, bahwa penyelesaian y diperoleh dalam bentuk penjumlahan suku dan persamaan (15) meru-pakan bentuk rekursi untuk $n = 0, 1, 2, ...$

Untuk $n = 0$, diperoleh rekursi

$$y_0 = \frac{\alpha}{s} + \frac{1}{s} L\{P(t)\}$$

sedangkan untuk $n \geq 1$, diperoleh

$$y_1 = \frac{Q(t)}{s} L\{y_0\} + \frac{R(t)}{s} L\{A_0\}$$
$$y_2 = \frac{Q(t)}{s} L\{y_1\} + \frac{R(t)}{s} L\{A_1\}$$
$$\vdots$$
$$y_{n+1} = \frac{Q(t)}{s} L\{y_n\} + \frac{R(t)}{s} L\{A_n\}$$

Penyelesaian persamaan (11) merupakan jumlah deret ϕ_n dan dapat dituliskan sebagai

$$y = \lim_{n\to\infty} \phi_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

Oleh karena penyelesaian persamaan berbentuk deret, maka akurasi penyele-saian bergantung kepada banyaknya suku-suku yang terlibat.

Akurasi hampiran metode dekomposisi Adomian Laplace yang melibatkan jumlah suku-sukunya dapat dilihat dari besarnya galat didefinisikan oleh

$$e_n = |y(t) - \phi_n(t)|$$

b. Hasil Numerik

Pada sub-bab ini, algoritma dekomposisi Adomian Laplace akan diterapkan pada beberapa kasus persamaan Riccati.

Contoh 1.

Tentukan penyelesaian persamaan Riccati berikut.

$$\frac{dy}{dt} = -y^2 + 1, \tag{16}$$

dengan $y(0) = 0$

Berdasarkan persamaan (11) diperoleh $Q(t) = 0$, $R(t) = -1$, $P(t) = 1$ dan $\alpha = 0$. Penerapan transformasi Laplace pada persamaan (16) memberikan

$$sL\{y\} - y(0) = -L\{y^2\} + L\{1\}$$

atau

$$\mathrm{L}\{y\} = \frac{1}{s}\mathrm{L}\{1\} - \frac{1}{s}\mathrm{L}\{y^2\} \qquad (17)$$

Oleh karena

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

maka persamaan (17) menjadi

$$\mathrm{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right\} = \frac{1}{s}\mathrm{L}\{1\} - \frac{1}{s}\,\mathrm{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right\}$$

Untuk itu diperoleh,

$$y_0 = \frac{1}{s}\mathrm{L}^{-1}\{1\}$$

dan

$$y_1 = -\frac{1}{s}\mathrm{L}^{-1}\{A_0\}$$

$$y_2 = -\frac{1}{s}\mathrm{L}^{-1}\{A_1\}$$

$$\vdots$$

Secara umum

$$y_{n+1} = -\frac{1}{s}\mathrm{L}^{-1}\{A_n\}$$

Dengan menyelesaikan invers trans-formasi Laplace diperoleh,

$$A_1 = 2t^3 - \frac{2}{3}t^4$$

$$A_2 = \frac{7}{3}t^4 - 2t^5 + \frac{17}{45}t^6$$

$$A_3 = 2t^5 - \frac{146}{45}t^6 + \frac{22}{15}t^7 - \frac{62}{315}t^8$$

dan

$$y_0 = t$$

$$y_1 = -\frac{1}{3}t^3$$

$$y_2 = \frac{2}{15}t^5$$

$$y_3 = -\frac{17}{315}t^7$$

Jumlah suku-suku yang digunakan adalah

$$\phi_0 = t$$

$$\phi_1 = t - \frac{1}{3}t^3$$

$$\phi_2 = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5$$

$$\phi_3 = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7$$

$$\vdots$$

Penyelesaian persamaan (16) diperoleh dengan menjumlahkan suku-suku sampai tak hingga dalam bentuk

$$y = \lim_{n\to\infty}\phi_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

sehingga diperoleh

$$y = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \cdots \qquad (18)$$

Persamaan (18) merupakan deret Taylor sehingga dapat dibentuk menjadi

$$y = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$$

Contoh 2.

Pertimbangkan persamaan diferensial Riccati kuadrat berikut

$$\frac{dy}{dt} = 2y - y^2 + 1 \qquad (19)$$

dengan syarat $y(0) = 0$.

Selanjutnya, dengan menggunakan tras-formasi Laplace persamaan (19) menjadi

$s\mathrm{L}\{y\} - y(0) = 2\mathrm{L}\{y\} - \mathrm{L}\{y^2\} + \mathrm{L}\{1\}$

atau

$$\mathrm{L}\{y\} = \frac{1}{s}\mathrm{L}\{1\} + \frac{2}{s}\mathrm{L}\{y\} - \frac{1}{s}\mathrm{L}\{y^2\} \qquad (20)$$

Oleh karena

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

maka persamaan (20) dapat ditulis kembali

$$\mathrm{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right\} = \frac{1}{s}\mathrm{L}\{1\} + \frac{2}{s}\,\mathrm{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right\} - \frac{1}{s}\,\mathrm{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right\} \qquad (21)$$

Berdasarkan persamaan (21), diperoleh bentuk rekursi,

untuk $n = 0$,

$$y_0 = \frac{1}{s}\mathrm{L}^{-1}\{1\}$$

dan untuk $n \geq 1$,

$$y_1 = \frac{2}{s}\mathrm{L}^{-1}\{y_0\} - \frac{1}{s}\mathrm{L}^{-1}\{A_0\}$$

$$y_2 = \frac{2}{s}\mathrm{L}^{-1}\{y_1\} - \frac{1}{s}\mathrm{L}^{-1}\{A_1\}$$

$$\vdots$$

Secara umum ditulis

$$y_{n+1} = \frac{2}{s}\,L^{-1}\{y_n\} - \frac{1}{s}\,L^{-1}\{A_n\}$$

Sedangkan bentuk nonlinear adalah

$$A_0 = y_0^2$$
$$A_1 = 2y_0y_1$$
$$A_2 = 2y_0y_2 + y_0\,y_1^2$$
$$A_3 = 2y_0y_3 + 2y_0y_1y_2$$

Substitusikan invers transformasi Laplace, maka akan diperoleh,

$$y_0 = t \text{ dan } A_0 = y_0^2 \qquad (22)$$

Substitusikan persamaan (22) ke polinomial Adomian dan dengan meng-aplikasikan invers tranformasi Laplace diperoleh

$$A_1 = 2t^3 - \frac{2}{3}t^4$$
$$A_2 = \frac{7}{3}t^4 - 2t^5 + \frac{17}{45}t^6$$
$$A_3 = 2t^5 - \frac{146}{45}t^6 + \frac{22}{15}t^7 - \frac{62}{315}t^8$$

dan

$$y_1 = t^2 - \frac{1}{3}t^3$$
$$y_2 = \frac{2}{3}t^3 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{2}{15}t^5$$
$$y_3 = \frac{1}{3}t^4 - \frac{11}{15}t^5 + \frac{17}{45}t^6 - \frac{17}{315}t^7$$
$$y_4 = \frac{2}{15}t^5 - \frac{26}{45}t^6 + \frac{4}{7}t^7 - \frac{62}{315}t^8 + \frac{62}{2835}t^9$$

Penyelesaian eksplisit persamaan (19) merupakan aproksimasi jumlah takhingga dari y_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ dalam bentuk

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{n} y_i$$

sehingga

$$\phi_0 = t$$
$$\phi_1 = t + t^2 - \frac{1}{3}t^3$$
$$\phi_2 = t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{2}{3}t^4 + \frac{2}{15}t^5$$
$$\phi_3 = t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 + \frac{3}{5}t^5 + \frac{17}{45}t^6 - \frac{17}{315}t^7$$
$$\phi_4 = t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{7}{15}t^5 - \frac{1}{5}t^6 + \frac{163}{315}t^7 - \frac{62}{315}t^8 + \frac{62}{2835}t^9$$

Penyelesaian persamaan (19) diberikan oleh

$$y = t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 + \frac{3}{5}t^5 + \cdots$$

atau

$$y(t) = 1 + \sqrt{2}\tanh\left(\sqrt{2}t + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right)$$

KESIMPULAN

Pada makalah ini, metode dekomposisi Adomian Laplace berhasil menentukan penyelesaian hampiran pada persamaan Riccati, tanpa melakukan linearisasi atupun pertubasi. Penyelesaian hampiran yang diperoleh bergantung kepada banyaknya suku-suku yang digunakan.

Pada contoh 1 dan contoh 2 telah ditunjukkan bahwa semakin banyak suku-suku yang digunakan, maka jumlah-suku-suku dapat menghampiri penyelesaian eksaknya. Oleh karena penyelesaian yang diperoleh merupakan deret, maka penyelesaian eksanya dapat diperoleh dengan mengambil *n*-suku yang cukup besar ($n \to \infty$).

REFERENSI

[1] Abbasbandy, S. "*Homotopy pertuba-tion method for quadratic Riccati differential equation and comparison with Adomian's decomposition method".* Applied Mathematics and Computation, 172, pp. 485 – 490. 2006.

[2] Bahnasawi, A. A. El-Tawil, M. A and Abdel-Naby, A. *"Solving Riccati differential equation using Adomian decomposition method.* Applied Mathematics and Computation. 157. pp. 503 – 514. 2004.

[3] Batiha, B., Noorani, M.S.M., and Hashim, I. "*Application of Variational Iteration Method to a General Riccati Equation"*. International Mathematical Forum. 2(56). pp. 2759 – 2770. 2007.

[4] Biazar, J & Eslami, M. "*Differential Transform Method for Quadratic Riccati Differential Equation"*. International

Journal of Nonlinear Science, 9(4), pp. 444 – 447. 2010

[5] Kiymaz, O. "*An Algorithm for Solving Initial value Problems Using Laplace Adomian Decomposition Method* ". Applied Mathematical Sciences. 3(30). pp. 1453 – 1459. 2009.

[6] Polyanin, A. D. "*Handbook of exact solution for ordinary differenatial equations.* CRC, Florida. 2003.

[7] Jafari, H & Tajadodi, H. *He's variational iteration methods for solving fractional Riccati differential equation.* International Journal of Differential Equations. Pp. 1 – 8. 2010.

[8] Reid, W. T. *"Riccati differenatial equations (Mathematics sciences and engineering)*. Academis press, New York. 1972.

[9] Syam, M. I and Hamdan, A. "*An efficient method for solving Bratu equations"*, Applied Mathematics and Computation. 176. pp. 704 – 713. 2006.

[10] Yusufoglu, E. "*Numerical solution of Duffing equation by the Laplace decomposition algorithm*", Applied Mathematics and Computation. 177. pp. 572 – 580. 2006.