SITEKIN: Jurnal Sains, Teknologi dan Industri, Vol. 19, No. 2, Juni 2022, pp.383 - 391
ISSN 2407-0939 print/ISSN 2721-2041 online

Perpangkatan dan *Trace* Matriks Segitiga 3 x 3 Berpangkat Bilangan Bulat

Fitri Aryani[1], Sundari Wibowo[2], Corry Corazon Marzuki[3], Zukrianto[4]
[1,2,3,4] Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id , corry@uin-suska.ac.id, zukrianto@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Penelitian ini membahas mengenai bentuk umum perpangkatan dan *trace* dari matriks segitiga berbentuk khusus ukuran 3x3 berpangkat bilangan bulat. Bentuk umum perpangkatan matriks segitiga tersebut diperoleh dengan menentukan terlebih dahulu perpangkatan matriks dari pangkat dua sampai pangkat sepuluh, sehingga dapat diduga bentuk umum perpangkatan matriks segitiga tersebut dengan pangkat bilangan bulat positif. Begitu juga untuk pangkat negatif, dimulai dari pangkat negatif satu sampai pangkat negatif sepuluh. Hasil pendugaan dibuktikan dengan induksi matematika, dan aturan invers. Dengan pembuktian yang dilakukan maka diperoleh bentuk umum *trace* matriks segitiga berbentuk khusus ukuran 3x3 berpangkat bilangan bulat. Diberikan juga contoh soal untuk kedua bentuk umum tersebut.

Kata Kunci: induksi matematika, invers matriks, matriks segitiga, perpangkatan matriks, *trace* matriks.

ABSTRACT

This study discusses the general form of powers and trace of special triangular 3x3 matrix. The general form is obtained by determining the powers of special triangular 3x3 matrix from power of two until ten, and then it can be estimed the general form positive integer powers of special triangular 3x3 matrix. Likewise for negative powers, starting from negative power of one to negative powers of ten.The result of the estimation is proved by the mathematical induction and inverse rule. And then we get general form trace of integer power of special triangular 3x3 matrix. Problem example for the two general form are also given.

Keywords: *mathematical induction, inverse of matrix, triangular matrix, powers of matrix, trace matrix.*

Pendahuluan

Matriks segitiga terbagi dua yaitu matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah. Menurut [1] matriks bujursangkar yang semua entri di bawah diagonal utama adalah nol disebut matriks segitiga atas dan matriks bujursangkar yang entri di atas diagonal utama adalah nol disebut matriks segitiga bawah. Sehingga bentuk umum matriks segitiga atas dan segitiga bawah dapat ditulis sebagai berikut.

Bentuk umum matriks segitiga atas:

$$A_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

dengan $a_{ij} \in R \;\forall\; i \le j$

Bentuk umum matriks segitiga bawah:

$$B_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

dengan $a_{ij} \in R \;\forall\; i \ge j$

Menyelesaikan kasus pada matriks dapat menggunakan operasi matriks, seperti perkalian matriks, penjumlahan matriks, *trace* matriks, dan perpangkatan matriks. Pada perkalian matriks AB ada syarat yaitu jumlah kolom matriks A harus sama dengan jumlah baris matriks B. Penelitian ini menitikberatkan pada operasi *trace* matriks.

Trace matriks adalah jumlah dari setiap elemen diagonal utama suatu matriks bujursangkar, yang dinotasikan dengan $tr(A)$. Artinya untuk menentukan nilai dari *trace* suatu matriks tidaklah begitu sulit. Namun, bagaimana halnya dengan menentukan *trace* dari suatu matriks yang berpangkat?. Secara aturan matematika tentunya matriks harus dipangkatkan sebanyak yang diinginkan. Selanjutnya barulah diperoleh *trace* dari

SITEKIN: Jurnal Sains, Teknologi dan Industri, Vol. 19, No. 2, Juni 2022, pp.383 - 391
ISSN 2407-0939 print/ISSN 2721-2041 online

matriks berpangkat tersebut. Jika perpangkatan yang diinginkan besar, maka menentukan perpangkatan matriksnya memerlukan waktu yang lama dalam pengerjaannya. Pada penelitian ini akan berikan rumus langsung untuk mendapatkan nilai *trace* pada matriks berpangkat dengan pangkat bilangan bulat positif. Sehingga sangat membantu bagi peneliti-peneliti lain yang menggunakan nilai *trace* dari matriks berpangkat. Tidak perlu lagi memangkatkan matriks, tetapi sudah dapat langsung menggunakan rumus yang ada.

Menentukan *trace* matriks berpangkat telah banyak dilakukan oleh peneliti-peneliti sebelumnya. Tahun 1976 Data pada artikel [2] telah mendapatkan algoritma penghitungan *trace* matriks berpangkat $Tr(A^k)$, dengan k adalah bilangan bulat dan A adalah matriks Hassenberg dengan unit *codiagonal*. Selanjutnya tahun 1985 Chu pada artikel [3] membahas mengenai kalkulasi simbolik pada *trace* matriks tridiagonal yang berpangkat. Pembahasan *trace* juga terdapat pada beberapa aplikasi dalam teori matriks dan aljabar linier numeric. Pan pada artikel [4], tahun 1990 pada makalahnya dapat menentukan nilai eigen suatu matriks simetris, juga memberikan prosedur dasar dalam mengestimasi *trace* (A^n)dan (A^{-n}) dengan n adalah bilangan bulat.

Menurut Zarelua pada artikel [5] tahun 2008 pada teori bilangan dan kombinatorik, *trace* matriks berpangkat bilangan bulat berhubungan dengan kekongruenan Euler, yaitu:

$$Tr(Ap^r) = Tr(Ap^{r-1})\ mod\ (p^r)$$

untuk semua matriks A bilangan bulat, p adalah bilangan prima dan r adalah bilangan bulat. Artikel tersebut juga membahas mengenai invariant pada sistem dinamik yang digambarkan sebagai bentuk *trace* matriks berpangkat bilangan bulat. Contoh yang diberikan pada artikel tersebut adalah bilangan Lefschetz.

Pada bidang analisis jaringan tepatnya pada *triangle counting in a graph*, menurut Avron tahun 2010 pada [6] ketika menganalisa suatu jaringan yang kompleks, masalah terpenting yaitu menghitung bilangan total segitiga pada graf sederhana terhubung. Bilangan tersebut sama dengan $Tr(A^3)/6$, dengan A adalah matriks ketetanggaan pada graf. Tahun 2012 Brezinski pada [7], *trace* dari matriks berpangkat sering dibahas pada beberapa bidang matematika, seperti Analisis Jaringan, Teori Bilangan, Sistem Dinamik, Teori Matriks dan Persamaan Diferensial.

Beberapa penelitian yang telah dilakukan sebelumnya mengenai *trace* matriks tepatnya *trace* matriks berpangkat, yaitu tahun 2015 Pahade dan Jha pada [8] membahas tentang *trace* matriks real 2×2 berpangkat bilangan bulat positif untuk n ganjil dan n genap. Matriks yang digunakan yaitu $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \forall a,b,c,d \in R$. Hasil yang diperoleh pada artikel tersebut adalah bentuk umum *trace* matriks real 2×2 berpangkat bilangan bulat positif untuk n ganjil dan n genap.

Penelitian berikutnya adalah Aryani dan Solihin pada [9] membahas mengenai bentuk umum dari *trace* matriks real 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif untuk n genap dan n ganjil. Matriks yang digunakan sama dengan matriks yang digunakan oleh [8]. Bentuk umum *trace* matriksnya juga terdapat dua bentuk, untuk n genap dan n ganjil, yaitu:

$$tr(A^n) = \frac{tr(A^n)}{(det(A))^n}$$

Tahun 2018 Gomantara Jeriko, dkk pada [10] juga membahas *trace* pada matriks 2×2 berpangkat bilangan bulat positif dan perluasan pada matriks blok. Dengan menggunakan matriks blok diagonal berukuran $p\times p$ yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{p-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_p \end{bmatrix} \forall\, a_p \in M_{2\times 2}\ untuk\ p = 1, 2, 3$$

Maka diperoleh hasil *trace* matriks tersebut berpangkat bilangan bulat positif dengan pangkat ganjil yaitu:

$$tr(A^{2m+1}) = \sum_{r=0}^{m} \frac{(-1)^r}{r!}(2m+1)\left[\frac{(2m-r)!}{(2m+1-2r)!}\right](\det(A))^r (tr(A))^{(2m+1)-2r}$$

untuk pangkat genap:

$$tr(A^{2m}) = \sum_{r=0}^{m} \frac{(-1)^r}{r!}(2m)\left[\frac{(2m-r-1)!}{(2m-2r)!}\right](\det(A))^r (tr(A))^{2m-2r}$$

Pembahasan tentang *trace* matriks berpangkat juga dibahas oleh Aryani dan Yulianis pada [11] pada tahun 2017, yang membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif untuk n ganjil dan n genap. Matriks yang digunakan adalah $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ d & 0 \end{bmatrix} \forall a,d \in R$ dengan A mempunyai invers. Maka diperoleh bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif yaitu:

$$tr(A^{-n}) = \begin{cases} 0 & ,n \text{ ganjil} \\ \dfrac{2}{(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}} & ,n \text{ genap} \end{cases}$$

Selanjutnya tahun 2018 Aryani dan Fatonah pada [12][13], [14] juga meneliti *trace* matriks berpangkat yang membahas tentang bentuk umum *trace* matriks berbentuk khusus 2×2

berpangkat bilangan bulat positif untuk *n* ganjil dan *n* genap. Matriks yang digunakan adalah $A=\begin{bmatrix}0 & a\\ d & 0\end{bmatrix}\forall\, a,d\in R$, Maka diperoleh hasil *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat positif yaitu:

$$tr(A^n)=\begin{cases}0 & ,n \text{ ganjil}\\ (-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}} & ,n \text{ genap}\end{cases}$$

Masih mengenai *trace* matriks berpangkat, terdapat beberapa penelitian yang terkait dengan hal tersebut dari suatu matriks yang berbeda-beda yang dapat dilihat pada artikel-artikel [15], [16], dan [17]. *Trace* matriks berpangkat juga dapat dilakukan pada matriks ketetanggaan dari suatu graf sebarang, diantaranya yang telah dilakukan oleh peneliti [18] dan [19]. *Trace* matriks berpangkat pada matriks kompleks dilakukan oleh [20], matriks bentuk khusus pada [21] dan [22], dan matriks toeplitz simetris bentuk khusus pada [23].

Berdasarkan uraian tersebut, maka penelitian kali ini membahas mengenai *trace* matriks segitiga berbentuk khusus dengan ukuran 3×3 berpangkat bilangan bulat positif. Dengan matriks yang digunakan berbentuk matriks segitiga atas berbentuk khusus pada Persamaan (1) dan matriks segitiga bawah berbentuk khusus (2) dengan ukuran 3×3 yaitu:

$$A_3=\begin{bmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix},\forall a,b,c\in R \qquad (1)$$

$$B_3=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & b & a\end{bmatrix},\forall a,b,c\in R \qquad (2)$$

Metode Penelitian

Metode penelitian ini menggunakan studi literatur atau kajian pustaka. Dengan kajian yang diperoleh dari beberapa referensi. Langkah-langkah yang dilakukan untuk memperoleh bentuk umum *trace* matriks segitiga berbentuk khusus ukuran 3x3 dengan pangkat bilangan bulat positif, yaitu;

1. Diberikan matriks segitiga atas dan segitiga bawah dengan bentuk khusus yang berukuran 3 x 3

$$A_3=\begin{bmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix},\forall a,b,c\in R \text{ dan}$$

$$B_3=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & b & a\end{bmatrix},\forall a,b,c\in R$$

2. Menentukan matriks $(A_3)^2$ sampai $(A_3)^{10}$ dan $(B_3)^2$ sampai $(B_3)^{10}$.
3. Menduga bentuk umum matriks $(A_3)^n$ dan $(B_3)^n$ dengan n bilangan bulat positif.
4. Membuktikan bentuk umum matriks $(A_3)^n$ dan $(B_3)^n$ dengan n bilangan bulat positif menggunakan induksi matematika.
5. Membuktikan bentuk umum *trac*e matriks segitiga menggunakan pembuktian langsung.
6. Aplikasi *trace* matriks segitiga dengan contoh soal.

Pembuktian bentuk umum perpangkatan matriks menggunakan aturan induksi matematika yang penjabarannya ada di [24] dan [25]. Sedangkan untuk pembuktian *trace* matriks menggunakan pembuktian langsung yang menggunakan definisi *trace* matriks yang ada di [26], [27], dan [28]. Penjabaran definisi-definisi mengenai perkalian dan perpangkatan matriks ada serta teorema-teorema yang berhubungan dengan aturan perpangkatan matriks dan *trace* matriks ada di [29], [30], [31], dan [32].

Hasil dan Pembahasan

Trace Matriks Segitiga Atas 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Menentukan bentuk umum *trace* matriks segitiga atas pada (1) berpangkat bilangan bulat positif, sesuai dengan langkah-langkah pada metode penelitian, terlebih dahulu ditentukan bentuk umum perpangkatan matriks segitiga atasnya yang berpangkat bilangan bulat positif. Untuk mendapatkan bentuk umum perpangkatannya, maka berikut diberikan bentuk pangkat dua sampai pangkat sepuluh.

Diberikan matriks segitiga atas

$A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix},\forall a,b,c\in R$ maka selanjutnya akan ditentukan matriks $(A_3)^2$ sampai $(A_3)^{10}$, yaitu:

SITEKIN: Jurnal Sains, Teknologi dan Industri, Vol. 19, No. 2, Juni 2022, pp.383 - 391
ISSN 2407-0939 print/ISSN 2721-2041 online

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a,b,c \in R$$

$$(A_3)^2 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & 2ac+b^2 \\ 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, maka diperoleh $(A_3)^3$ sampai $(A_3)^{10}$

$$(A_3)^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2b & 3a^2c+3ab^2 \\ 0 & a^3 & 3a^2b \\ 0 & 0 & a^3 \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^4 = \begin{bmatrix} a^4 & 4a^3b & 4a^3c+6a^2b^2 \\ 0 & a^4 & 4a^3b \\ 0 & 0 & a^4 \end{bmatrix}$$

$$(A)^5 = \begin{bmatrix} a^5 & 5a^4b & 5a^4c+10a^3b^2 \\ 0 & a^5 & 5a^4b \\ 0 & 0 & a^5 \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^6 = \begin{bmatrix} a^6 & 6a^5b & 6a^5+15a^4b^2 \\ 0 & a^6 & 6a^5b \\ 0 & 0 & a^6 \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^7 = \begin{bmatrix} a^7 & 7a^6b & 7a^6c+21a^5b^2 \\ 0 & a^7 & 7a^6b \\ 0 & 0 & a^7 \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^8 = \begin{bmatrix} a^8 & 8a^7b & 8a^7c+28a^6b^2 \\ 0 & a^8 & 8a^7b \\ 0 & 0 & a^8 \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^9 = \begin{bmatrix} a^9 & 9a^8b & 9a^8c+36a^7b^2 \\ 0 & a^9 & 9a^8b \\ 0 & 0 & a^9 \end{bmatrix}$$

$$(A_3)^{10} = \begin{bmatrix} a^{10} & 10a^9b & 10a^9c+45a^8b^2 \\ 0 & a^{10} & 10a^9b \\ 0 & 0 & a^{10} \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh bentuk perpangkatan matriks segitiga atas dari $(A_3)^2$ sampai $(A_3)^{10}$ maka dapat diduga bentuk umum $(A_3)^n$, yaitu:

$$(A_3)^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}, \forall n \in Z^+$$

Dugaan bentuk umum perpangkatan matriks segitiga atas tersebut akan dibuktikan dengan induksi matematika yang disajikan pada Teorema 1 berikut.

Teorema 1: Diberikan matriks dengan bentuk $A_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a,b,c \in R$, maka

$$(A_3)^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}, \forall n \in Z^+$$

Bukti: Pembuktian menggunakan induksi matematika.

Misalkan:

$$p(n):(A_3)^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}, \forall n \in Z^+$$

1. Akan ditunjukan $p(1)$ benar, yaitu:

$$p(1):(A_3)^1 = \begin{bmatrix} a^1 & 1a^{1-1}b & 1a^{1-1}c+\frac{1}{2}1(1-1)a^{1-2}b^2 \\ 0 & a^1 & 1a^{1-1}b \\ 0 & 0 & a^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 1a^0b & 1a^0c+\frac{1}{2}1(0)a^{-1}b^2 \\ 0 & a & 1a^0b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

dengan memperhatikan Persamaan (1) maka $p(1)$ benar.

2. Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k):(A_3)^k = \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1}b & ka^{k-1}c+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 \\ 0 & a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & 0 & a^k \end{bmatrix}, \forall k \in Z^+$$

Akan dibuktikan $p(k+1)$ juga benar, yaitu:

$$p(k+1):(A_3)^{k+1} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^kb & (k+1)a^kc+\frac{1}{2}(k+1)(k)a^{k-1}b^2 \\ 0 & a^k & k+1a^kb \\ 0 & 0 & a^k \end{bmatrix} \quad (3)$$

Perhatikan bahwa:

$$(A_3)^{k+1} = (A_3)^k \cdot (A_3)$$

$$= \begin{bmatrix} a^k & ka^{k-1}b & ka^{k-1}c+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 \\ 0 & a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & 0 & a^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^k a+0+0 & a^k b+ka^{k-1}ab+0 & a^k c+ka^{k-1}b^2+ka^{k-1}ac+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}ab^2 \\ 0 & 0+a^k a+0 & 0+a^k b+ka^{k-1}ab \\ 0 & 0 & 0+0+a^k a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & a^k b+ka^k b & a^k c+ka^{k-1}b^2+ka^k c+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-1}b^2 \\ 0 & a^{k+1} & a^k b+ka^k b \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c+ka^{k-1}b^2+\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-1}b^2 \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c+(a^{k-1}b^2(k+\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k)) \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c+(a^{k-1}b^2(\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k) \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k b & (k+1)a^k c+\frac{1}{2}(k+1)(k)a^{k-1}b^2 \\ 0 & a^{k+1} & (k+1)a^k b \\ 0 & 0 & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

dengan melihat (3) maka $p(k+1)$ benar.

Karena Langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka Teorema 1 terbukti.

Setelah mendapatkan bentuk perpangkatan $(A_3)^n$ dan telah dibuktikan menggunakan induksi matematika maka selanjutnya dapat diperoleh $tr(A_3^n)$ yang disajikan dalam Teorema 2 sebagai berikut:

Teorema 2: Diberikan matriks dengan bentuk

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \forall a,b,c \in R,$$ maka,

$$tr(A_3^n) = 3a^n, \forall n \in Z^+$$

Bukti: Teorema tersebut dibuktikan menggunakan pembuktian langsung.

Berdasarkan Teorema 1 dan definisi *trace* matriks maka diperoleh:

$$tr(A_3)^n = tr\begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c+\frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$$

$$= a^n + a^n + a^n$$

$$= 3a^n$$

Sehingga terbukti $tr\,(A_n)^n = 3a^n, \ \forall n \in Z^+$. ■

Trace Matriks Segitiga Bawah 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Setelah diperolehnya bentuk perpangkatan dan *trace* matriks segitiga atas bentuk khusus dengan ukuran 3x3 pada Teorema 1 dan Teorema 2, maka selanjutnya ditentukan bentuk umum perpangkatan dan *trace* dari matriks segitiga bawah pada (2) berpangkat bilangan bulat positif. Dengan cara yang sama pada matriks segitiga atas, diberikan terlebih dahulu bentuk perpangkatan matriks segitiga bawah dari pangkat dua sampai pangkat sepuluh.

Diberikan matriks segitiga bawah

$$B_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix}, \forall a,b,c \in R$$ maka selanjutnya akan ditentukan matriks $(B_3)^2$ sampai $(B_3)^{10}$, yaitu:

$$(B_3)^2 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ab & a^2 & 0 \\ 2ac+b^2 & 2ab & a^2 \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama, maka diperoleh $(B_3)^3$ sampai $(B_3)^{10}$

$$(B_3)^3 = \begin{bmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3a^2b & a^3 & 0 \\ 3a^2c+3ab^2 & 3a^2b & a^3 \end{bmatrix}$$

$$(B_3)^4 = \begin{bmatrix} a^4 & 0 & 0 \\ 4a^3b & a^4 & 0 \\ 4a^3c+6a^2b^2 & 4a^3b & a^4 \end{bmatrix}$$

$$(B_3)^5 = \begin{bmatrix} a^5 & 0 & 0 \\ 5a^4b & a^5 & 0 \\ 5a^4c+10a^3b^2 & 5a^4b & a^5 \end{bmatrix}$$

$$(B_3)^6 = \begin{bmatrix} a^6 & 0 & 0 \\ 6a^5b & a^6 & 0 \\ 6a^5c+15a^4b^2 & 6a^5b & a^6 \end{bmatrix}$$

$$(B_3)^7 = \begin{bmatrix} a^7 & 0 & 0 \\ 7a^6b & a^7 & 0 \\ 7a^6c + 21a^5b^2 & 7a^6b & a^7 \end{bmatrix}$$

$$(B_3)^8 = \begin{bmatrix} a^8 & 0 & 0 \\ 8a^7b & a^8 & 0 \\ 8a^7c + 28a^6b^2 & 8a^7b & a^8 \end{bmatrix}$$

$$(B_3)^9 = \begin{bmatrix} a^9 & 0 & 0 \\ 9a^8b & a^9 & 0 \\ 9a^8c + 36a^7b^2 & 9a^8b & a^9 \end{bmatrix}$$

$$(B_3)^{10} = \begin{bmatrix} a^{10} & 0 & 0 \\ 10a^9b & a^{10} & 0 \\ 10a^9c + 45a^8b^2 & 10a^9b & a^{10} \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh bentuk perpangkatan matriks segitiga bawah dari pangkat dua sampai pangkat sepuluh, selanjutnya dengan memperhatikan bentuk $(B_3)^2$ sampai $(B_3)^{10}$ maka dapat diduga bentuk umum $(B_3)^n$, yaitu:

$$(B_3)^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1}b & a^n & 0 \\ na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n \end{bmatrix}, \forall n \in Z^+$$

Dugaan bentuk umum perpangkatan matriks segitiga bawah tersebut akan dibuktikan dengan induksi matematika yang disajikan pada Teorema 3 berikut.

Teorema 3: Diberikan matriks dengan bentuk $B_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix}, \forall a, b, c \in R$, maka

$$(B_3)^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1}b & a^n & 0 \\ na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n \end{bmatrix}, \forall n \in Z^+$$

Bukti: Pembuktian menggunakan induksi matematika.

Misalkan:

$$p(n) : (B_3)^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1}b & a^n & 0 \\ na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n \end{bmatrix}, \forall n \in Z^+$$

1. Akan ditunjukan $p(1)$ benar, yaitu:(4.19)

$$p(1) : (B_3)^1 = \begin{bmatrix} a^1 & 0 & 0 \\ 1a^{1-1}b & a^1 & 0 \\ 1a^{1-1}c + \frac{1}{2}1(1-1)a^{1-2}b^2 & 1a^{1-1}b & a^1 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1a^0b & a & 0 \\ 1a^0c + \frac{1}{2}1(0)a^{-1}b^2 & 1a^0b & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix}$$

dengan memperhatikan Persamaan (2) maka $p(1)$ benar.

2. Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k) : (B_3)^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 & 0 \\ ka^{k-1}b & a^k & 0 \\ ka^{k-1}c + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 & ka^{k-1}b & a^k \end{bmatrix}, \forall k \in Z^+$$

dan akan dibuktikan $p(k+1)$ juga benar, yaitu:

$$p(k+1) := (B_3)^{k+1} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & 0 & 0 \\ (k+1)a^kb & a^k & 0 \\ (k+1)a^kc + \frac{1}{2}(k+1)(k)a^{k-1}b^2 & (k+1)a^kb & a^k \end{bmatrix} \quad (4)$$

Perhatikan bahwa :

$$(B_3)^{k+1} = (B_3)^k \cdot B_3$$

$$= \begin{bmatrix} a^k & 0 & 0 \\ ka^{k-1}b & a^k & 0 \\ ka^{k-1}c + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}b^2 & ka^{k-1}b & a^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^ka + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 \\ ka^{k-1}ab + a^kb + 0 & 0 + a^ka + 0 & 0 + 0 + 0 \\ ka^{k-1}ac + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}ab^2 + ka^{k-1}b^2 + a^kc & 0 + ka^{k-1}ab + a^kb & 0 + 0 + a^ka \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & 0 & 0 \\ ka^kb + a^kb & a^{k+1} & 0 \\ ka^kc + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-1}b^2 + ka^{k-1}b^2 + a^kc & ka^kb + a^kb & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & 0 & 0 \\ (k+1)a^kb & a^{k+1} & 0 \\ ka^kc + \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-1}b^2 + ka^{k-1}b^2 + a^kc & (k+1)a^kb & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & 0 & 0 \\ (k+1)a^kb & a^{k+1} & 0 \\ (k+1)a^kc + (a^{k-1}b^2(k + \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k) & (k+1)a^kb & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & 0 & 0 \\ (k+1)a^kb & a^{k+1} & 0 \\ (k+1)a^kc + (a^{k-1}b^2(\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k) & (k+1)a^kb & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^{k+1} & 0 & 0 \\ (k+1)a^kb & a^{k+1} & 0 \\ (k+1)a^kc + \frac{1}{2}(k+1)(k)a^{k-1}b^2 & (k+1)a^kb & a^{k+1} \end{bmatrix}$$

Dengan melihat (4), maka $p(k+1)$ juga benar.

Karena Langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka Teorema 3 terbukti.

Setelah mendapatkan bentuk perpangkatan $(B_3)^n$ dan telah dibuktikan menggunakan induksi matematika maka selanjutnya dapat diperoleh $tr(B_3)^n$ yang disajikan dalam Teorema 4.

SITEKIN: Jurnal Sains, Teknologi dan Industri, Vol. 19, No. 2, Juni 2022, pp.383 - 391
ISSN 2407-0939 print/ISSN 2721-2041 online

Teorema 4: Diberikan matriks dengan bentuk $B_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix}, \forall a,b,c \in R$ maka,

$tr\,(B_3{}^n) = 3a^n, \forall\, n \in Z^+$.

Bukti: Teorema tersebut akan dibuktikan menggunkan pembuktian langsung.
Berdasarkan Teorema 3 dan definisi *trace* matriks , maka diperoleh:

$$tr(B_3{}^n) = tr\begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1}b & a^n & 0 \\ na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n \end{bmatrix}$$
$$= a^n + a^n + a^n$$
$$= 3a^n$$

Sehinggs terbukti $tr\,(B_3{}^n) = 3a^n, \forall\, n \in Z^+$ ■

Contoh 1 Diberikan matriks segitiga atas 3×3 yaitu:

$$A_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{4} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Tentukan $(A_3)^7$ dan $tr(A_3)^7$ dari matriks diatas menggunakan Teorema 1 dan Teorema 2!
Penyelesaian:
Berdasarkan Teorema 1, diperoleh:

$$A_3)^7 = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^7 & 7\left(\frac{1}{2}\right)^{7-1}\left(\frac{2}{4}\right) & 7\left(\frac{1}{2}\right)^{7-1}(2) + \frac{1}{2}7(7-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{7-2}\left(\frac{2}{4}\right)^2 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^7 & 7\left(\frac{1}{2}\right)^{7-1}\left(\frac{2}{4}\right) \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{128} & \frac{7}{128} & \frac{49}{128} \\ 0 & \frac{1}{128} & \frac{7}{128} \\ 0 & 0 & \frac{1}{128} \end{bmatrix}$$

dan dengan menggunakan Teorema 2, diperoleh:

$$tr(A_3^7) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^7$$
$$= 3\left(\frac{1}{128}\right)$$
$$= \frac{3}{128}\ .$$

Contoh 2 Diberikan matriks segitiga bawah 3×3 sebagai berikut:

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0 & 0 \\ 1{,}3 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}4 & 1{,}3 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

Tentukan $(B_3)^{12}$ dan $tr(B_3)^{12}$ dari matriks diatas menggunakan Teorema 3 dan Teorema 4!
Penyelesaian:
Berdasarkan Teorema 3, diperoleh:

$$(B_3)^{12} = \begin{bmatrix} (0{,}3)^{12} & 0 & 0 \\ 12(0{,}3)^{12-1}(1{,}3) & (0{,}3)^{12} & 0 \\ 12(0{,}3)^{12-1}(0{,}4) + \frac{1}{2}12(12-1)(0{,}3)^{12-2}(1{,}3)^2 & 12(0{,}3)^{12-1}(1{,}3) & (0{,}3)^{12} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5{,}31441\cdot10^{-7} & 0 & 0 \\ 0{,}000027634932 & 5{,}31441\cdot10^{-7} & 0 \\ 0{,}000667135602 & 0{,}000027634932 & 5{,}31441\cdot10^{-7} \end{bmatrix}$$

dan dengan menggunakan Teorema 4 , diperoleh:

$$tr(A_3^{12}) = 3(0{,}3)^{12}$$
$$= 3\left(5{,}31441 \cdot 10^{-7}\right)$$
$$= 15{,}9423 \cdot 10^{-7}\ .$$

Kesimpulan

Perpangkatan dan *trace* dari suatu matriks segitiga (atas dan bawah) bentuk khusus (1) dan (2) ukuran 3x3 berpangkat bilangan bulat positif telah diperoleh. Untuk bentuk perpangkatannya ada dua yaitu:

$$(A_3)^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}, \forall\, n \in Z^+ .$$

$$(B_3)^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ na^{n-1}b & a^n & 0 \\ na^{n-1}c + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 & na^{n-1}b & a^n \end{bmatrix}, \forall\, n \in Z^+$$

dan untuk *trace* dari matriks segitiga (atas dan bawah) diperoleh nilai yang sama, yaitu:

$$tr(A_3^n) = tr(B_3^n) = 3a^n\ .$$

Daftar Pustaka

[1] H. Anton and C. Rorres, *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan*. Jakarta: Erlangga, 2004.

[2] B. N. Datta and K. Datta, “An Algorithm for Computing Powers of a Hessenberg Matrix and Its Applications,” *Linear Algebra Appl.*, vol. 14, no. 3, pp. 273–284,

1976.

[3] M. T. Chu and Raleigh, “Symbolic Calculation of the Trace of the Power of a Tridiagonal Matrix,” *Computing*, vol. 35, no. 3, pp. 257–268, 1985.

[4] V. Pan, “Estimating the Extremal Eigenvalues of a Symmetric Matrix,” *Comput. Math. with Appl.*, vol. 20, no. 2, pp. 17–22, 1990.

[5] A. V. Zarelua, “On Congruences for the Traces of Powers of Some Matrices,” *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 263, no. 1, pp. 78–98, 2008.

[6] H. Avron, “Counting Triangles in Large Graphs Using Randomized Matrix Trace Estimation,” in *Workshop on Large-scale Data Mining: Theory and Applications*, 2010, vol. 10, no. 10, p. 9.

[7] C. Brezinski, P. Fika, and M. Mitrouli, “Estimations of the Trace of Powers of Positive Self-Adjoint Operators by Extrapolation of the Moments,” *Electron. Trans. Numer. Anal.*, vol. 39, pp. 144–155, 2012.

[8] J. Pahade and M. Jha, “Trace of Positive Integer Power of Real 2 × 2 Matrices,” *Adv. Linear Algebr. Matrix Theory*, vol. 5, no. 04, p. 150, 2015.

[9] F. Aryani and M. Solihin, “Trace Matriks Real Berpangkat Bilangan Bulat Negatif,” *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 3, no. 2, pp. 16–23, 2017.

[10] J. Gormantara, A. K. Amir, and J. Massalesse, “Penentuan Trace pada Matriks 2 × 2 Berpangkat Integer Positif dan Perluasannya pada Matriks Blok,” *Tugas Akhir Mhs. Univ. Hasanudin*.

[11] F. Aryani and Y. Yulianis, “Trace Matriks Berbentuk Khusus 2 × 2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif,” *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 4, no. 2, pp. 105–113, 2018.

[12] F. Aryani and T. Fatonah, “Trace Matriks Berbentuk Khusus 2 × 2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif,” *Talent. Conf. Ser. Sci. Technol.*, vol. 2, no. 2, 2019.

[13] S. Sarbaini, E. P. Cynthia, and M. I. Arifandy, “Pengelompokan Diabetic Macular Edema Berbasis Citra Retina Mata Menggunakan Fuzzy Learning Vector Quantization (FLVQ),” *SITEKIN J. Sains, Teknol. dan Ind.*, vol. 19, no. 1, pp. 75–80, 2021.

[14] F. Muttakin, K. N. Fatwa, and S. Sarbaini, “Implementasi Additive Ratio Assessment Model untuk Rekomendasi Penerima Manfaat Program Keluarga Harapan,” *SITEKIN J. Sains, Teknol. dan Ind.*, vol. 19, no. 1, pp. 40–48.

[15] F. Aryani, D. R. Sari, C. C. Marzuki, and S. Gemawati, “Trace Matriks Toeplitz Kompleks Khusus Ukuran 3 × 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif,” in *Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri*, 2018, pp. 673–681.

[16] F. Aryani and N. Husna, “Trace Matriks Toepitz Tridiagonal 3 × 3 Berpangkat Bilangan bulat Positif,” *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 5, no. 1, pp. 40–49, 2019.

[17] R. Rahmawati, N. A. Putri, F. Aryani, and A. N. Rahma, “Trace Matriks Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo 3 × 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif,” *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 5, no. 2, pp. 61–70, 2019.

[18] J. K. Pahade and M. Jha, “Trace of Positive Integer Power of Adjacency Matrix,” *Glob. J. Pure Appl. Math.*, vol. 13, no. 6, 2017.

[19] F. Aryani, A. A. Nugraha, M. Faisal, and C. C. Marzuki, “Trace Matriks Ketetanggaan n × n Berpangkat -2, -3, -4,” *Proceding SNTIKI 12*, pp. 543–553, 2020.

[20] F. Aryani, C. Anam, and C. C. Marzuki, “Trace Matriks Kompleks Berbentuk Khusus 3 X 3 Berpangkat Bilangan Bulat,” *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 6, no. 1, pp. 122–132, 2020.

[21] F. Aryani, R. Andesta, and C. C. Marzuki, “Trace Matriks Berbentuk Khusus 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif,” *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 6, no. 1, pp. 40–49, 2020.

[22] F. Aryani and R. Taslim, “Trace Matriks 3 x 3 Berpangkat Bilangan Bulat,” *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 7, no. 1, pp. 1–9, 2021.

[23] Rahmawati, N. A. Putri, F. Aryani, and A. N. Rahma, “Trace Matriks Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif,” *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 5, no. 2, 2019.

[24] K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*. New York: Mc Graw Hill, 2007.

[25] R. Munir, *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika ITB, 2005.

[26] R. Rifa’i, *Aljabar Matriks Dasar*. Yogyakarta: Budi Utama, 2016.

[27] S. Banerjee and A. Roy, *Linear Algebra and Matrix Analysis for Statistics*. Crc Press Boca Raton, 2014.

[28] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra*. United States of America: Wiley, 2013.

[29] Marjono, *Aljabar Linear*. Malang: UB Press, 2012.

[30] J. E. Gentle, *Matrix algebra*, vol. 10.

Springer, 2007.
[31] R. Kariadinata, *Aljabar Matriks Elementer*. Bandung: Pustaka Setia, 2013.
[32] R. Larson, *Elementary Linear Algebra*, 7th ed. Boston: Cengage Learning, 2013.