Jurnal Sains, Teknologi dan Industri, Vol. 11, No. 2, Juni 2014, pp. 166 - 174
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

# PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR FUZZY KOMPLEKS MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI DOOLITTLE

**[1]Corry Corazon Marzuki, [2]Novi Hasmita**
[1,2]Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Suska Riau
E-mail: corrazon_m@yahoo.co.id

**ABSTRAK**

Misalkan $AX = Y$ adalah suatu sistem persamaan linear dengan $A$ adalah matriks koefisien, $X$ adalah vektor yang akan ditentukan nilainya dan $Y$ adalah vektor yang entrinya berupa konstanta. Sistem persamaan linear yang digunakan pada tulisan ini adalah sistem persamaan linear dengan koefisien bilangan kompleks dan konstanta bilangan fuzzy kompleks yang disebut dengan sistem persamaan linear fuzzy kompleks. Berdasarkan hasil penelitian ini diperoleh bahwa metode dekomposisi Doolittle dapat menyelesaikan sistem persamaan linear fuzzy kompleks dengan lebih mudah.

***Kata kunci:*** *SPL fuzzy, SPL kompleks, SPL fuzzy kompleks, metode dekomposisi Doolittle*

***ABSTRACT***

*Let $AX = Y$ be a system of linear equations with $A$ be a coefficient matrix, $X$ be a vector consisting of variable and $Y$ be a constant vector. System of linear equations which be used in this paper is a system of linear equations with complex coefficients and fuzzy complex constant, is called complex fuzzy system of linear equations. From the result of this research, we conclude that Doolittle decomposition method can solve the complex fuzzy system of linear equations easier.*

***Keywords:*** *fuzzy system of linear equations, complex system of linear equations, complex fuzzy systems of linear equations, Doolittle decomposition method*

## PENDAHULUAN

Salah satu permasalahan yang sering dihadapi pada bidang aljabar linier adalah persoalan untuk mencari penyelesaian dari suatu sistem persamaan linear. Sistem persamaan linear ditemukan hampir di semua cabang ilmu pengetahuan.

Secara umum sistem persamaan linear dapat ditulis dalam bentuk $AX = Y$ dengan $A = [a_{mn}]$ adalah matriks koefisien, $X = [x_n]$ adalah vektor kolom dari variabel-variabel tidak diketahui, dan $Y = [y_n]$ adalah vektor kolom dari konstanta. Ada berbagai macam koefisien dan konstanta dalam sistem persamaan linear, ada yang berbentuk bilangan real, bilangan fuzzy dan ada pula yang berbentuk bilangan kompleks. Bahkan beberapa tahun belakangan ini, sudah ada yang menyelesaikan system persamaan linier dengan konstanta berupa bilangan fuzzy kompleks.

Fuzzy secara bahasa dapat diartikan "*samar*" atau "*kabur*". Bentuk umum dari sistem persamaan linear fuzzy adalah $A\tilde{X} = \tilde{Y}$, dimana $\tilde{X}$ dan $\tilde{Y}$ adalah suatu parameter yang berada pada interval tertentu. Untuk menyatakan hal tersebut maka digunakan teori himpunan fuzzy.

Sistem persamaan linear dapat diselesaikan dengan beberapa metode, diantaranya metode Eliminasi Gauss, Gauss-Jordan, dekomposisi $LU$ dan dekomposisi Doolittle.

Metode dekomposisi Doolittle dilakukan dengan cara memfaktorkan matriks $A$ menjadi dua matriks, yaitu matriks $L$ dan $U$, sehingga $A = LU$, dengan $L$ adalah matriks segitiga bawah dengan elemen diagonal utamanya bernilai 1 dan $U$ adalah matriks segitiga atas yang elemen diagonal utamanya tak nol. Dengan demikian, sistem persamaan linear akan berubah menjadi $AX = (LU)X = Y$.

Dekomposisi Doolittle hampir sama dengan dekomposisi atau faktorisasi $LU$, hanya saja cara mencari nilai pada masing-masing matriks $L$ dan $U$ nya berbeda.

Dekomposisi atau faktorisasi $LU$ erat kaitannya dengan proses eliminasi Gauss untuk mencari nilai $x$, sedangkan dekomposisi Doolittle menggunakan rumus untuk mencari nilai $x$.

Penelitian tentang penyelesaian sistem persamaan linear fuzzy sudah banyak dibahas sebelumnya, diantaranya adalah skripsi M. Mosleh yang berjudul "*Regular Splitting Method for Approximating Linear System of Fuzzy Equation"* pada tahun 2010 dan paper M. Matinfar dkk pada tahun 2009 yang membahas tentang metode baru menyelesaikan sistem persamaan linear fuzzy rectangular berdasarkan algoritma Graville dengan judul *"A New Method for Solving of Rectangular Fuzzy System of Equations Based on Greville's Algorithm"*. Sedangkan sistem persamaan linear fuzzy kompleks pertama kali diteliti oleh Taher Rahgooy dkk pada tahun 2009 dengan judul *"Fuzzy Complex System of Linear Equation Applied to Circuit Analysis"* dan pada tahun 2013 oleh Syafrina pada skripsinya yang berjudul "*Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Fuzzy Kompleks Menggunakan Metode Dekomposisi QR*" yang membahas tentang sistem persamaan linear fuzzy kompleks dan langkah-langkah penyelesaiannya dengan metode dekomposisi *QR*.

Tulisan ini akan membahas tentang "Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Fuzzy Kompleks Menggunakan Metode Dekomposisi Doolittle".

## Tinjauan Pustaka

### Sistem Persamaan Linear *Fuzzy*

Model sistem persamaan linear fuzzy dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\left.\begin{array}{lllll} a_{11}(\tilde{x}_1) + a_{12}(\tilde{x}_2) + \cdots + a_{1n}(\tilde{x}_n) & = \tilde{y}_1 \\ a_{21}(\tilde{x}_1) + a_{22}(\tilde{x}_2) + \cdots + a_{2n}(\tilde{x}_n) & = \tilde{y}_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \\ a_{m1}(\tilde{x}_1) + a_{m2}(\tilde{x}_2) + \cdots + a_{mn}(\tilde{x}_n) & = \tilde{y}_n \end{array}\right\} \quad (1)$$

dengan $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n \in F$ dan $a_{i,j} \in R$ untuk $1 \le i, j \le n$.

Sistem persamaan (1) dapat ditulis dalam bentuk matriks $A\tilde{X} = \tilde{Y}$, dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r) \\ \underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r) \\ \vdots \\ \underline{x}_n(r), \overline{x}_n(r) \end{bmatrix}$$

dan $\tilde{Y} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}_1(r), \overline{y}_1(r) \\ \underline{y}_2(r), \overline{y}_2(r) \\ \vdots \\ \underline{y}_n(r), \overline{y}_n(r) \end{bmatrix}$

**Definisi 1 (Arezoo Hosseinpour, dkk (2006))** Suatu vektor bilangan fuzzy $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, dengan $x_i = \left(\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\right), \quad 1 \le i \le n, 0 \le r \le 1$ disebut penyelesaian sistem persamaan linear fuzzy jika memenuhi :

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j} = \sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}x_j} = \underline{y}_i \\ \overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}x_j} = \overline{y}_i \end{array}\right\} \quad (2)$$

Akibatnya, langkah awal untuk mencari penyelesaian dari sistem persamaan linear $(1)$ adalah mengubah sistem persamaan linear tersebut menjadi :

$$S\tilde{X} = \tilde{Y} \quad (3)$$

dengan $\tilde{X} = \left(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\right)$, $\tilde{Y} = \left(\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_n, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n\right)$ dan $S = \left(s_{ij}\right),\ 1 \le i \le 2n, 1 \le j \le 2n$ yang diperoleh dengan ketentuan:

$$\begin{cases} a_{ij} \ge 0 \Longrightarrow a_{ij} = s_{ij} = s_{i+n,j+n} \\ a_{ij} < 0 \Longrightarrow -a_{ij} = s_{i+n,j} = s_{i,j+n} \\ s_{ij} = 0, \quad\quad untuk\ lainnya \end{cases} \quad (4)$$

Sehingga matriks $S, X,$ dan $Y$ dapat ditulis sebagai berikut :

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \ge 0 & S_2 \le 0 \\ S_2 \le 0 & S_1 \ge 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} \underline{X} \\ \overline{X} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} \underline{Y} \\ \overline{Y} \end{bmatrix}$$

dengan $S_1$ merupakan entri positif dari matriks $A$ dan $S_2$ merupakan entri negatif dari matriks $A$,

Jurnal Sains, Teknologi dan Industri, Vol. 11, No. 2, Juni 2014, pp. 166 - 174
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1(r) \\ \underline{x}_2(r) \\ \vdots \\ \underline{x}_n(r) \end{bmatrix}, \overline{X} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1(r) \\ \overline{x}_2(r) \\ \vdots \\ \overline{x}_n(r) \end{bmatrix}, \underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{y}_1(r) \\ \underline{y}_2(r) \\ \vdots \\ \underline{y}_n(r) \end{bmatrix}$ dan

$\overline{Y} = \begin{bmatrix} \overline{y}_1(r) \\ \overline{y}_2(r) \\ \vdots \\ \overline{y}_n(r) \end{bmatrix}$

Sehingga, sistem persamaan linearnya dapat ditulis :

$S_1\underline{X} + S_2\overline{X} = \underline{Y}$
$S_2\underline{X} + S_1\overline{X} = \overline{Y}$

**Definisi 2**

Misalkan $X = \left\{\left(\underline{x_i}(r), \overline{x_i}(r)\right), 1 \leq i \leq n\right\}$ adalah solusi unik dari $SX = Y$. Vektor bilangan *fuzzy* $U = \left\{\left(\underline{u_i}(r), \overline{u_i}(r)\right), 1 \leq i \leq n\right\}$ didefinisikan oleh

$\underline{u_i}(r) = min\left\{\underline{x_i}(r), \overline{x_i}(r), \underline{x_i}(1)\right\}$
$\overline{u_i}(r) = min\left\{\underline{x_i}(r), \overline{x_i}(r), \underline{x_i}(1)\right\}$

dikatakan solusi *fuzzy* dari $SX = Y$. Jika $\left(\underline{x_i}(r), \overline{x_i}(r)\right), 1 \leq i \leq n$ semuanya bilangan *fuzzy* segitiga maka $\underline{u_i}(r) = \underline{x_i}(r)$, $\overline{u_i}(r) = \overline{x_i}(r)$, $1 \leq i \leq n$ dan $U$ dikatakan solusi fuzzy kuat. Jika tidak, $U$ dikatakan solusi fuzzy lemah.

## Sistem Persamaan Linear *Fuzzy* Kompleks

Bilangan *fuzzy* kompleks dapat dinyatakan secara umum sebagai berikut :

$\tilde{Z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ , dimana $\tilde{x} = \left(\underline{x}(r), \overline{x}(r)\right)$, $\tilde{y} = \left(\underline{y}(r), \overline{y}(r)\right)$ dan $0 \leq r \leq 1$. Sedangkan $\underline{Z} = \underline{x}(r) + i\underline{y}(r)$ dan $\overline{Z} = \overline{x}(r) + i\overline{y}(r)$.

Taher Rahgooy, dkk (2009) mendefinisikan sistem persamaan linear fuzzy kompleks sebagai berikut :

**Definisi 3** (Taher Rahgooy) :

$$\left.\begin{aligned} c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \cdots + c_{1n}z_n &= w_1 \\ c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \cdots + c_{2n}z_n &= w_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ c_{m1}z_1 + c_{m2}z_2 + \cdots + c_{mn}z_n &= w_m \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

dengan matriks $C = \left(c_{ij}\right), 1 \leq i, j \leq n$ merupakan matriks kompleks $nxn$ dan $w_i, 1 \leq i \leq n$ adalah bilangan fuzzy kompleks. Ini disebut sebagai sistem persamaan linear fuzzy kompleks.

## Dekomposisi Doolittle

Metode dekomposisi Doolittle merupakan salah satu cara untuk menentukan solusi dari suatu sistem persamaan linear. Dekomposisi Doolittle adalah suatu proses pemfaktoran matriks $A$ menjadi $A = LU$, dengan $L$ merupakan suatu matriks segitiga bawah yang semua elemen diagonal utamanya bernilai 1 dan $U$ adalah matriks segitiga atas dengan elemen diagonal utamanya tak nol. Sehingga sistem persamaan linear akan berubah menjadi $AX = (LU)X = Y$.

Ilustrasi metode dekomposisi Doolittle sebagai berikut :

Diberikan suatu matriks :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Kemudian matriks $A$ difaktorkan menjadi matriks segitiga bawah $L$ dan matriks segitiga atas $U$. Sehingga

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$
(7)

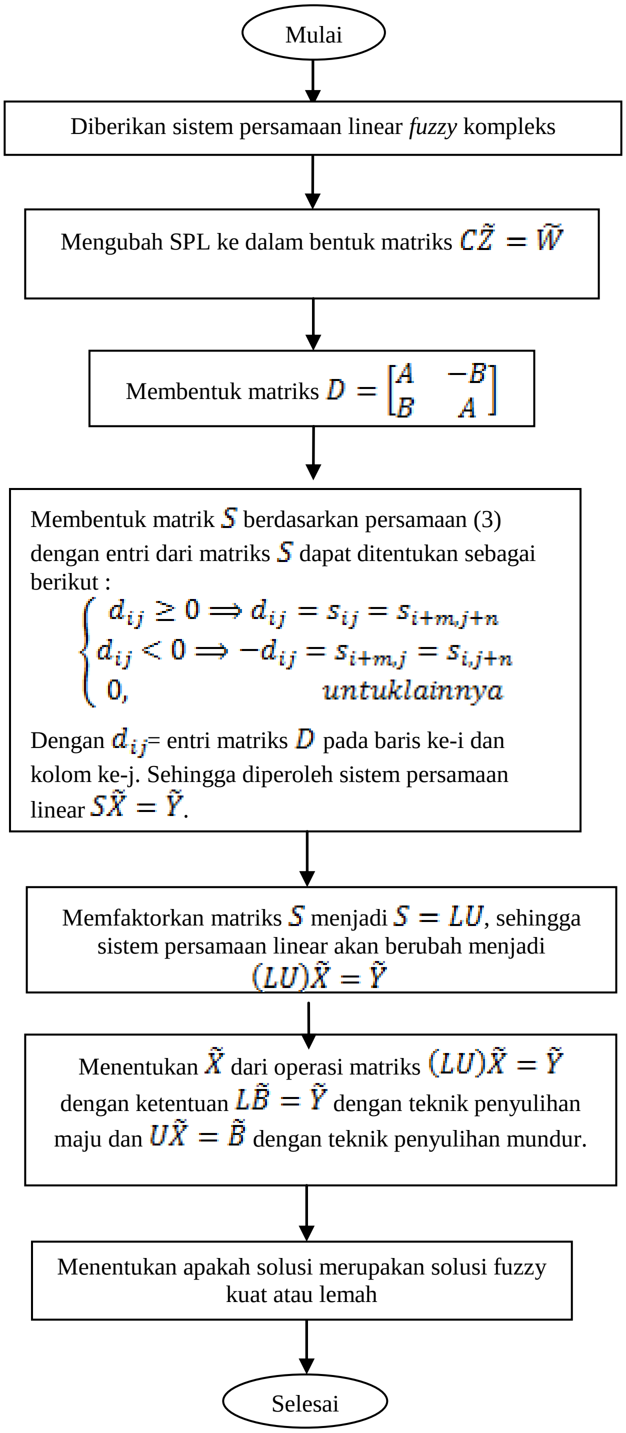
Rumus untuk menghitung entri dari matriks $L$ dan $U$ adalah :

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}; \quad i \leq j, j = 1, \dots, n$$
$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{ii}}; \; j \leq i, i = 1, \dots, n \quad (8)$$

Dengan menyelesaikankan $L\tilde{B} = \tilde{Y}$ menggunakan teknik penyulihan maju dan $U\tilde{X} = \tilde{B}$ menggunakan teknik penyulihan mundur, maka diperoleh nilai $\tilde{X}$.

## METODOLOGI PENELITIAN

Jalannya penelitian dapat ditunjukkan pada Gambar 1 dibawah ini:




**Gambar 1. Flowchart Metodologi Penelitian**

## HASIL DAN PEMBAHASAN

### Penyelesaian Sistem Persamaan Linear *Fuzzy* Kompleks

Sistem persamaan linear fuzzy kompleks pada persamaan (5) bisa ditulis dalam bentuk :

$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} z_j = w_i$ untuk $i = 1,2,\ldots,n.$ (9)

Kita misalkan

$c_{ij} = a_{ij} + ib_{ij}$,

$z_j = p_j + iq_j$, dan

$w_i = u_i + iv_i$

dengan $a_{ij}, b_{ij} \epsilon R$ dan $p_j, q_j, u_i, v_i \epsilon F$.

Sehingga sistem persamaan linear (9) dapat ditulis sebagai berikut :

$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + ib_{ij})(p_j + iq_j) = u_i + iv_i$ (10)

$untuk \;\; i = 1,2,\ldots,n$

Sistem persamaan linear pada persamaan (10) bisa diubah kedalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & -b_{11} & \cdots & -b_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & -b_{21} & \cdots & -b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & -b_{n1} & \cdots & -b_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Untuk menyederhanakan sistem ini, dimisalkan

$V = [v_i] \qquad A = [a_{ij}] \qquad P = [p_j]$

$U = [u_i] \qquad B = [b_{ij}] \qquad Q = [q_j]$

untuk $i, j = 1,2,\ldots,n.$ (12)

Sehingga persamaan (11) dapat dinotasikan dalam bentuk $D\tilde{X} = \tilde{Y}$ dengan

$D = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}, \tilde{X} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ dan $\tilde{Y} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$.

Oleh karena itu, sistem persamaan linear fuzzy kompleks pada persamaan (5) dapat diselesaikan melalui sistem persamaan linear :

$\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$ (13)

Langkah berikutnya adalah mengubah sistem persamaan linear $D\tilde{X} = \tilde{Y}$ menjadi bentuk $S\tilde{X} = \tilde{Y}$ dengan $\tilde{X} = (\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$, $\tilde{Y} = (\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_n, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$ dan $S = (s_{ij}),\; 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 2n$ yang diperoleh dengan ketentuan:

Jurnal Sains, Teknologi dan Industri, Vol. 11, No. 2, Juni 2014, pp. 166 - 174
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

$$\begin{cases} d_{ij} \geq 0 \Longrightarrow d_{ij} = s_{ij} = s_{i+n,j+n} \\ d_{ij} < 0 \Longrightarrow -d_{ij} = s_{i+n,j} = s_{i,j+n} \\ s_{ij} = 0, \qquad\qquad untuk\ lainnya \end{cases}$$

Langkah selanjutnya adalah memfaktorkan matriks $S$ menjadi $S = LU$ menggunakan metode dekomposisi Doolittle, sehingga sistem persamaan linear akan berubah menjadi $(LU)\tilde{X} = \tilde{Y}$. Dan terakhir, menentukan $\tilde{X}$ dari sistem $(LU)\tilde{X} = \tilde{Y}$ dengan ketentuan $L\tilde{B} = \tilde{Y}$ dengan teknik penyulihan maju dan $U\tilde{X} = \tilde{B}$ dengan teknik penyulihan mundur.

Berikut ini akan diberikan contoh penyelesaian sistem persamaan linear fuzzy kompleks yang berukuran $2 \times 2$ dan $3 \times 3$ menggunakan metode dekomposisi Doolittle.

**Contoh 1 : ($m = n = 2$) :**
Diberikan suatu sistem persamaan linear fuzzy kompleks sebagai berikut :

$$(10 - 7.5i)x_1 - (6 - 5i)x_2 = (4 + r, 6 - r) - i(-1 + r, 1 - r)$$
$$(-6 + 5i)x_1 + (16 + 3i)x_2 = (-2 + r, -r) + i(-3 + r, -1 - r)$$

$$\begin{bmatrix} 10 - 7.5i & -6 + 5i \\ -6 + 5i & 16 + 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4 + r, 6 - r) - i(-1 + r, 1 - r) \\ (-2 + r, -r) + i(-3 + r, -1 - r) \end{bmatrix}$$

Kemudian tentukan matriks $A, B, U, V, P$ dan $Q$ berdasarkan persamaan (12). Diperoleh :

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 16 \end{bmatrix}$$
$$B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} -7.5 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$
$$U = [u_i] = \begin{bmatrix} (4 + r, 6 - r) \\ (-2 + r, -r) \end{bmatrix}$$
$$V = [v_i] = \begin{bmatrix} (-1 + r, 1 - r) \\ (-3 + r, -1 - r) \end{bmatrix}$$

$$P = [p_j] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
$$Q = [q_j] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, ubah sistem persamaan linear fuzzy kompleks di atas dalam bentuk $D\tilde{X} = \tilde{Y}$ dengan $D = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}, \tilde{X} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ dan $\tilde{Y} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$.

Sehingga diperoleh sistem persamaan linear fuzzy kompleks berikut.

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -6 & 7.5 & -5 \\ -6 & 16 & -5 & -3 \\ -7.5 & 5 & 10 & -6 \\ 5 & 3 & -6 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + r, 6 - r \\ -2 + r, -r \\ -1 + r, 1 - r \\ -3 + r, -1 - r \end{bmatrix}$$

Kemudian mencari matriks $S$ berdasarkan Persamaan (4), diperoleh :

$$S = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 7.5 & 0 & 0 & -6 & 0 & -5 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & -6 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & 10 & 0 & -7.5 & 0 & 0 & -6 \\ 5 & 3 & 0 & 16 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ -6 & -6 & 0 & -5 & 10 & 0 & 7.5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ -7.5 & 0 & 0 & -6 & 0 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 5 & 3 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Kemudian faktorkan matriks $S$ di atas menjadi matriks $L$ dan $U$ menggunakan dekomposisi Doolittle, diperoleh :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3125 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.1875 & -0.375 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.375 & 0 & -0.3125 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0 & -0.05 & -0.1875 & -0.0626 & 1 & 0 & 0 \\ -0.75 & 0 & 0.5625 & -0.375 & 0.3755 & 0.0977 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.2183 & 0.2147 & 0.0205 & 1 \end{bmatrix} \text{dan}$$

$$U = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 7.5 & 0 & 0 & -6 & 0 & -5 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & -6 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & -5.625 & 0 & 1.5615 & -5.0625 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & -0.9843 & 3 & -4.4761 & 1.1641 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7.4424 & 09375 & 4.2261 & -0.7612 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13.0212 & -0.4967 & -0.0825 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.9039 & 0.1214 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13.7879 \end{bmatrix}$$

Kemudian cari nilai $\tilde{B}$ menggunakan teknik penyulihan maju dari bentuk $L\tilde{B} = Y$.

Sehingga diperoleh matriks

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 4 + r \\ -2 + r \\ -0.3750 + 0.6875r \\ -4.7656 + 0.5703r \\ 3.7607 - 0.4468r \\ 1.7230 - 0.2867r \\ 0.8434 - 0.2270r \\ -2.4332 - 0.4237r \end{bmatrix}$$

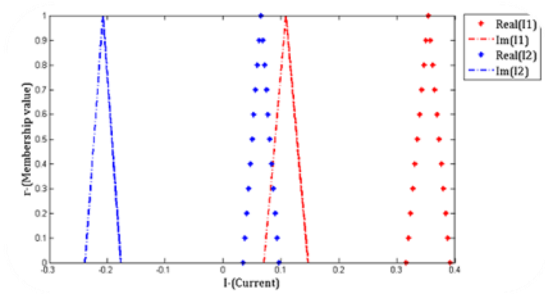
Selanjutnya mencari nilai $\tilde{X}$ dengan teknik penyulihan mundur dari bentuk $U\tilde{X} = \tilde{B}$.
Sehingga diperoleh matriks

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} 0.3163 + 0.0379r \\ 0.0347 + 0.0307r \\ 0.0708 + 0.0378r \\ -0.2379 + 0.0307r \\ 0.3920 - 0.0379r \\ 0.0961 - 0.0307r \\ 0.1465 - 0.0378r \\ -0.1765 - 0.0307r \end{bmatrix}$$

Jadi, penyelesaian sistem persamaan linear fuzzy kompleks diperoleh sebagai berikut :

$$\tilde{x}_1 = (0.3163 + 0.0379r, 0.3920 - 0.0379r) + i(0.0708 + 0.0378r, 0.1465 - 0.0378r)$$
$$\tilde{x}_2 = (0.0347 + 0.0307r, 0.0961 - 0.0307r) + i(-0.2379 + 0.0307r, -0.1765 - 0.0307r)$$

Solusi sistem persamaan linear fuzzy kompleks ini dapat dinyatakan dengan bilangan fuzzy segitiga seperti terlihat pada Gambar 2. Oleh karena itu, berdasarkan Definisi 2, solusi ini merupakan solusi fuzzy kuat.




**Gambar 2. Solusi untuk sistem persamaan dari contoh 1**

**Contoh 2 : $(m = n = 3)$**

Diberikan suatu sistem persamaan linear fuzzy kompleks sebagai berikut :

$$(2+3i)x_1 + (5+2i)x_2 + (3-2i)x_3 = (1+5r, 3+6r) + i(1+8r, 6+5r)$$
$$(7-4i)x_1 + (8+2i)x_2 + (1-4i)x_3 = (2+3r, 4+3r) + i(-2+4r, 8+2r)$$
$$(5-5i)x_1 + (6-2i)x_2 - (3-5i)x_3 = (2+4r, 2+7r) + i(3-5r, -4+3r)$$

Selesaikan sistem persamaan linear fuzzy kompleks di atas menggunakan metode dekomposisi Doolittle!

**Penyelesaian :**

Sistem persamaan linear fuzzy kompleks di atas dapat dibuat dalam bentuk matriks berikut :

$$C\tilde{Z} = \tilde{W}$$

$$\begin{bmatrix} 2+3i & 5+2i & 3-2i \\ 7-4i & 8+2i & 1-4i \\ 5-5i & 6-2i & 3-5i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+5r, 3+6r) + i(1+8r, 6+5r) \\ (2+3r, 4+3r) + i(-2+4r, 8+2r) \\ (2+4r, 2+7r) + i(3-5r, -4+3r) \end{bmatrix}$$

Kemudian akan ditentukan matriks $A, B, U, V, P$ dan $Q$ berdasarkan persamaan (12).

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 1 \\ 5 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & -4 \\ -5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$U = [u_i] = \begin{bmatrix} (1+5r, 3+6r) \\ (2+3r, 4+3r) \\ (2+4r, 2+7r) \end{bmatrix}$$

$$V = [v_i] = \begin{bmatrix} (1+8r, 6+5r) \\ (-2+4r, 8+2r) \\ (3-5r, -4+3r) \end{bmatrix}$$

$$P = [p_j] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$Q = [q_j] = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, ubah sistem persamaan linear fuzzy kompleks di atas dalam bentuk $D\tilde{X} = \tilde{Y}$ dengan $D = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$, $\tilde{X} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ dan $\tilde{Y} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$ Sehingga diperoleh sistem persamaan linear fuzzy kompleks berikut.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & -3 & -2 & 2 \\ 7 & 8 & 1 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 6 & -3 & 5 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & -2 & 2 & 5 & 3 \\ -4 & 2 & -4 & 7 & 8 & 1 \\ -5 & -2 & 5 & 5 & 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+5r, 3+6r) \\ (2+3r, 4+3r) \\ (2+4r, 2+7r) \\ (1+8r, 6+5r) \\ (-2+4r, 8+2r) \\ (3-5r, -4+3r) \end{bmatrix}$$

Kemudian mencari matriks $S$ berdasarkan persamaan (4), diperoleh :

Kemudian faktorkan matriks $S$ di atas menjadi matriks $L$ dan $U$ menggunakan dekomposisi Doolittle, diperoleh :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.5 & 0.68 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 0.57 & -0.87 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.21 & 1.91 & 2.05 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.8 & 9.37 & 4.93 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.76 & -1.02 & -0.14 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.03 & -368 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.88 & 3.85 & 3.29 & 0.42 & -599 & 1.62 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.92 & -2.57 & -1.39 & -0.32 & 363.5 & -0.98 & -0.78 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1.05 & 7.66 & -7.8 & -3.86 & -1.05 & -0.5 & 0.0013 & 0.29 & -7.73 & 1 & 0 \\ -2.5 & -1.1 & 2.83 & -1.2 & -0.25 & -0.17 & -75 & 0.202 & 0.92 & -8.39 & 1.004 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -9.5 & -9.5 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 10.5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1.04 & 2.28 & 2 & -2.96 & 0 & 0 & -3 & 0.36 & 1.6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1.7 & 6.74 & -0.86 & 0 & 0 & -4.61 & -1.17 & 1.54 & -4.35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9.63 & 7.78 & -4 & 0 & 11.18 & 3.91 & -5.15 & 18.46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -44.5 & 14.72 & -2 & -26.32 & -6.59 & 18.64 & -77.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.02 & 4.72 & 2.61 & 1.01 & 0.06 & 2.36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1745.02 & 960.03 & 375.09 & 22.56 & 871.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.8 & -4.28 & 0 & 4.18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.24 & 4.98 & 2.12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 47.21 & 10.73 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.48 \end{bmatrix}$$

Kemudian cari nilai $\tilde{B}$ menggunakan teknik penyulihan maju $L\tilde{B} = Y$. Sehingga diperoleh matriks $\tilde{B}$ sebagai berikut.

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 + 5r \\ -1.5 - 14.5r \\ 0.52 + 1.36r \\ 0.8 + 9.94r \\ -4.94 - 22r \\ 22.35 + 16.82r \\ 2.49 + 3.4r \\ 920.63 + 1258.1r \\ 4.39 + 28.63r \\ 7.78 + 22.09r \\ 74.7 + 159.16r \\ -13.31 + 5.06r \end{bmatrix}$$

Selanjutnya mencari nilai $\tilde{X}$ dengan teknik penyulihan mundur dari bentuk $U\tilde{X} = \tilde{B}$. Sehingga diperoleh matriks $\tilde{X}$ sebagai berikut.

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} -1.76 + 1.48r \\ -2.08 + 0.73r \\ 0.27 - 1.22r \\ 3.05 - 0.44r \\ -2.25 + 1.61r \\ 5.74 - 0.98r \\ 1 + 0.5r \\ 2.08 + 0.27r \\ 0.75 + 1.06r \\ -2.38 - 3.41r \\ 2.25 + 3.11r \\ -2.97 + 1.12r \end{bmatrix}$$

Jadi, penyelesaian sistem persamaan linear fuzzy kompleks diperoleh sebagai berikut :

$\tilde{x}_1 = (-1.76 + 1.48r, 1 + 0.5r) + i(3.05 - 0.44r, -2.38 - 3.41r)$

$\tilde{x}_2 = (-2.08 + 0.73r, 2.08 + 0.27r) + i(-2.25 + 1.61r, 2.25 + 3.11r)$

$\tilde{x}_3 = (0.27 - 1.22r, 0.75 + 1.06r) + i(5.74 - 0.98r, -2.97 + 1.12r)$

Berdasarkan Definisi 2, solusi ini termasuk solusi fuzzy lemah karena tidak berupa bilangan fuzzy segitiga.

## KESIMPULAN DAN SARAN

### Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa metode dekomposisi Doolittle dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear fuzzy kompleks.

Dari Contoh 1 diperoleh solusi sebagai berikut.

$\tilde{x}_1 = (0.3163 + 0.0379r, 0.3920 - 0.0379r) + i(0.0708 + 0.0378r, 0.1465 - 0.0378r)$

$\tilde{x}_2 = (0.0347 + 0.0307r, 0.0961 - 0.0307r) + i(-0.2379 + 0.0307r, -0.1765 - 0.0307r)$

Solusi ini merupakan solusi fuzzy kuat. Sedangkan dari Contoh 2 diperoleh solusi fuzzy lemah sebagai berikut.

$\tilde{x}_1 = (-1.76 + 1.48r, 1 + 0.5r) + i(3.05 - 0.44r, -2.38 - 3.41r)$

$\tilde{x}_2 = (-2.08 + 0.73r, 2.08 + 0.27r) + i(-2.25 + 1.61r, 2.25 + 3.11r)$

$\tilde{x}_3 = (0.27 - 1.22r, 0.75 + 1.06r) + i(5.74 - 0.98r, -2.97 + 1.12r)$

### Saran

Pada penelitian ini, penulis menggunakan metode dekomposisi Doolittle untuk menyelesaikan sistem persamaan linear fuzzy kompleks. Bagi pembaca yang berminat melanjutkan penelitian ini disarankan untuk dapat menggunakan metode lain untuk menyelesaikan sistem persamaan linear fuzzy kompleks.

## DAFTAR PUSTAKA

Arezoo Hosseinpour, dan Leila Abbasadi. (2012). *"Solving Non Square Fuzzy Linear System by Use of the Generalized Inverse"*, Januari, 7-8.

Howard, Anton. (2000). *"Elementary Linear Algebra"*, Eighth Edition. John Wiley, New York.

M. Mosleh, dan M. Otadi. (2010). *"Regular Splitting Method for Approximating Linear System of Fuzzy Equation".Int. J. Contemp. Math. Science*, Vol. 5, No. 6, 263-274.

Marni, Sabrina Indah. (2013). *"Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Fuzzy Menggunakan Metode Dekomposisi Nilai Singular (SVD)"*, Pekanbaru.

Rahgooy, Taher dkk. (2009 ).*"Fuzzy Complex System of Linear Equations Applied to Circuit Analysis"*.Vol.1, No.5, December.

Syafrina. (2013). *"Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Fuzzy Kompleks Menggunakan Metode Dekomposisi QR"*, Pekanbaru.

Beta Norita. (2008). "*Sistem Persamaan Linear Fuzzy*". Vol. 11, No.2, Program Studi Ilmu Komputer, 9499, ISSN: 1410-8518, Agustus 2008, Semarang.