APROKSIMASI METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL HIPERBOLIK LINEAR

Wartono, Yuslenita Muda
Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi UIN SUSKA RIAU
e-mail : wartono@uin-suska.ac.id, ilen_77@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Pada kertas kerja ini, kami menyelidiki hampiran penyelesaian semi analitik persamaan diferensial hiperbolik dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian. Pendekatan penyelesaian eksplisit diperoleh dengan mengubah persamaan diferensial hiperbolik ke bentuk deret $u(x,\ t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa, metode dekomposisi Adomian cukup efektif untuk menghampiri penyelesaian eksak.

Kata kunci: metode dekomposisi, persamaan diferensial hiperbolik, Adomian,

ABSTRACT

In this paper, we investigate the approximation of semi analytically solution for hyperbolic differential equation by using Adomian Decomposition method. We obtained a approximation of explicit solution by changing the hyperbolic differential equation to the series $u(x,\ t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$ *. The result showed that Adomian decomposition metod effectively to approximate the exact solution.*

Keyword : *Decomposition method, hiperbolic differential equation, Adomian*

PENDAHULUAN

Metode dekomposisi diperkenalkan pertama kali oleh Adomian (1989,1994) yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan-persamaan fungsional linear dan nonlinear, seperti persamaan diferensial aljabar, persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial parsial, persamaan diferensial integral, yang selanjutnya disebut metode dekom-posisi Adomian. Metode dekom-posisi Adomian merupakan penyelesaian semi analitik yang melibatkan komputasi, akurasi dan hampiran terhadap persa-maan operator deterministik dan stokastik baik linear maupun non linear, dengan melibatkan sedikit perhitungan komputer. Tidak seperti metode perhitungan konve-sional lainnya, metode dekomposisi Adomian tidak melibatkan diskritisasi, linearisasi, transformasi atau gangguan(Adomian, 1994).

Perkembangan terkini pada persoalan fisika matematika, seperti masalah mate-matika terapan, teknik dan rekayasa dan bidang-bidang lain seperti biomatematik dan astrofisika, di mana persamaan diferensial parsial dibutuhkan untuk menyelesaikan permasalahan.

Tujuan dari kertas kerja ini adalah menentukan penyelesaian persamaan dife-rensial hiperbolik berdasarkan masalah nilai batas dan nilai awal.

Dita dan Grama (2008) mengkaji tentang metode dekomposisi Adomian untuk menyelesaian persamaan fungsi khusus, seperti: persamaan fungsi Hipergeometri Gauss, Persamaan Hipergeometri Konfluent; Polinomial Bessel dan Persamaan Integral

Volterra, dan diperoleh hasil-hasil penyelesaian dalam bentuk operator diferensial.

Selanjutnya, Mustafa (2005) membandingkan metode dekomposisi Adomian dengan beberapa metode penyelesaian konveksional lainnya, seperti metode Wavelet-Galerkin (WGM), metode selisih hingga (FTCS), metode Crank-Nicholson (C-N), dan menunjukkan bahwa metode dekomposisi Adomian lebih efektif dibandingan dengan metode lainya. Kaya (2002) menyelidiki penyelesaian persamaan diferensial nonlinear khusus dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian, Kaya dan Mustafa (1999) mengkaji metode dekomposisi Adomian terhadap persamaan gelombang nonlinear dan membandingkannya dengan penyelesaian eksak.

Secara umum persamaan diferensial hiperbolik diberikan oleh,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \phi(x,t), \text{ untuk } 0 < t < 1 \qquad (1)$$

dengan syarat batas

$$u(0, t) = 0,\ u(1, t) = 0$$

dan syarat awal

$$u(x,0) = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

Metode dekomposisi Adomian akan digunakan untuk menyelesaian persamaan diferensial hiperbolik linear, dan selanjutnya akan dibandingkan dengan penyelesaikan eksaknya.

BAHAN DAN METODE

Metode Dekomposisi Adomian

Pertimbangkan kembali persamaan (1) yang ditulis dalam bentuk,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \phi(x,t) + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

atau,

$$u_{tt}(x,t) = \phi(x,t) + \alpha^2 u_{xx}(x,t) \qquad (2)$$

dengan $u_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t)$ dan $u_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$.

Jika diasumsikan bahwa invers operator diferensial L_{tt}^{-1} ada, dan merupakan integral ganda terhadap *t* dari 0 sampai *t*, yaitu

$$L_{tt}^{-1}(\cdot) = \int_0^t \int_0^t (\cdot)\, dt\, dt$$

Selanjutnya, dengan menerapkan invers operator ke dalam persamaan (2) diperoleh

$$L_{tt}^{-1} u_{tt}(x,t) = L_{tt}^{-1}\phi(x,t) + \alpha^2 L_{tt}^{-1} u_{xx}(x,t)$$

atau

$$u(x,t) = u(x,0) + u_t(x,0)t + L_{tt}^{-1}\phi(x,t) + \alpha^2 L_{tt}^{-1} u_{xx}(x,t) \qquad (3)$$

Berdasarkan syarat awal $u(x,0) = f(x)$ dan $u_t(x,0) = g(x)$, maka persamaan (3) menjadi

$$u(x,t) = f(x) + g(x)t + L_{tt}^{-1}\phi(x,t) + \alpha^2 L_{tt}^{-1} u_{xx}(x,t) \qquad (4)$$

Metode dekomposisi memuat komposing fungsi-fungsi tak diketahui $u(x,t)$ ke dalam jumlah komponen yang didefinisikan sebagai deret dekomposisi,

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$

Oleh karena itu diperoleh,

$$u_0(x,t) = f(x) + g(x)t + L_{tt}^{-1}\phi(x,t) \qquad (5)$$

Selanjutnya, dengan memasukan syarat awal pada *x* diperoleh

dan selanjutnya,

$$u_1(x,t) = \alpha^2 L_{tt}^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0\right) = \alpha^2 \left(\frac{t^2}{2!}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0$$

$$u_2(x,t) = \alpha^2 L_{tt}^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1\right) = \alpha^2 \left(\frac{t^4}{4!}\right) \frac{\partial^4}{\partial x^4} u_0$$

$$u_3(x,t) = \alpha^2 L_{tt}^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2\right) = \alpha^2 \left(\frac{t^6}{6!}\right) \frac{\partial^6}{\partial x^6} u_0$$

$$\vdots$$

$$u_{n+1}(x,t) = \alpha^2 L_{tt}^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_n\right)$$
$$= \left(\frac{t^{2(n+1)}}{2(n+1)!}\right)\frac{\partial^{2(n+1)}}{dx^{2(n+1)}}u_0\ ,\ n \geq 0$$

Jika $\phi(x,t) = 0$, maka persamaan (2) adalah persamaan homogen sehingga persamaan (2) menjadi

$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) \qquad (6)$$

Berdasarkan syarat awal $u(x,0) = f(x)$ dan $u_t(x,0) = g(x)$, maka persamaan (3) menjadi

$$u(x,t) = f(x) + g(x)t + \alpha^2 L_{tt}^{-1}u_{xx}(x,t) \quad (7)$$

Oleh karena itu

$$u_0(x,t) = f(x) + g(x)t$$

dan

$$u_1(x,t) = \alpha^2 L_{tt}^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0\right) = \alpha^2\left(\frac{t^2}{2!}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0$$

$$u_2(x,t) = \alpha^2 L_{tt}^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1\right) = \alpha^2\left(\frac{t^4}{4!}\right)\frac{\partial^4}{\partial x^4}u_0$$

$$u_3(x,t) = \alpha^2 L_{tt}^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_2\right) = \alpha^2\left(\frac{t^6}{6!}\right)\frac{\partial^6}{\partial x^6}u_0$$

$$\vdots$$

$$u_{n+1}(x,t) = \alpha^2 L_{tt}^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_n\right)$$
$$= \left(\frac{t^{2(n+1)}}{2(n+1)!}\right)\frac{\partial^{2(n+1)}}{dx^{2(n+1)}}u_0\ ,\ n \geq 0$$

Pada saat nilai suku-suku u_0, u_1, u_2, … diketahui, maka penyelesaian eksak dapat diperoleh dengan menggunakan hampiran

$$u(x, t) = \lim_{n\to\infty}\Phi_n(x, t)$$

dengan

$$\Phi_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1}u_k(x,t)$$

Akurasi pendekatan metode Dekomposisi Adomian yang melibatkan jumlah suku-sukunya ditunjukkan dengan nilai galat yang didefinisikan oleh

$$e = |\ u(x, t) - \Phi(x, t)|$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

a. Homogen

Untuk menunjukkan keakurasikan metode dekomposisi Adomian, kami pertimbangkan contoh dengan diketahui penyelesaian eksaknya.

Pertimbangkan persamaan hiperbolik berikut.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\ ,\ 0 < t < 1 \qquad (6)$$

berdasarkan

$$\text{syarat batas}\ \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases}$$

dan

syarat awal

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin(\pi x) + \frac{1}{3}\sin(3\pi x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Bentuk persamaan (6) dapat diubah dalam bentuk operator diferensial,

$$u_{tt} = u_{xx}$$

dan dengan menerapkan invers operator diferensial $L_{tt}^{-1}(\cdot) = \int_0^t\int_0^t(\cdot)dtdt$, diperoleh

$$u(x,t) = u(x,0) + u_t(x,0)t + L_{tt}^{-1}u_{xx} \qquad (7)$$

Berdasarkan syarat awal, maka persamaan (7) menjadi,

$$u(x,t) = \sin(\pi x) + \tfrac{1}{3}\sin(3\pi x) + L_{tt}^{-1}u_{xx}$$

Oleh karena itu, diperoleh,

$$u_0 = \sin(\pi x) + \tfrac{1}{3}\sin(3\pi x)$$

dan selanjutnya

$$u_1 = L_{tt}^{-1}L_{xx}u_0 = \left(\frac{t^2}{2!}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sin(\pi x) + \tfrac{1}{3}\sin(3\pi x))$$
$$= -\frac{t^2}{2!}\left(\pi^2\sin(\pi x) + \tfrac{1}{3}(3\pi)^2\sin(3\pi x)\right)$$

$$u_2 = \frac{t^4}{4!}\left(\pi^4\sin(\pi x) + \tfrac{1}{3}(3\pi)^4\sin(3\pi x)\right)$$

$$u_3 = \frac{t^6}{6!}\left(\pi^6\sin(\pi x) + \tfrac{1}{3}(3\pi)^6\sin(3\pi x)\right)$$

$$\vdots$$

atau

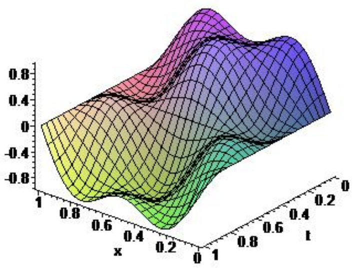
$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$
$$= \sin(\pi x) + \tfrac{1}{3}\sin(3\pi x) + $$
$$-\frac{t^2}{2!}\left(\pi^2\sin(\pi x) + \tfrac{1}{3}(3\pi)^2\sin(3\pi x)\right)$$
$$+\frac{t^4}{4!}\left(\pi^4\sin(\pi x) + \tfrac{1}{3}(3\pi)^4\sin(3\pi x)\right)$$
$$+ \ldots$$
$$= \sin(\pi x)\left(1-\frac{t^2\pi^2}{2!}+\frac{t^4\pi^4}{4!}-\frac{t^6\pi^6}{6!}+\cdots\right)$$
$$+ \tfrac{1}{3}\sin(3\pi x)$$
$$\left(1-\frac{t^2(3\pi)^2}{2!}+\frac{t^4(3\pi)^4}{4!}-\frac{t^6(3\pi)^6}{6!}+\cdots\right)$$

Berdasarkan hasil yang diperoleh, menujukkan bahwa bentuk deret pangkat yang terlibat pada penyelesaian tersebut merupakan ekspansi deret terhadap fungsi cosinus.

Penyelesaian eksak persamaan (6) adalah

$$u(x,t) = \cos(\pi t)\sin(\pi x) + \tfrac{1}{3}\cos(3\pi t)\sin(3\pi x) \qquad (8)$$

dan grafik $u(x, t)$ diberikan pada Gambar 1 untuk $0 \le x \le 1, 0 \le t \le 1$,



Gambar 1. Grafik penyelesaian persamaan (6) untuk $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le 1$,

Untuk melihat seberapa efektif metode dekomposisi Adomian menghampiri penyelesaian eksak, dapat dilihat dari galat yang diperoleh pada setiap suku-suku yang dilibatkan.

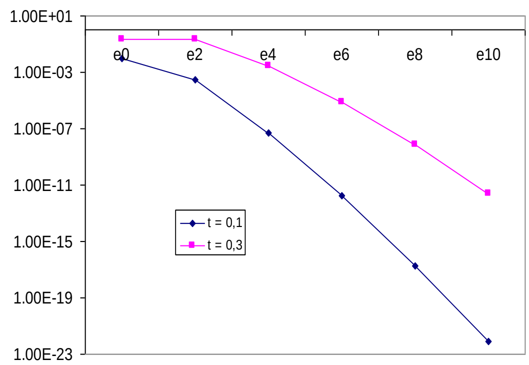
Hasil komputasi pendekatan metode dekomposisi Adomian dilakukan menggunakan Maple 7 dengan ketelitian sebesar 30 digit ditunjukkan pada Tabel 1 dan melibatkan Φ_0, Φ_2, Φ_4, Φ_6, Φ_8, dan Φ_{10} pada $x = 0{,}5$.

Berdasarkan Tabel 1 diperoleh bahwa ketelitian galat pada $t = 0{,}1$ dan $t = 0{,}3$ yang bergerak secara logaritmik. Hal ini menunjukkan bahwa, metode dekomposisi Adomian dianggap cukup efektif untuk menghampiri penyelesain persamaan nonlinear. Jika diberikan toleransi galat sebesar 10^{-7}, maka cukup dengan menggunakan Φ_6 untuk t = 0,3 dan Φ_6 untuk t = 0,3 , maka hasil penyelesaian hampiran dianggap cukup dekat dengan penyelesaian eksaknya.

Tabel 1. Galat pada setiap suku-suku yang terlibat pada deret di $x = 0{,}5$

Galat	**t = 0,1**	**t = 0,3**
e_0	$0{,}88461432\ 10^{-2}$	$0.23813742\ 10^{0}$
e_2	$0{,}31803971\ 10^{-3}$	$0{,}20463781\ 10^{0}$
e_4	$0{,}50452969\ 10^{-7}$	$0{,}28253482\ 10^{-2}$
e_6	$0{,}16621117\ 10^{-11}$	$0{,}77202868\ 10^{-5}$
e_8	$0{,}17881485\ 10^{-16}$	$0{,}68002622\ 10^{-8}$
e_{10}	$0{,}80422671\ 10^{-22}$	$0{,}24916471\ 10^{-11}$

Untuk memperjelas bagaimana galat bergerak, maka nilai-nilai galat pada Tabel 1 di plot pada Gambar 2.



Gambar 2. Grafik kecepatan galat untuk t = 0,1 dan t = 0,3

b. Nonhomogen

Persamaan (6) dikatakan nonhomogen jika $\phi(x,t) \neq 0$. Selanjutnya pertimbangkan kembali persamaan nonhomogen berikut.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \phi(x,t) \tag{9}$$

Jika diberikan $\alpha^2 = 1$ dan $\phi(x, t) = x^2e^t + 1$, maka persamaan (6) menjadi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^4 e^t + 1, \tag{10}$$

untuk $t > 0$, $0 < t < 1$

berdasarkan

$$\text{syarat batas } \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases}$$

dan

$$\text{syarat awal } \begin{cases} u(x,0) = \sin(x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

dan dengan menerapkan invers operator diferensial $L_{tt}^{-1}(\cdot) = \int_0^t \int_0^t (\cdot) dt dt$, diperoleh

$$u(x,t) = u(x,0) + u_t(x,0)t + L_{tt}^{-1}\phi(x,t) + L_{tt}^{-1}u_{xx} \tag{11}$$

atau

$$u(x,t) = \sin(x) + L_{tt}^{-1}x^2e^t + L_{tt}^{-1}u_{xx}$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$u_0 = \sin(x) + L_{tt}^{-1}(x^2e^t + 1)$$

atau

$$u_0 = \sin(x) + x^2e^t + \frac{t^2}{2!}$$

sehingga

$$\begin{aligned} u_1 &= L_{tt}^{-1}L_{xx}u_0 \\ &= L_{tt}^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sin(x) + x^2e^t + \frac{t^2}{2!}\right)\right) \\ &= -\frac{t^2}{2!}\sin(x) + 2e^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= L_{tt}^{-1}L_{xx}u_1 \\ &= L_{tt}^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{t^2}{2!}\sin(x) + 2e^t\right)\right] \\ &= \frac{t^4}{4!}\sin(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= L_{tt}^{-1}L_{xx}u_2 \\ &= L_{tt}^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{t^4}{4!}\sin(x)\right)\right] \\ &= -\frac{t^6}{6!}\sin(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Oleh karena penyelesaian persamaan (7) merupakan penjumlahan dari suku-suku deret sehingga diperoleh

$$u(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

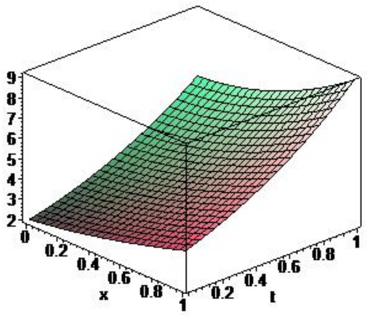
Akurasi pendekatan Metode Dekomposisi Adomian bergantung kepada suku-suku yang dilibatkan,

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= u_0 \\ &= \sin(x) + x^2e^t + \frac{t^2}{2!} \\ \Phi_1 &= u_0 + u_1 \\ &= \sin(x) + x^2e^t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^2}{2!}\sin(x) \\ &\quad + 2e^t \\ \Phi_2 &= u_0 + u_1 + u_2 \\ &= \sin(x) + x^2e^t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^2}{2!}\sin(x) \\ &\quad + 2e^t + \frac{t^4}{4!}\sin(x) \\ \Phi_3 &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \\ &= \sin(x) + x^2e^t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^2}{2!}\sin(x) \\ &\quad + 2e^t + \frac{t^4}{4!}\sin(x) - \frac{t^6}{6!}\sin(x) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Penyelesaian persamaan (10) adalah

$$u(x, t) = \sin(x)\cos(t) + (x^2 + 2)e^t + \frac{t^2}{2!}$$

dan grafik persamaan u(x, t) diberikan pada Gambar 3 untuk $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le 1$,



Gambar 3. Grafik penyelesaian persamaan (10) untuk $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le 1$,

Untuk mengetahui efektifitas dan efesiensi pendekatan yang dilakukan oleh metode dekomposisi Adomian dapat dilihat dari ketelitian galat yang dihasilkan.

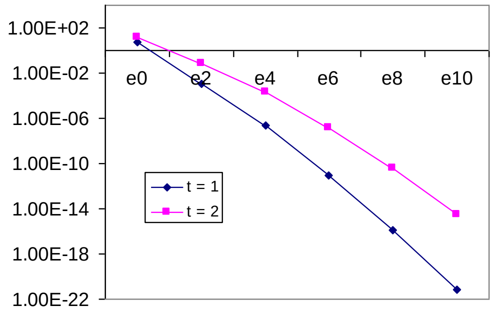
Tabel 2 menujukkan nilai-nilai galat untuk t = 1 dan t = 2, dan berdasarkan Tabel 2, dapat dilihat bahwa galat yang dihasilkan baik pada t = 1 maupun t = 2 bergerak secara logaritmik. Hal ini menunjukkan bahwa, metode dekomposisi Adomian cukup efektif menghampiri penyelesaian eksaknya.

Jika diberikan ketelitian pendekatan sebesar 10^{-9}, maka hanya dibutuhkan sebanyak 6 suku untuk t = 1 dan 8 suku untuk dianggap penyelesaian hampiran cukup dekat dengan penyelesaian eksaknya.

Tabel 2. Galat pada setiap suku-suku yang terlibat pada deret di x = 1

Galat	$t = 1$	$t = 2$
e_0	0,50497413 10^{+1}	0.13586466 10^{+2}
e_2	0,11480700 10^{-2}	0,69685160 10^{-1}
e_4	0,23013973 10^{-6}	0,23041215 10^{-3}
e_6	0,96122127 10^{-11}	0,15554165 10^{-6}
e_8	0,13108597 10^{-15}	0,34094318 10^{-10}
e_{10}	0,74728503 10^{-21}	0,31174058 10^{-14}

Untuk lebih menperjelas pergerakan galat pada Tabel 2, maka nilai-nilai galat pada Tabel 2 diplot pada Gambar 4.



Gambar 4. Grafik pergerakan kecepatan galat untuk t = 1 dan t = 2

KESIMPULAN DAN SARAN

Pada kertas kerja ini, metode dekomposisi Adomian digunakan untuk menentukan aproksimasi penyelesaian persamaan diferensial hiperbolik berdasarkan syarat batas dan syarat awal.

Hasil pendekatan yang dilakukan metode dekomposisi Adomian terhadap persamaan hiperbolik memberikan gambaran pergerakan nilai-nilai galat secara logaritmik, baik pada persamaan homogen maupunn nonhomogen.

Berdasarkan hasil kajian diperoleh bahwa metode dekomposisi Adomian cukup efektif dan akurat untuk menyelesaian persaoalan persamaan diferensial baik yang homogen maupun nonhomogen.

DAFTAR PUSTAKA

Adomian, G., 1994, *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, Kluwer Academic, Dordrecht.

Bellman, R & Adomian, G., 1985, *Partial Differential Equations: New Methods for Their Treatment and Solution*, D Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Celik, *et*. *al*. 2006. Solution of Differential-Algebraic Equations (DAEs) by Adomian Decomposition Method, *Int. Journal Pure and Applied Math. Sci*. **3**(1):93-100.

Kaya, D. 2002. The Use of Adomian Decomposition Method for Solving a Specific Nonlinear Partial Differential Equations, *Bull. Belg. Math. Soc*. **9** : 343-349.

Kaya, D & Mustafa., 1999. On the Solution of the Nonlinear Wave Eequation by the Decomposition Method, *Bull. Of the Malaysian Math. Society*, **22**: 151-155.

Mustafa, 2005. Decomposition Methods for Solving Parabolic Equation in Finite Domains, *Journal of Ahejiang Univ. Sci*. **6A**(10):1058-1064.

Nagle, R. K & Saff, E. B., 1993, *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*, Addison-Wesley Inc., New York.