METODE ITERASI BARU UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Supriadi Putra[1], Ria Kurniawati[2]
[1]Laboratorium Matematika Terapan Jurusan Matematika
[2]Program Studi S1 Matematika, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293)
sputra@unri.ac.id

ABSTRAK

Kita akan mendiskusikan sebuah metode iterasi baru untuk menyelesaikan persamaan nonlinear satu variabel. Tulisan yang sama telah dilakukan sebelumnya oleh Eskandari, H. *World Academy of Science, Engineering and Technology* 44, 196-199 (2008). Akan tetapi disini akan dibuktikan orde kekonvergenan dari metode yang belum dilakukan oleh Eskandari. Perbandingan komputasi dari beberapa metode yang dibahas akan diberikan dengan memperhatikan jumlah iterasi, dan COC (*Computational Order of Convergence*) atau perhitungan orde konvergensi secara komputasi.

Kata Kunci: Metode Hybrid, Metode Newton, Metode Iterasi Baru.

ABSTRACT

We discuss a new iteration method to solve a nonlinear equation of one variable. The same work has been done by Eskandari, H. World Academy of Science, Engineering and Technology 44, 196-199 (2008). Here we prove the order of convergence of the method that is not performed by Eskandari. Comparison among the discussed methods is also given by considering number of iteration and COC (Computational Order of Convergence).

Key Words: *Hybrid method, Newton's method, New iteration method.*

PENDAHULUAN

Menentukan akar dari suatu persamaan nonlinear satu variabel,

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

adalah topik yang selalu dibahas dalam mata kuliah metode numerik, karena masalah ini mencul dari berbagai masalah sains yang memerlukan penyelesaian secara matematik. Metode analitik yang tersedia dalam menyelesaikan masalah nonlinear ini sangat terbatas kemampuannya, maka peneliti mengembangkan metode aproksimasi.

Metode Newton adalah metode yang sangat popular untuk mengaproksimasi akar persamaan nonlinear (1). Dalam penerapan-nya metode ini memerlukan satu tebakan awal, katakan x_0, dan iterasinya dinyatakan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (2)$$

Metode ini mensyaratkan bahwa $f'(x_0) \neq 0,$ agar metode dapat diterapkan dan konvergen secara kuadratik (Conte, 1980; Weerakoon, 2000).

Ide pengembangan metode Newton ini adalah penggunaan garis lurus yang menyinggung kurva $f(x)$ pada titik $(x_n, f(x_n)), n = 0,1,2,\ldots$ Bentuk ini tidak lain merupakan ekspansi Taylor orde pertama dari $f(x)$ pada $x = x_n, n = 0,1,2,\ldots$Dengan ide yang sama peneliti lain telah mengembangkan metode iterasi yang diturunkan melalui eksapansi Taylor sampai dengan orde kedua dan ketiga.

Melalui ekspansi Taylor orde dua, Halley (Eskandari, 2008) dan Traub (Traub, 1964) mengembangkan metode iterasi Euler, Halley dan Chebyshev. Iterasi yang dimaksud berturut-turut adalah sebagai berikut,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{2}{1+\sqrt{1-2L(x_n)}}, \quad (3)$$

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{2}{2-L(x_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4)$$

$$x_{n+1} = x_n - \left(1+\frac{1}{2}L(x_n)\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (5)$$

dimana

$$L(x_n) = \frac{f''(x_n) f(x_n)}{f'(x_n)^2}.$$

Ketiga metode di atas telah dibuktikan memiliki orde kekonvergenan kubik.

Selanjutnya Nasr Al-Din dalam (Nasr, 2008) mengembangkan metode Hybrid yang diperoleh melalui ekspansi Taylor orde ketiga. Bentuk formula iterasinya adalah

$$x_{n+1} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (6)$$

dengan

$A = f''(x_n)$,

$B = 6f'(x_n) - 2f''(x_n)x_n$, dan

$C = 6f(x_n) - 6f'(x_n)x_n + f''(x_n)x_n^2$

BAHAN DAN METODE

Pada penelitian ini dilakukan kajian ulang terhadap pekerjaan yang terlebih dahulu telah dilakukan oleh Eskandari (Eskandari, 2008). Dalam tulisannya, Eskandari belum melakukan pembuktian analisa kekonvergenan dari metode yang dikemukakannya. Untuk itu penulis melakukan analisa ini dengan menggunakan definisi tingkat kesalahan (Bartle, 2000).

Definisi 1

Asumsikan bahwa suatu barisan $\{x_n\}$ konvergen ke α dan misalkan $e_n = x_n - \alpha$ untuk $n = 0,1,2,\ldots$. Jika terdapat dua buah konstanta $A \neq 0$ dan $p > 0$ maka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = \lim_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = A,$$

p merupakan orde kekonvergenan dari barisan $\{x_n\}$ dan A disebut asimtot error.

Setelah analisa kekonvergenan dilakukan secara analitis, selanjutnya melalui uji komputasi (menggunakan software Maple 13) akan dibandingkan hasil yang diberikan oleh masing-masing metode iterasi. Jumlah iterasi dan nilai *COC* (perhitungan orde kekonvergenan secara komputasi) pada setiap contoh persamaan nonlinear yang digunakan akan dijadikan acuan pembanding. Nilai *COC* diperoleh melalui definisi berikut.

Definisi 2

Misalkan α adalah akar dari $f(x) = 0$ dan andaikan x_{n+1}, x_n, x_{n-1} adalah tiga hasil iterasi berturut-turut yang cukup dekat ke akar α. Maka, orde konvergensi secara komputasi (*COC*) dapat diaproksimasi dengan rumus

$$COC := \frac{\ln\left|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)\right|}.$$

HASIL DAN PEMBAHSAN

Metode Iterasi Baru

Seperti halnya metode Hybrid, metode iterasi baru yang dikemukakan oleh Eskandari (Eskandari, 2008) diperoleh dari ekspansi Taylor orde ketiga. Bentuk iterasinya adalah

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n) \pm \sqrt{D}}{(1-2\omega) f''(x_n)} \quad (7)$$

dimana

$D = f''(x_n)^2 - 2(1-2\omega) f(x_n) f''(x_n)$ dan ω adalah suatu parameter, dengan $0 \leq \omega \leq 1$ dan $\omega \neq 1/2$.

Untuk $\omega = 0$, maka persamaan (7) menjadi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n) \pm \sqrt{f'(x_n)^2 - 2f(x_n)f''(x_n)}}{f''(x_n)} \quad (8)$$

Persamaan (7) dan (8) memberikan dua nilai yang mungkin untuk x_{n+1}, tergantung pada tanda yang diberikan. Tanda yang dipilih disesuaikan dengan tanda $f'(x_n)$, sehingga nilai dari pembilang semakin kecil. Akhirnya persamaan (7) ditulis dalam bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n) + sign(f'(x_n))\sqrt{D}}{(1-2\omega) f''(x_n)} \quad (9)$$

Persamaan (9) ini merupakan metode iterasi baru untuk menyelesaikan persamaan nonlinear satu variabel.

Analisa Kekonvergenan

Teorema 1

Misalkan $\alpha \in I$ adalah akar sederhana dari fungsi $f : I \to R$. Misalkan f, f', f'', f''' dan $f^{(iv)}$ kontinu pada interval *I*. Jika x_0 cukup dekat ke α maka metode iterasi pada persamaan (9) mempunyai orde kekonvergenan kuadratik untuk $0 < \omega \leq 1$ dan kubik untuk $\omega = 0$.

Bukti:

Misalkan α adalah akar dari fungsi $f(x) = 0$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan $f'(\alpha) \neq 0$, $f''(\alpha) \neq 0$ dan $e_n = x_n - \alpha$. Dengan melakukan ekspansi Taylor untuk $f(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$, maka

$$f(x_n) = f'(\alpha)e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!}e_n^2 + O(e_n^3). \quad (10)$$

Selanjutnya dengan memfaktorkan $f'(\alpha)$ dari persamaan (10), maka diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!\,f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{O(e_n^3)}{f'(\alpha)}\right) \quad (11)$$

untuk menyederhanakan notasi misalkan

$$C_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)} \text{ untuk } j = 2,3,\ldots$$

sehingga persamaan (11) menjadi

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + C_2 e_n^2 + O(e_n^3)\right). \quad (12)$$

Dengan cara yang sama masing-masing untuk $f'(x_n)$ dan $f''(x_n)$ diperoleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\left(1 + 2C_2 e_n + O(e_n^2)\right), \quad (13)$$

dan

$$f''(x_n) = f'(\alpha)\left(2C_2 + O(e_n)\right) \quad (14)$$

Kemudian persamaan (13) dikuadratkan, sehingga diperoleh

$$(f'(x_n))^2 = f'(\alpha)^2\left(1 + 4C_2 e_n + (4C_2^2 + 6C_3)e_n^2 + O(e_n^3)\right) \quad (15)$$

Dengan mengalikan persamaan (12) dengan persamaan (14) diperoleh

$$f(x_n)f''(x_n) = f'(\alpha)^2 \left(2C_2 e_n + (2C_2^2 + 6C_3)e_n^2 + O(e_n^3)\right) \quad (16)$$

Misalkan $k = (1 - 2\omega)$, maka hasil perkalian k dengan persamaan (16) adalah

$$kf(x_n)f''(x_n) = f'(\alpha)^2\left(4kC_2 e_n + (4kC_2^2 + 12kC_3)e_n^2 + O(e_n^3)\right) \quad (17)$$

Jika persamaan (17) dibagi dengan persamaan (15) kemudian disederhanakan dengan menggunakan identitas

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + O(x^n)$$

dengan mengambil sampai suku x^2, di-peroleh bentuk

$$\frac{kf(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2} = 4kC_2 e_n + (12kC_3 - 12kC_2^2)e_n^2 + O(e_n^3).$$

Dengan menggunakan identitas

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots,$$

dan dengan mengambil sampai suku x^2, maka hasil dari $\left(1 - \frac{kf(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ setelah disederhanakan dan dimisalkan dengan A_n adalah

$$A_n = 1 + 2kC_2 e_n + (6kC_2^2 - 2k^2C_2^2 - 6kC_3)e_n^2 + O(e_n^3) \quad (18)$$

Misalkan B_n adalah hasil perkalian dari persamaan (13) dengan persamaan (18), maka akan diperoleh bentuk

$$B_n = f'(\alpha)(1 + (2C_2 - 2kC_2)e_n + (3C_3 - 2k^2C_2^2 + 2kC_2^2 - 6kC_3)e_n^2 + O(e_n^3)) \quad (19)$$

Persamaan (13) dikurangkan dengan persamaan (19), kemudian hasilnya dibagi dengan $2kC_2 f'(\alpha)$ dan dimisalkan dengan C_n,

$$C_n = e_n + \left(-C_2 + kC_2 + \frac{3C_3}{C_2}\right)e_n^2 + O(e_n^3). \quad (20)$$

Dengan mengalikan persamaan (14) dengan k, selanjutnya hasilnya dibagi dengan $2kC_2 f'(\alpha)$, dan dimisalkan dengan D_n,

$$D_n = 1 + \frac{3C_3 e_n}{C_2} + \frac{6C_4 e_n^2}{C_2} + O(e_n^3). \quad (21)$$

Kemudian dengan membagi persamaan (20) dan (21), setelah disederhanakan diperoleh

$$\frac{C_n}{D_n} = e_n + (kC_2 - C_2)e_n^2 + O(e_n^3). \quad (22)$$

Selanjutnya persamaan (22) disubstitusikan ke persamaan (7), sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - e_n - (kC_2 - C_2)e_n^2 + O(e_n^3). (23)$$

Karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$, maka persamaan (23) menjadi

$$\begin{aligned} e_{n+1} + \alpha &= e_n + \alpha - e_n \\ &\quad - (kC_2 - C_2)e_n^2 + O(e_n^3). \end{aligned} \quad (24)$$

Dengan mengurangkan kedua ruas persamaan (24) dengan α, sehingga diperoleh

$$e_{n+1} = -(kC_2 - C_2)e_n^2 + O(e_n^3). \quad (25)$$

Persamaan (25) merupakan persamaan tingkat kesalahan dari metode iterasi baru. Berdasarkan Definisi 1, maka orde kekonvergenan dari metode iterasi baru adalah kuadratik. Karena $k = (1-2\omega)$, maka untuk $\omega = 0$ orde kekonvergenan metode iterasi baru menjadi kubik.

Contoh Komputasi

Pada bagian ini diberikan tiga persamaan nonlinear yang juga biasa digunakan oleh peneliti lain dalam melakukan uji komputasi. Uji komputasi melibatkan :

- Metode Newton (yang diperoleh melalui ekspansi Taylor orde satu),
- Metode Euler, Halley, Chebyshev (yang diperoleh melalui ekspansi Taylor orde dua),
- Metode Hybrid dan Metode Iterasi Baru (yang diperoleh melalui ekspansi Taylor orde tiga).

Selain itu, simulasi ini juga akan melihat jumlah iterasi yang dibutuhkan metode sampai mendapatkan akar aproksimasi dan COC (*Computational Order of Convergence*) atau perhitungan orde konvergensi secara komputasi dari ketiga metode yang diaproksimasi.

Tiga persamaan nonlinear yang akan digunakan yaitu:

1. **Polynomial**
   $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$,
   dengan $\alpha = 1.3652300134140968$
2. **Polinomial dan eksponensial**
   $f(x) = x^2 - e^x - 3x + 2$,
   Dengan $\alpha = 0.2575302854398608$
3. **Polinomial dan trigonometri**
   $f(x) = x^2 - \cos x$,
   dengan $\alpha = 0.8241323123025224$.

Hasil dari uji komputasi terhadap ketiga persamaan nonlinear di atas diberikan pada tabel berikut.

Tabel 1. Perbandingan Komputasi metode Newton, Euler, Halley, Chebyshev, Hybrid dan metode Iterasi Baru

No	x_0	Metode	n	*COC*	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$\lvert x_{n+1} - x_n\rvert$
1.	1.0	Newton	5	2.00	3.662513e-21	2.12697640e-11
		Euler	3	3.00	4.634705e-27	1.66727549e-09
		Halley	3	3.11	1.502197e-19	3.69864992e-07
		Chebyshev	4	3.01	2.995954e-41	1.62843593e-14
		Hybrid	5	2.00	2.227077e-27	2.03135730e-14
		Baru ($\omega = 0$)	3	3.00	4.634705e-27	1.66727549e-09
		Baru ($\omega = 0.1$)	4	2.00	4.698100e-21	5.38665533e-11
	2.0	Newton	5	2.00	2.040551e-18	5.02049803e-10
		Euler	3	3.02	2.495742e-20	2.92235681e-07
		Halley	4	2.83	8.907717e-17	3.10735042e-06
		Chebyshev	4	2.99	6.184837e-41	2.07348899e-14
		Hybrid	5	2.00	6.705185e-23	3.52471568e-12
		Baru ($\omega = 0$)	3	3.02	2.495742e-20	2.92235681e-07
		Baru ($\omega = 0.1$)	4	2.00	9.981433e-19	7.85153397e-10
2.	1.0	Newton	4	2.00	6.447265e-23	1.35119391e-11
		Euler	3	3.29	5.969528e-17	6.51751018e-06
		Halley	3	3.31	1.069462e-17	3.88333687e-06
		Chebyshev	3	3.35	1.862320e-18	2.31751722e-06

		Hybrid	4	2.00	5.422535e-26	4.79928727e-13
		Baru ($\omega = 0$)	3	3.29	5.969528e-17	6.51751018e-06
		Baru ($\omega = 0.1$)	4	1.99	6.149290e-24	9.33098322e-12
	1.25	Newton	5	1.91	2.859204e-34	2.84545989e-17
		Euler	4	2.98	2.744334e-36	2.33479134e-12
		Halley	4	2.97	8.806550e-43	1.68947859e-14
		Chebyshev	4	2.96	7.697541e-48	3.71925859e-16
		Hybrid	4	2.00	2.455967e-24	3.22988337e-12
		Baru ($\omega = 0$)	4	2.98	2.744334e-36	2.33479134e-12
		Baru ($\omega = 0.1$)	4	1.98	4.173421e-20	7.68707347e-10
3.	1.0	Newton	4	2.00	6.100657e-17	6.74840639e-09
		Euler	3	3.02	4.260586e-37	1.51582698e-12
		Halley	3	2.94	1.420891e-27	1.17511726e-09
		Chebyshev	3	2.90	1.281888e-24	9.23244669e-09
		Hybrid	4	2.00	2.366284e-19	5.14744799e-10
		Baru ($\omega = 0$)	3	3.02	4.260586e-37	1.51582698e-12
		Baru ($\omega = 0.1$)	4	2.00	1.102855e-26	2.02888361e-13
	2.0	Newton	6	2.00	2.546261e-28	1.37868286e-14
		Euler	4	3.01	6.030369e-46	1.70192792e-15
		Halley	4	2.96	2.304548e-31	6.40849724e-11
		Chebyshev	4	2.92	1.530340e-26	2.11006663e-09
		Hybrid	5	2.00	1.055217e-17	3.43739455e-09
		Baru ($\omega = 0$)	4	3.01	6.030369e-46	1.70192792e-15
		Baru ($\omega = 0.1$)	5	2.00	2.065217e-28	2.77639195e-14

KESIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil komputasi yang telah dilakukan, secara umum metode iterasi baru untuk $\omega \neq 0$ sebanding dengan metode Newton dan metode Hybrid karena ketiganya menghasilkan jumlah iterasi yang hampir sama untuk setiap fungsi. Tetapi untuk metode iterasi baru dengan nilai $\omega = 0$, iterasi yang diperlukan untuk memperoleh akar hampiran sebanding dengan metode Euler, Halley dan Chebyshev.

Selanjutnya untuk orde konvergensi dari ketiga metode yang dihitung secara komputasi (*COC*), dapat dilihat bahwa metode iterasi baru dengan nilai $\omega = 0$ memiliki $COC = 3$ yang sama dengan hasil yang diberikan oleh metode Euler, Halley dan Chebyshev. Sedangkan metode Newton, metode Hybrid dan metode iterasi baru dengan nilai ω lainnya memiliki $COC = 2$. Hal ini menunjukkan bahwa orde konvergensi dari metode iterasi baru untuk $\omega = 0$ adalah kubik.

Hasil yang paling menarik adalah ternyata metode iterasi baru untuk nilai $\omega = 0$ memberikan perhitungan yang persis sama dengan metode Euler. Hal ini berarti bahwa metode iterasi baru untuk kasus khusus $\omega = 0$ tidak lain merupakan metode Euler seperti yang diberikan oleh persamaan (3).

UCAPAN TERIMA KASIH

Disampaikan kepada Bapak Dr. Imran, M. M.Sc yang telah memberikan koreksi yang sangat berarti terhadap analisa kekonverge-nan metode iterasi baru yang dibahas.

DAFTAR PUSTAKA

Nasr,A.I. 2008. A New Hybrid Iteration Method for Solving Algebraic Equations. *Applied Mathematics and Computation* 195, 772-774.

Bartle, R.G. & Sherbert D.R. 2000. *Intoduction to Real Analysis*, *Third Edition*. John Wiley and Sons, New York.

Conte,S.D. 1980. *Elementary Numerical Analysis*, Third Edition. McGraw- Hill Book Company, U.S.A.

Eskandari, H. 2008. A New Numerical Solving Method for Equations of One

Variable. *World Academy of Science, Engineering and Technology* 44, 196-199.

Halley, E. 1964. A new exact and easy method of finding the roots of equations generally, and that without any previous reduction, *Phil.Roy. Soc*. London 18 136-145.

Mathew, J.H. 1987. *Numerical Method for Mathematical, Science, and Engineer*. Prentice-Hall Internasional, U.S.A.

Melman, A. 1997. Geometry and convergence of Euler's and Halley's Methods, *SIAM Rev*. 39 (4) 728-735.

Traub, J.F. 1964. *Iterative Methods for Solution of Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Weerakoon, S & Fernando, T.G.I. 2000. A variant of Newton's Method with Accelerated Third-Order Convergence. *Applied Mathematics Letters*. 13: 87–93.