MODEL SEIR PENYAKIT CAMPAK DENGAN VAKSINASI DAN MIGRASI

Mohammmad Soleh[1], Siti Rahma[2]
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. H.R. Soebrantas No. 155 KM. 15 Simpang Baru Panam Pekanbaru
muhammad.soleh@uin-suska.ac.id

ABSTRAK

Penelitian ini menjelaskan tentang model penyebaran penyakit campak menggunakan model SEIR dengan vaksinasi dan migrasi. Hasil yang diperoleh adalah jika $R_0 < 1$maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik dan jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium endemik penyakit stabil asimtotik. Jumlah orang yang divaksinasi untuk mencegah penyebaran penyakit campak adalah $p_c > 1 - \frac{1}{R_0}$.

Kata kunci: Model SEIR, Penyakit Campak, Stabil Asimtotik, Titik Ekuilibrum, Vaksinasi.

ABSTRACT

This paper explains about thespread ofinfectiousdiseases, such as measles using SEIR model by vaccination and migration. The result obtained that is if $R_0 < 1$ disease-free equilibrium is asymptotic stable, and if $R_0 > 1$ endemic equilibrium is stable asymptotic. The vaccination number to prevent the measles outbreak is$p_c > 1 - \frac{1}{R_0}$.

Keywords*: Equilibrium, Measles, SEIR Model, Stable Asymptotic, Vaccination.*

Pendahuluan

Penyakit campak merupakan salah satu penyakit endemik di negara berkembang.Penyakit campak disebabkan oleh virus campak, dari family *Paramyxoviridae*, genus *Morbilivirus*. Penyakit ini diawali dengan adanya gejala awal demam, batuk, pilek yang kemudian diikuti dengan bercak merah kemerahan pada kulit [1]. Salah satu cara yang efektif untuk tindakan pencegahan penyakit campak adalah dengan vaksinasi. Keberhasilan vaksinasi dapat diukur dari menurunnya jumlah kasus campak dari waktu ke waktu. Kematian akibat campak mengalami penurunan sebesar 78% dari 733.000 jiwa di tahun 2000 menjadi 164.000 jiwa pada tahun 2008 [2].

Perpindahan populasi (migrasi) dari suatu wilayah ke wilayah lain merupakan fenomena yang dapat terjadi di suatu wilayah. Adanya migrasi dapat memungkinkan terjadinya penyebaran penyakit campak yang dibawa oleh populasi yang masuk atau keluar dari suatu wilayah.Oleh karena itu, migrasi perlu diperhatikan dalam model.

Model dasar tentang penyebaran penyakit pertama kali dirumuskan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927 [3]. Dalam modelnya, Kermack-McKendrick membagi populasi total menjadi tiga kelas, yaitu *Susceptible* (S) merupakan jumlah individu yang sehat tetapi rentan terhadap penyakit, *Infected* (I) adalah jumlah individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit kepada individu yang sehat, dan *Recovered* (R) yang menotasikan jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit dan akan kebal dari penyakit. Beberapa penyakit seperti campak, AIDS, TBC mempunyai periode laten, artinya ada selang waktu suatu individu terinfeksi sampai munculnya suatu penyakit. Periode laten ini akan terdapat pada kelas *Exsposed* (E), artinya individu yang terdeteksi atau terjangkit virus. Penambahan kelas pada penyakit campak ini akan membentuk model SEIR.

Metodologi Penelitian

a) Menentukan asumsi dan mendefinisikan parameter yang digunakan pada model SEIR dengan asumsi adanya vaksinasi dan adanya migrasi.
b) Menggambar diagram transfer untuk membentuk model matematika. Diagram transfer berfungsi untuk membentuk sistem persamaan differensialnya.
c) Menyelesaikan sistem persamaan differensial.
d) Mencari titik ekuilibrium model. Titik ekuilibrium yang akan dicari adalah titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit.
e) Menganalisa sifat kestabilan titik ekuilibrium. Setelah titik ekuilibrium diperoleh, maka diselidiki kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik penyakit. Untuk menganalisa sifat kestabilan titik ekuilibrium dilakukan linearisasi pada sistem dengan menentukan matriks Jacobian di titik ekuilibrium [4]. Kemudian dengan menggunakan definisi polinomial karakteristik diperoleh nilai eigen dari matriks dan ditentukan sifat kestabilannya berdasarkan Teorema [5].. Salah satu alternatif menentukan nilai eigen dari polinomial karakteristik adalah dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.
f) Menginterpretasikan hasil yang diperoleh untuk mengetahui jumlah individu yang harus divaksinasi agar tidak terjadi endemik penyakit.
g) Mensimulasikan model dengan mendefinisikan nilai parameter dan digambarkan dengan menggunakan *software Maple* 13.

Hasil dan Analisis

Model Matematika

Adapun asumsi pada model SEIR pada penyakit campak ini adalah:

a. Faktor kelahiran dan kematian diperhatikan. Individu yang lahir masuk ke kelas *Susceptible* (S) karena individu diasumsikan sehat tetapi rentan terhadap penyakit campak.
b. Dalam populasi terjadi proses migrasi. Imigrasi diasumsikan terjadi di kelas *Susceptible* (S), dan imigran yang masuk ke populasi dipastikan individu yang tidak terinfeksi penyakit campak. Sedangkan emigrasi masuk ke tiap kelas (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered*).
c. Penyakit dapat menyebabkan kematian (fatal).
d. Individu yang divaksinasi masuk kedalam kelas *Recovered* (R). Keampuhan vaksinasi adalah 100%, hal ini berarti setiap individu yang telah mendapatkan vaksinasi akan kebal terhadap penyakit. Sedangkan individu yang tidak mendapatkan vaksinasi masuk ke kelas *Susceptible* (S)dan berpotensi untuk terinfeksi penyakit campak.

Berdasarkan asumsi diatas, dapat didefinisikan parameter model sebagai berikut :

$b$menyatakan laju kelahiran pada kelas *Susceptible* (S)

μmenyatakan laju kematian alami

βmenyatakan laju kontak

δmenyatakan laju infeksi pada kelas *Exposed*

γmenyatakan laju kesembuhan pada kelas *Infected*

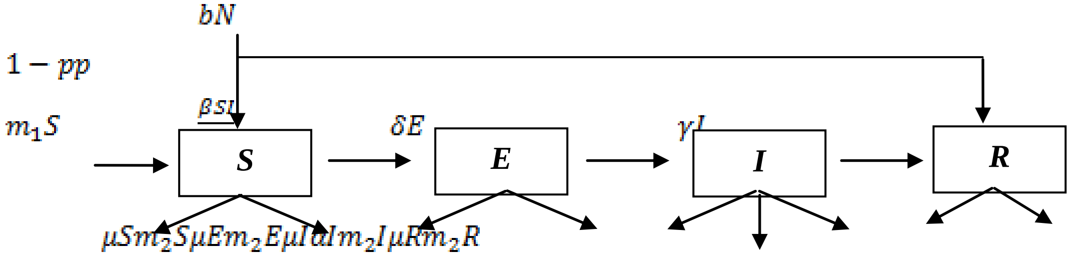
αmenyatakan laju kematian akibat penyakit campak pada kelas *Infected*

$p$menyatakan proporsi keberhasilan vaksinasi

$m_1$menyatakan laju imigrasi

$m_2$menyatakan laju emigrasi.

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, maka diperoleh diagram transfer berikut :



Gambar 1 Model SEIR pada Penyakit Campak dengan Vaksinasi dan Adanya Migrasi

Berdasarkan diagram transfer di atas diperoleh sistem persamaan differensial sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = b(1-p)N + m_1S - \frac{\beta SI}{N} - \mu S - m_2S$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \delta E - \mu E - m_2E$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \gamma I - \mu I - \alpha I - m_2I$$

$$\frac{dR}{dt} = bpN + \gamma I - m_2R - \mu R$$

(1)

Sistem (1) mempunyai solusi (S, E, I, R) sebagai himpunan berikut :

$$\Phi = \{(S,E,I,R)|S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, R \geq 0, S+E+I+R = N\}.$$

Pada sistem (1) variabel R tidak muncul pada persamaan Hal ini menunjukkan bahwa jumlah individu pada kelas R tidak mempengaruhi laju perubahan jumlah individu pada kelas S, E maupun kelas I. Dengan demikian nilai R dapat diabaikan dan sistem persamaan (1) dapat dibentuk menjadi sistem persamaan (2) sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = b(1-p)N + m_1S - \frac{\beta SI}{N} - \mu S - m_2S$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \delta E - \mu E - m_2E$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \gamma I - \mu I - \alpha I - m_2I$$

(2)

Adapun solusi dari sistem (2) adalah himpunan

$$\Omega = \{(S,E,I)|S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0,\ S+E+I \leq N\}$$

Titik Ekuilibrium

a. Titik ekuilibrium bebas penyakit

Pada titik ekuilibrium bebas penyakit berarti di dalam populasi tidak ada individu yang dapat menyebarkan penyakit campak atau tidak ada individu yang terserang penyakit campak, $I = 0$. Sehingga untuk titik ekuilibrium bebas penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{I}$, yaitu $\hat{I} = 0$.

Dari persamaan (2.c) diperoleh

$$\delta E - \gamma I - \mu I - \alpha I - m_2I = 0$$

Karena $\hat{I} = 0$, maka

$$\delta E = 0$$

$$E = 0$$

Maka diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit yang dinotasikan dengan $\hat{E}$, dengan $\hat{E} = 0$. Setelah diperoleh titik ekuilibrium $\hat{E}$, selanjutnya dicari titik ekuilibrium $\hat{S}$ dengan menyelesaikan persamaan (2.a) berikut :

$$b(1-p)N + m_1 S - \frac{\beta SI}{N} - \mu S - m_2 S = 0$$

Karena $\hat{I} = 0$, maka

$$S = \frac{b(1-p)N}{(-m_1 + \mu + m_2)}$$

Maka titik ekuilibrium endemik penyakit S dinotasikan dengan $\hat{S}$, yaitu $\hat{S} = \frac{b(1-p)N}{(-m_1+\mu+m_2)}$, dengan $\mu + m_2 > m_1$.

Berdasarkan penyelesaian di atas, maka diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit $(\hat{S},\hat{E},\hat{I}) = (\frac{b(1-p)N}{(-m_1+\mu+m_2)}, 0, 0)$.

b. Titik ekuilibrium endemik penyakit

Titik ekuilibrium endemik penyakit yaitu di dalam populasi selalu terdapat individu yang terserang penyakit campak, $I^* > 0$.

Sehingga $S^* = \frac{(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)N}{\delta\beta}$

Selanjutnya diperoleh berturut-turut:

$$I^* = \frac{b(1-p)N - \frac{(-m_1+\mu+m_2)(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)N}{\delta\beta}}{\frac{(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)}{\delta}}$$

Dari persamaan (2.c) diperoleh

$$\delta E - \gamma I - \mu I - \alpha I - m_2 I = 0$$

$$E = \frac{(\gamma+\mu+\alpha+m_2)}{\delta} I \qquad (3)$$

Untuk memperoleh titik kesetimbangan S^* maka dari persamaan (2.b) diperoleh

$$\frac{\beta SI}{N} - \delta E - \mu E - m_2 E = 0$$

Subsitusikan nilai $E = \frac{(\gamma+\mu+\alpha+m_2)}{\delta} I$ pada persamaan (3) sehingga persamaannya menjadi

$$\left(\frac{\beta S}{N} - (\delta + \mu + m_2)\frac{(\gamma + \mu + \alpha + m_2)}{\delta}\right) I = 0$$

Karena $I > 0$, maka hal ini berarti $I \neq 0$

$$E = \frac{(\gamma + \mu + \alpha + m_2)I}{\delta}$$

Kestabilan

Untuk mengetahui tingkat penyebaran penyakit campak diperlukan parameter tertentu. Parameter yang biasa digunakan dalam penyebaran penyakit adalah bilangan reproduksi dasar dan dinotasikan dengan R_0. Nilai R_0 diperoleh dengan cara sebagai berikut :

$$I^* > 0$$

$$\frac{b(1-p) - \frac{(-m_1+\mu+m_2)(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)}{\delta\beta}}{\frac{(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)}{\delta}} > 0$$

$$b(1-p)\beta\delta > (-m_1 + \mu + m_2)(\delta + \mu + m_2)(\gamma + \mu + \alpha + m_2)$$

Karena $b(1-p)\beta\delta > (-m_1 + \mu + m_2)(\delta + \mu + m_2)(\gamma + \mu + \alpha + m_2)$ maka dapat didefinisikan bilangan reproduksi dasar (R_0) sebagai berikut :

$$R_0 = \frac{b(1-p)\beta\delta}{(-m_1 + \mu + m_2)(\delta + \mu + m_2)(\gamma + \mu + \alpha + m_2)}$$

Teorema 1 Jika$R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit $(\hat{S},\hat{E},\hat{I}) = (\frac{b(1-p)N}{(-m_1+\mu+m_2)}, 0, 0)$ pada sistem (2) stabil asimtotik lokal.

Bukti :

Dapatdihitung untuk$\det(\lambda I - J(S^*,0,0)) = 0$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - b(1-p) - m_1 + \mu + m_2 & -b(1-p) & -b(1-p) + \frac{\beta\hat{S}}{N} \\ 0 & \lambda + \mu + \delta + m_2 & -\frac{\beta\hat{S}}{N} \\ 0 & -\delta & \lambda + \mu + \gamma + \alpha + m_2 \end{bmatrix} = 0$$

Persamaan karakteristik dari $\det\left(\lambda I - J(\hat{S},0,0)\right)$ adalah:

$$\Leftrightarrow (\lambda - b(1-p) - m_1 + \mu + m_2)(\lambda + \mu + \delta + m_2)(\lambda + \mu + \gamma + \alpha + m_2)$$
$$-(\lambda - b(1-p) - m_1 + \mu + m_2)\left(-\frac{\beta\hat{S}}{N}\right) - \delta = 0$$

Maka diperoleh persamaan karakteristik
$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$
dengan
$a_1 = y + z - w + x$
$a_2 = yz - wy - wz + xy + xz - \beta\delta\frac{w}{x}$
$a_3 = xyz - wyz + \beta\delta w\frac{w}{x} - \beta\delta w$

Untuk menentukan sifat kestabilannya, digunakan teorema [5] dengan kriteria :$a_1 > 0$, $a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 > a_3$.

i. $a_1 = y + z - w + x$
Karena $\hat{S} = \frac{b(1-p)N}{(-m_1+\mu+m_2)} = \frac{wN}{x}$ dan $\hat{S} < N$maka
$\frac{wN}{x} < N \Leftrightarrow \frac{w}{x} < 1 \Leftrightarrow w < x \Leftrightarrow x - w > 0$
. Jadi, $a_1 = y + z - w + x > 0$

ii. $a_3 = xyz - wyz + \frac{\beta\delta ww}{x} - \beta\delta w$
$= (xyz - \beta\delta w) - \left(-\frac{\beta\delta ww}{x} + wyz\right)$
$= (xyz - \beta\delta w)\left(1 - \frac{w}{x}\right)$

- Untuk $xyz - \beta\delta w > 0$, karena $R_0 = \frac{b(1-p)\beta\delta}{(-m_1+\mu+m_2)(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)} < 1$ maka $b(1-p)\beta\delta < (-m_1+\mu+m_2)(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)$. Dan karena $b(1-p) = w$, $-m_1+\mu+m_2 = x$, $\delta+\mu+m_2 = y$, dan $\gamma+\mu+\alpha+m_2 = z$ maka $w\beta\delta < xyz \Leftrightarrow xyz - w\beta\delta > 0$.
- Untuk $1 - \frac{w}{x} > 0$, karena $\hat{S} = \frac{b(1-p)N}{(-m_1+\mu+m_2)} = \frac{wN}{x}$ dan $\hat{S} < N$, maka $\frac{wN}{x} < N$ $\Leftrightarrow \frac{w}{x} < 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{w}{x} > 0$.

Berdasarkan pembahasan di atas, maka diperoleh $a_3 > 0$

iii. $a_1a_2 - a_3 = (y + z - w + x)\left(yz - wy - wz + xy + xz - \frac{\beta\delta w}{x}\right) -$
$$\left(xyz - wyz + \frac{\beta\delta ww}{x} - \beta\delta w\right)$$
$$= (y+z)\left(y(-w+x) + z(-w+x) + yz - \frac{\beta\delta w}{x}\right) + (y+z)(-w+x)^2$$

Karena $(-w+x) > 0$, maka $a_1a_2 > 0$.

Berdasarkan pembahasan di atas, maka diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik. Dengan cara analog, dapat dibuktikan teorema berikut:

Teorema 2 Jika$R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium endemik penyakit (S^*, E^*, I^*) pada sistem (2) stabil asimtotik.

Proporsi Vaksinasi dan Simulasi Jumlah Individu yang Divaksinasi

Berdasarkan pembahasan di atas, diperoleh

$$R_0 = \frac{b(1-p)\beta\delta}{(-m_1+\mu+m_2)(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)}$$

$p$pada bilangan reproduksi dasar di atas merupakan proporsi individu yang divaksinasi. Untuk mencegah menyebarnya penyakit, maka perlu didefinisikan tingkat vaksinasi minimum agar tidak terjadi endemik penyakit. Tingkat vaksinasi minimum dinotasikan dengan p_c.

Adapun tingkat vaksinasi minimum pada penyakit campak ini adalah sebagai berikut :

$$\Leftrightarrow R_0(1-p_c) < 1 \Leftrightarrow p_c > 1 - \frac{1}{R_0}$$

Berdasarkan nilai p_c yang diperoleh di atas, maka agar tidak terjadi endemik pada penyakit campak tingkat vaksinasi minimum atau proporsi individu yang harus divaksinasi adalah $p_c > 1 - \frac{1}{R_0}$.

Simulasi

a. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Dengan mengambil parameter $b = 0{,}5$, $\beta = 0.8$, $p = 0{,}5$, $\mu = 0{,}4$, $\delta = 0{,}6$, $\alpha = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}03$, $m_1 = 0{,}2$, $m_2 = 0{,}1$, $n = 1$. Subsitusikan nilai parameter ke sistem (1) sehingga diperoleh sistem berikut :

$$\frac{dS}{dt} = 0{,}5(1-0{,}5) + 0{,}2s - 0{,}8\,si - 0{,}4s - 0{,}1s$$

$$\frac{dE}{dt} = 0{,}8\,si - 0{,}6e - 0{,}4e - 0{,}1e$$

$$\frac{dI}{dt} = 0{,}6e - 0{,}03i - 0{,}4i - 0{,}1i - 0{,}1i$$

$$\frac{dr}{dt} = (0{,}5)(0{,}5) + 0{,}03i - 0{,}1r - 0{,}4r$$

Titik ekuilibrium bebas penyakit adalah $(\hat{S},\hat{E},\hat{I}) = (\frac{b(1-p)N}{(-m_1+\mu+m_2)}, 0{,}0) = (0{,}833, 0, 0)$. Bilangan reproduksi dasar sebesar $R_0 = \frac{b(1-p)\beta\delta}{(-m_1+\mu+m_2)(\delta+\mu+m_2)(\gamma+\mu+\alpha+m_2)} = 0{,}5772$. Untuk menentukan kestabilannya, maka subsitusikan nilai parameter ke matriks Jacobian berikut :

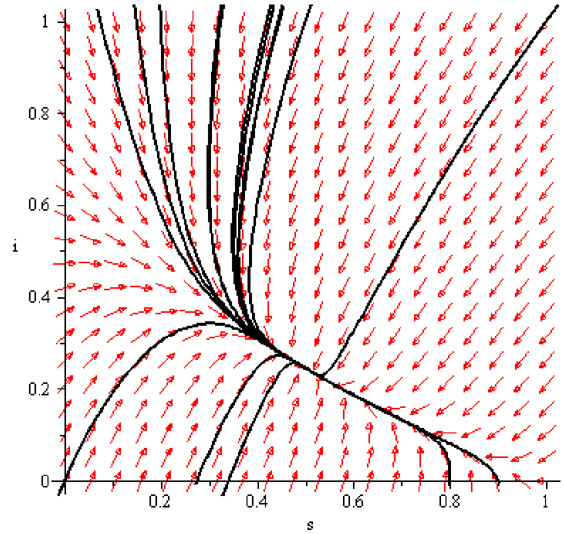
$$Jf(\hat{S},0{,}0) = \begin{bmatrix} -0{,}3 & 0 & -0{,}667 \\ 0 & -1{,}1 & 0{,}667 \\ 0 & 0{,}6 & -0{,}63 \end{bmatrix}$$

Kemudian hitung det $\left(\lambda I - Jf(\hat{S},0{,}0)\right)$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda+0{,}3 & 0 & 0{,}667 \\ 0 & \lambda+1{,}1 & -0{,}667 \\ 0 & -0{,}6 & \lambda+0{,}63 \end{bmatrix} = 0$$

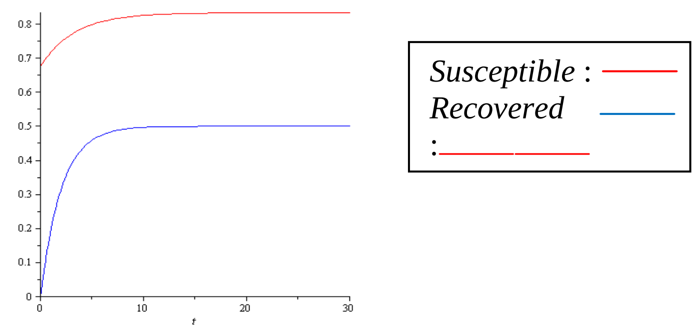
Maka diperoleh persamaan karakteristik $\lambda^3 + 2{,}03\lambda^2 + 0{,}812\lambda + 0{,}0879$ dengan nilai eigen $\lambda_1 = -0{,}3$, $\lambda_2 = -0{,}19$ dan $\lambda_3 = -1{,}54$.

Berdasarkan teorema (2.1), dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik.Hal ini dapat digambarkan dalam gambar (4.2) berikut :



Gambar 2 Orbit Kestabilan Model SEIR Penyakit Campak dengan Vaksinasi dan Migrasi pada Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Berdasarkan gambar 2 tampak bahwa arah trayektori menuju titik ekuilibrium sehingga dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik. Sedangkan dinamika populasi S, E, I, R menurut tahunan waktu dapat dilihat pada gambar berikut :



Gambar 3 Dinamika Popolasi S, E, I dan R pada Titik Ekuilibirum Bebas Penyakit

b. Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Berdasarkan sistem (4.5) pada simulasi bebas penyakit di atas, dengan mengambil parameter $b = 0{,}5$, $\beta = 0{,}8$, $p = 0{,}5$, $\mu = 0{,}1$, $\delta = 0{,}2$, $\alpha = 0{,}05$, $\gamma = 0{,}03$, $m_1 = 0{,}1$, $m_2 = 0{,}1$, $n = 1$. diperoleh sistem berikut :

$$\frac{dS}{dt} = 0{,}5(1 - 0{,}5) + 0{,}2s - 0{,}8\,si - 0{,}1s - 0{,}1s$$

$$\frac{dE}{dt} = 0{,}8\,si - 0{,}6e - 0{,}1e - 0{,}1e$$

$$\frac{dI}{dt} = 0{,}2e - 0{,}03i - 0{,}1i - 0{,}05i - 0{,}1i$$

$$\frac{dR}{dt} = (0{,}5)(0{,}5) + 0{,}03i - 0{,}1r - 0{,}1r$$

Titik ekuilibrium endemik penyakit adalah $S^*, E^*, I^* = (0{,}7,\ 0{,}321,\ 0{,}217)$. Bilangan reproduksi dasar sebesar $R_0 = 3{,}571$. Untuk menentukan kestabilannya, maka subsitusikan nilai parameter ke matriks Jacobian berikut :

$$Jf(S^*,E^*,I^*) = \begin{bmatrix} 0,1-0,256-0,1-0,1 & 0 & -0,56 \\ 0,256 & -0,2-0,1-0,1 & 0,56 \\ 0 & 0,2 & -0,1-0,03-0,05-0,1 \end{bmatrix}$$

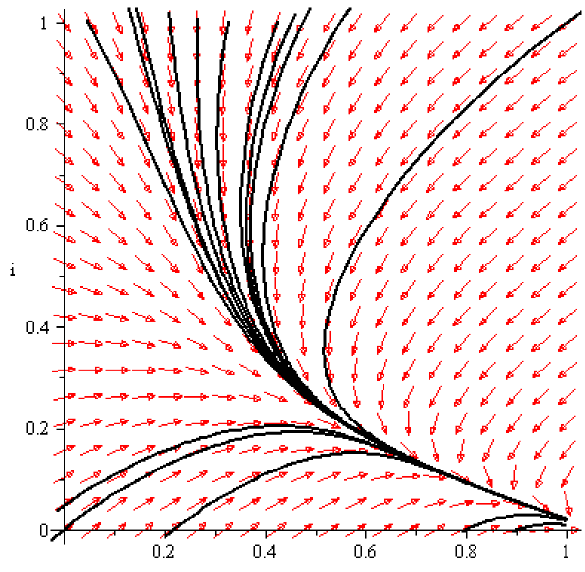
Kemudian hitung $\det\left(\lambda I - Jf(\hat{S},0,0)\right)$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda+0,356 & 0 & 0,56 \\ -0,256 & \lambda+0,4 & -0,56 \\ 0 & -0,2 & \lambda+0,28 \end{bmatrix} = 0$$

Maka diperoleh persamaan karakteristik

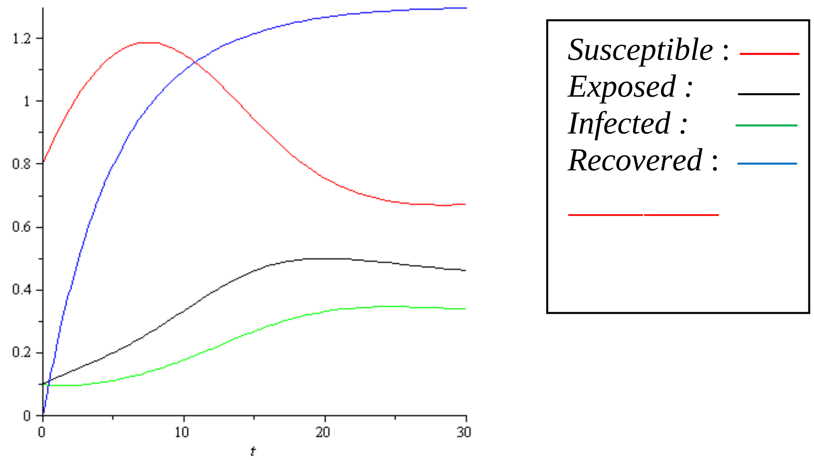
$\lambda^3 + 1,037\lambda^2 + 0,243\lambda + 0.0289 = 0$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, dapat diperoleh bahwa $a_1 > 0, a_2 > 0$dan $a_1a_2 > a_3$. Jadi dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium endemik penyakit stabil asimtotik.Hal ini dapat digambarkan dalam gambar (4) berikut :



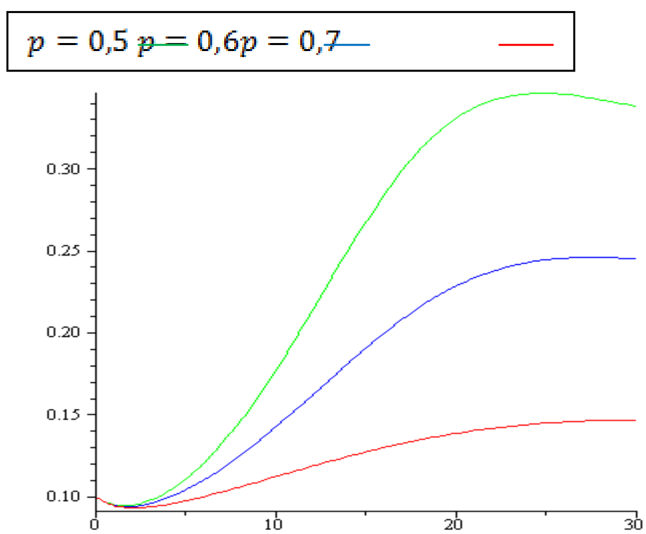
Gambar 4 Orbit Kestabilan Model SEIR Penyakit Campak dengan Vaksinasi dan Migrasi pada Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Berdasarkan gambar 4.tampak bahwa arah trayektori menuju titik ekuilibrium sehingga dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik. Sedangkan dinamika populasi S, E, I, R menurut tahunan waktu dapat dilihat pada gambar berikut :



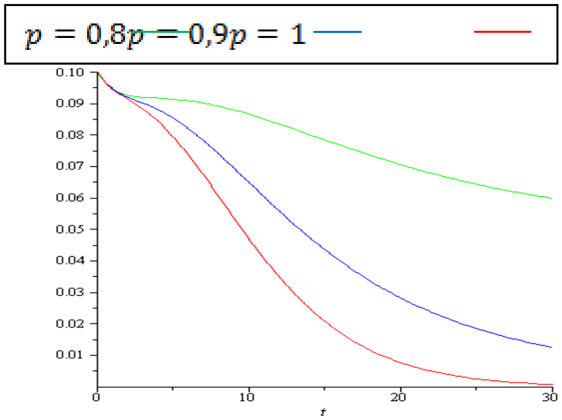
Gambar 5 Dinamika Populasi S, E, I dan R Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Jumlah orang yang harus divaksinasi pada kasus endemik penyakit ini adalah $p_c > 1 - \frac{1}{R_0}$. Karena $R_0 = 3{,}571$ maka diperoleh nilai $p_c = 0{,}72$. Hal ini bearti bahwa untuk mencegah terjadinya endemik penyakit maka proporsi orang yang divaksinasi harus lebih besar dari $0{,}72$. Selanjutkan akan dianalisis jika tingkat vaksinasi lebih kecil daripada tingkat vaksinasi minimum seperti gambar 6berikut :



Gambar 6 Proporsi Individu Kelas *Infected* dengan $p = 0,5, p = 0,6, p = 0,7$

Berdasarkan Gambar 4.5 di atas, dapat dilihat bahwa semakin besar tingkat vaksinasi, maka proporsi kelas individu yang terinfeksi semakin menurun. Tetapi vaksinasi yang diberikan pada penyakit campak akan selalu ada dalam jangka waktu tak terbatas. Dengan demikian vaksinasi yang dilakukan tidak berhasil membuat penyakit campak menghilang dari populasi. Selanjutnya akan dianalisis pengaruh vaksinasi jika tingkat vaksinasi yang diberikan lebih besar daripada tingkat vaksinasi minimum seperti gambar 4.6 berikut :



Gambar 7 Proporsi Individu pada Kelas *Infected* dengan $p = 0,8, p = 0,9, p = 1$

Berdasarkan gambar 7 di atas, dapat disimpulkan bahwa penyakit campak akan hilang dari populasi atau populasi bebas penyakit campak jika proporsi individu yang terinfeksi penyakit campak adalah $p = 1$.

Penutup

Berdasarkan pembahasan dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

a. Model penyebaran penyakit campak menggunakan model SEIR dengan adanya asumsi vaksinasi dan migrasi adalah sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = b(1-p)N + m_1 S - \frac{\beta SI}{N} - \mu S - m_2 S$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \delta E - \mu E - m_2 E$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \gamma I - \mu I - \alpha I - m_2 I$$

$$\frac{dR}{dt} = bpN + \gamma I - m_2 R - \mu R$$

b. Titik ekuilibrium terdiri atas dua, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit.

c. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0) dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$R_0 = \frac{b(1-p)\beta\delta}{(-m_1 + \mu + m_2)(\delta + \mu + m_2)(\gamma + \mu + \alpha + m_2)}$$

d. Jika Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit penyakit $(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I})$ stabil asimtotik. Dan jika$R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium endemik penyakit (S^*, E^*, I^*) stabil asimtotik.

e. Jumlah individu yang harus divaksinasi agar tidak terjadi endemik pada penyakit campak adalah $p_c > 1 - \frac{1}{R_0}$. Jika tingkat minimum jumlah orang yang divaksinasi terpenuhi, maka jumlah individu yang terkena penyakit campak akan berkurang dan didalam populasi tidak terjadi endemik pada penyakit campak.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H, (1998), *Aljabar Linear Elementer*, Terjemahan Pantur Silaban dan I Nyoman Susila, Edisi ke-5, Erlangga, Jakarta,.

Chasnov, R. Jeffrey, (2009), *Mathematical Biology*, The Hong Kong University Of Science and Technology, Hong Kong.

Ekawati, A., (2011)Kestabilan Model SEIR, *Media Sains*. Vol. 3, No. 2.

Kocak, H. dan Hale, J. K. , (2009) *Dynamic and Bifurcation*, Springer-verlag, New York.

Panfilov, A., (2004)*Qualitative Analysis Of Differential Equation*, Utrecht University, Utrecht.

Perko, L., (1991), *Differential Equations and Dynamical Systems,* Springer-verlag, New York,

Suhendar, (2011), *Analisis Kestabilan Model SIR, SIR Vaksinasi, SEIR dan MSEIR Sebagai Model-Model Penyebaran Penyakit Campak (Measles)*, Skripsi IPB

Tessa, Moussa. (2006) Mathematical Model for Control of Measles by Vaccination.*Mali Symposium on Applied Sciences (MSAS)*, hal. 31-36.

Widoyono, (2005)*Epidemiologi, Penularan, Pencegahan & Pemberantasannya*, Erlangga, Jakarta.

Wiggins, S. (1990) *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*, Springer Verlag, New York.