SIFAT-SIFAT SUBKELAS FUNGSI UNIVALEN MEMUAT INTEGRAL OPERATOR

Fitri Aryani
Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN SUSKA Riau
Email: baihaqi_fatimah78@yahoo.com

ABSTRAK

Kajian utama yang akan dilakukan pada artikel ini adalah tentang sifat-sifat yang termuat pada subkelas $S_\delta^\lambda(\mu;\phi)$ yaitu fungsi starlike , $C_\delta^\lambda(\mu;\phi)$ yaitu fungsi convex serta $Q_\delta^\lambda(\mu,\beta;\phi,\psi)$yaitu fungsi close-to-convex yang kesemuanya menggunakan operator integral.

Katakunci: fungsi close-to-convex, fungsi convex, fungsi starlike, fungsi univalen, operator integral.

ABSTRACT

The purpose of the present article is to inclusion properties for subclasses of univalent functions such as starlike functions $S_\delta^\lambda(\mu;\phi)$, convex functions $C_\delta^\lambda(\mu;\phi)$ and close-to-convex functions $Q_\delta^\lambda(\mu,\beta;\phi,\psi)$ which involve integral operator.

***Keywords**: close-to-convex functions, convex functions, integral operator, starlike functions, univalent functions.*

PENDAHULUAN

Matematika merupakan suatu ilmu pengetahuan yang snagat unik sekali. Karena matematika dapat digunakan hampir oleh semua bidang ilmu pengetahuan yanga lain. Sehingga matematika dapat dikatakan sebagai alat (*tools*) yang akan digunakan untuk hal yang lainnya. Banyak hal dibahas pada matematika diantaranya kalkulus yang membahas mengenai konsep dan penghitungan pada fungsi, limit , turunan dan integral. Aljabar yang membahas mengenai konsep matriks dan ruang vektor, adalagi statistic yang berhubungan dengan pengolahan data dan sebagainya.

Semua materi pada kalkulus berdoamain pada bilangan yang besar yaitu bilangan riil dan bagian - bagian dari riil atau bilangan kompleks. Materi yang membahas mengenai bilangan riril dikenal dalam Analisis Rill dan materi yang membahas mengenai bilangan kompleks Analisis Kompleks.

Analisis kompleks dalam matematika adalah suatu objek yang sangat menarik sekali disebabkan dalam bidang kompleks yang dikaji tidak hanya satu bilangan saja, tetapi ada dua bilangan. Bilangan yang dimaksud adalah bilangan riil dan bilangan khayal (imajiner), sebab kita ketahui bahwasannya bilangan kompleks dapat ditulis dalam bentuk $a + bi$. Seterusnya bentuk $a + bi$ ini akan dilambangkan dengan suatu simbol z. Akhirnya simbol z inilah yang akan mewakili bentuk kompleks pada fungsi-fungsi yang berkaitan dengan analisis kompleksnya antara lain fungsi analitik, fungsi univalen dan yang berkaitan dengan kompleks lainnya.

Fungsi univalen mempunyai subkelas yaitu; fungsi seperti bintang (*starlike*), fungsi cembung (*convex*) dan fungsi hampir cembung (*close-to-convex*). Banyak penulis yang mengkaji mengenai fungsi univalen dengan subkelasnya tersebut. Salah satu penulis yang mengkaji hal ini dan merupakan daftar pustaka pada penelitian ini adalah Maslina Darus dan Rabha W. Ibrahim (2009) dengan judulnya "*On Inclusion Properties Generalized Integral Operator Involving Noor Integral*".

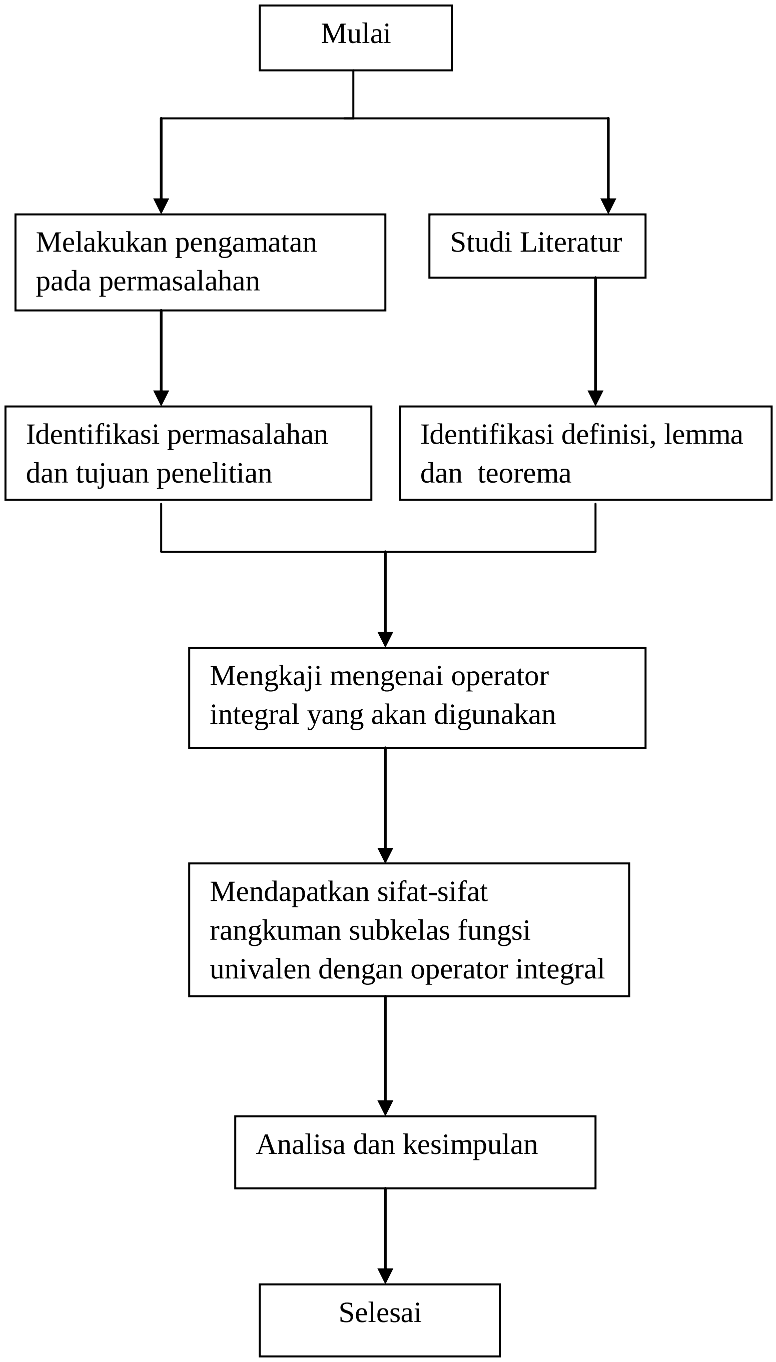
Jurnal yang ditulis oleh Maslina Darus dan Rabha. W. Ibrahim (2009) dengan judulnya di atas, mereka mengkaji sifat rangkuman subkelas yang mereka punyai dengan menggunakan operator integral yang ada dan melibatkan integral Noor.

Liu, J.L (2002) melakukan penelitian dengan judulnya "*Certain Integral Operator and Strongly Starlike Functions".* Dalam jurnal tersebut dibahas mengenai sifat-sifat rangkuman subkelas fungsi univalen dan analitik dengan melibatkan operator integral yang telah diperkenalkan oleh I.B. Jung, Y.C. Kim dan H.M. Srivastava pada tahun 1993. Subkelas yang digunakan juga subkelas pada fungsi seperti bintang *strongly*.

Selvaraj. C, Karthikeyan.K.R (2007) melakukan penelitian dengan judulnya '*Some Classes of Analytic Functions Involving Generalized Integral Operator"*. Dalam jurnal tersebut dibahas mengenai sifat-sifat rangkuman subkelas pada fungsi univalen dan analitik dengan melibatkan operator integral secara umum. Integral operator yang digunakan adalah operator yang didefinisikan sendiri oleh penulis dengan menggunakan kaedah Hadamard Product (*Convolution*) serta melibatkan integral Noor. Subkelas yang digunakan subkelas pada fungsi seperti bintang (*starlike*) yang umumnya.

METODE DAN BAHAN

Adapun metodologi penelitian yang penulis gunakan adalah metode studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:



Gambar 1 Tahapan Penelitian

Misalkan H adalah kelas pada fungsi analitik di $D := \{z \in C : |z| < 1\}$. Misalkan A dinotasikan sebagai subkelas pada H yang memuat fungsi-fungsi dengan bentuk: $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in U.$

(1)

Suatu $f \in A$ dikatakan *starlike* pada order μ jika ianya memenuhi ketaksamaan berikut:

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \mu, \quad (z \in U)$$

untuk sebarang $0 \leq \mu < 1$. Kita notasikan kelas ini dengan $S(\mu)$.

Suatu fungsi $f \in A$ dikatakan *convex* pada order μ jika ianya memenuhi ketaksamaan berikut:

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f(z)} + 1\right\} > \mu, \quad (z \in U)$$

untuk sebarang $0 \leq \mu < 1$. Kita notasikan kelas ini dengan $C(\mu)$.

Suatu fungsi $f \in A$ dikatakan *close-to-convex* jika terdapat fungsi *starlike* $g \in A$ sedemikian hingga

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{g(z)}\right\} > 0, \quad (z \in U)$$

Definisi 1. Suatu fungsi $f: D \to \mathbb{C}$ adalah anlitik pada z_0 jika f terdiferensialkan pada setiap titik dibeberapa sekitaran (*neighbourhood*) pada $z_0 \in D$.

Definisi 2. Suatu fungsi $f: D \to \mathbb{C}$ dikatakan univalen pada D jika $f(z_1) \neq f(z_2)$ untuk semua $z_1, z_2 \in D$ dengan $(z_1) \neq (z_2)$.

Selanjutnya, Jung dkk. [5] telah memperkenalkan operator intergal berikutr:

$$J_\delta^\lambda f(z) = \binom{\lambda+\delta}{\delta} \frac{\lambda}{Z^\delta} \int_0^z \left(1-\frac{t}{2}\right)^{\lambda-1} t^{\delta-1} f(t)\, dt$$
$$(\lambda > 0,\ \delta > -1,\ f \in A) \qquad \textbf{(2)}$$

dan

$$J_\delta^\lambda f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(\delta+n)\ \Gamma(\lambda+\delta+1)}{\Gamma(\delta+\lambda+n)\ \Gamma(\delta+1)} a_n z^n$$
$$(\lambda > 0,\ \delta > -1,\ f \in A) \qquad \textbf{(3)}$$

dengan $\Gamma(x)$ adalah fungsi gamma, dan selanjutnya didapat:

$$z(J_\delta^{\lambda+1} f(z))' = (\lambda+\delta+1) J_\delta^\lambda f(z) - (\lambda+\delta) J_\delta^{\lambda+1} f(z)$$
$$(\lambda > 0,\ \delta > -1,\ f \in A) \qquad \textbf{(4)}$$

Persamaan **(3)** dan **(4)** adalah sebuah operator integral yang akan dipakai untuk mendapatkan sifat-sifat subkelas univalen.

Diberikan F dan G adalah fungsi analitik di *unit disk* D. Fungsi F adalah *subordinate* ke G, ditulis dengan $F \prec G$, jika G adalah univalen , $F(0) = G(0)$ dan $F(U) \subset G(U)$. Secara umum, diberikan dua fungsi F dan G, yang keduanya adalah analitik di D, maka fungsi F dikatakan *subordinate* ke $G(z)$ di D jika terdapat sebuah fungsi h, analytik di D dengan

$h(0) = 0$ dan $|h(z)| < 1|$ untuk semua $z \in D$.

Sehingga

$F(z) = G(h(z))$ untuk semua $z \in U$.

Misalkan $\phi : C^2 \to C$ dan h univalent di D. Jika p adalah analitik di D dan memenuhi turunan *subordinate* $\phi(p(z),\ zp'(z)) \prec h(z)$, maka p dikatakan suatu solusi pada turunan *subordinate*. Fungsi univalen q dikatakan solusi dominan pada turunan *subordinate* jika $p \prec q$. Jika p dan $\phi(p(z),\ zp'(z))$ adalah univalen di D dan memenuhi turunan *superordinate* $h(z) \prec \phi(p(z),\ zp'(z))$, maka p dikatakan suatu solusi pada turunan *superordinate*.

Suatu fungsi analitik q dikatakan solusi *subordinant* pada turunan *superordinate* jika $q \prec p$.

Misalkan N adalah himpunan kelas pada semua fungsi ϕ yang analitik dan univalen di D dengan $\phi(U)=1$ dan $R\{\phi\}>0$ untuk $z \in U$. Menggunakan prinsip *subordinate* antara fungsi analitik, diperkenalkan beberapa subkelas $S^*(\mu;\phi)$ dan $C(\mu;\phi)$ pada kelas *A* untuk $\mu \geq 0$ and $\phi \in N$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S^*(\mu;\phi) = \left\{ f \in A : \frac{1}{1-\mu}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - \mu\right) \prec \phi(z), \quad z \in U \right\}$$

$$C^*(\mu;\phi) = \left\{ f \in A : \frac{1}{1-\mu}\left(\frac{zf''(z)}{f(z)} - \mu\right) \prec \phi(z), \quad z \in U \right\}$$

dan

$$Q^*(\mu,\beta;\phi,\psi) = \left\{ \begin{array}{l} f \in A; \exists g \in S^*(\mu;\phi) \ni : \\ \dfrac{1}{1-\beta}\left(1+\dfrac{zf'(z)}{g(z)} - \beta\right) \prec \psi(z), \quad z \in U \end{array} \right\}$$

Selanjutnya dengan menggunakan operator integral $J_\delta^\lambda f(z)$, diperkenalkan beberapa kelas pada fungsi analitik dibawah ini:

$$S_\delta^\lambda(\mu;\phi) = \left\{ f \in A,\ J_\delta^\lambda f(z) \in S^*(\mu;\phi) \right\}$$

$$C_\delta^\lambda(\mu;\phi) = \left\{ f \in A,\ J_\delta^\lambda f(z) \in C^*(\mu;\phi) \right\}$$

dan

$$Q_\delta^\lambda(\mu;\phi) = \left\{ f \in A,\ J_\delta^\lambda f(z) \in Q^*(\mu,\beta;\phi,\psi) \right\}$$

dengan catatan

$$f(z) \in C^*(\mu;\phi) \Leftrightarrow zf'(z) \in S^*(\mu;\phi) \qquad \textbf{(5)}$$

Selanjutnya akan di selidiki sifat-sifat pada kelas $S_\delta^\lambda(\mu;\phi)$, $C_\delta^\lambda(\mu;\phi)$ dan $Q_\delta^\lambda(\mu,\beta;\phi,\psi)$ dengan menggunakan operator integral $J_\delta^\lambda f(z)$.

Lemma 1. Misalkan ϕ univalen *convex* di *D* dengan $\phi(U)=1$ dan $R\{\kappa\phi(z)+v\}>0$ untuk $\kappa, v \in C$. Jika p adalah analitik di *D* dengan $p(0)=1$, maka

$$p(z) + \frac{zp'(z)}{\kappa\, p(z)+v} \prec \phi(z), \qquad z \in U$$

mengakibatkan

$$p(z) \prec \phi(z), \qquad z \in U.$$

Lemma 2. Misalkan ϕ univalen *convex* di *D* dan ω analitik di *D* dengan $R\{\omega\} \geq 0$. Jika p analitik di *D* dengan $p(0)=\phi(0)$, maka

$$p(z) + \omega(z) zp'(z) \prec \phi(z)$$

mengakibatkan

$$p(z) \prec \phi(z), \qquad z \in U.$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bahagian ini akan dibuktikan sifat-sifat subkelas dari $S_\delta^\lambda(\mu;\phi), C_\delta^\lambda(\mu;\phi)$. Menggunakan **Lemma 1**, akan didapatkan hasil berikut:

Teorema 1.

Misalkan $(\lambda>0,\ \delta>-1,\ f \in A)$. Maka untuk $\mu \geq 0$ dan $\phi \in N$ didapat sifat $S_\delta^\lambda(\mu;\phi) \subset S_\delta^{\lambda+1}(\mu;\phi)$.

Bukti. Akan ditunjukan

$S_\delta^\lambda(\mu;\phi) \subset S_\delta^{\lambda+1}(\mu;\phi)$. Misalkan $f \in S_\delta^\lambda(\mu;\phi)$ dan himpunan

$$p(z) = \frac{1}{1-\mu}\left[\frac{z\left(J_\delta^{\lambda+1} f(z)\right)'}{J_\delta^{\lambda+1} f(z)} - \mu\right]. \qquad \textbf{(6)}$$

dengan $p(z)=1+c_1z+c_2z^2+...$ adalah analitik di D dengan $p(0)=1$. Menggunakan persamaan **(4)**, diperoleh

$$(\lambda+\delta+1)\frac{J_\delta^\lambda f(z)}{J_\delta^{\lambda+1} f(z)} = p(z)(1-\mu)+\mu+(\lambda+\delta) \quad \textbf{(7)}$$

selanjutnya dengan menggunakan aturan logaritma turunan pada kedua sisi persamaan **(7)** maka diperoleh

$$\frac{(1-\mu)p'(z)}{(1-\mu)p(z)+\mu+(\lambda+\delta)} = \frac{\left(J_\delta^\lambda f(z)\right)'}{J_\delta^\lambda f(z)} - \frac{\left(J_\delta^{\lambda+1} f(z)\right)'}{J_\delta^{\lambda+1} f(z)} \quad \textbf{(8)}$$

kalikan z pada kedua sisi persamaan **(8)**, maka diperoleh

$$\frac{1}{1-\mu}\left[\frac{z\left(J_\delta^\lambda f(z)\right)'}{J_\delta^\lambda f(z)} - \mu\right] = p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z)(1-\mu)+\mu+(\lambda+\delta)} \quad \textbf{(9)}$$

Berdasarkan **Lemma 1** pada persamaan **(9)**, sehingga $p \prec \phi$, mengakibatkan $f \in S_\delta^{\lambda+1}(\mu;\phi)$ artinya terbukti bahwa $S_\delta^\lambda(\mu;\phi) \subset S_\delta^{\lambda+1}(\mu;\phi)$

Theorem 2.

Misalkan $(\lambda>0,\ \delta>-1,\ f\in A)$. Maka untuk $\mu\geq 0$ dan $\phi\in N$, diperoleh sifat $C_\delta^\lambda(\mu;\phi) \subset C_\delta^{\lambda+1}(\mu;\phi)$.

Bukti. Menggunakan persaman **(5)** dan teorema.1, kita selidiki sifat pada teorema 2

$$\begin{aligned}
f\in C_\delta^\lambda(\mu;\phi) &\Leftrightarrow J_\delta^\lambda f(z)\in C^*(\mu;\phi)\\
&\Leftrightarrow z\left(J_\delta^\lambda f(z)\right)' \in S^*(\mu;\phi)\\
&\Leftrightarrow J_\delta^\lambda \left(z f(z)\right)' \in S^*(\mu;\phi)\\
&\Leftrightarrow z f'(z) \in S_\delta^\lambda(\mu;\phi)\\
&\Leftrightarrow z f'(z) \in S_\delta^{\lambda+1}(\mu;\phi)\\
&\Leftrightarrow z(J_\delta^{\lambda+1} f(z))' \in S^*(\mu;\phi)\\
&\Leftrightarrow J_\delta^{\lambda+1} f(z) \in C_\delta^\lambda(\mu;\phi)\\
&\Leftrightarrow f\in C_\delta^{\lambda+1}(\mu;\phi)
\end{aligned}$$

terbukti bahwa $C_\delta^\lambda(\mu;\phi) \subset C_\delta^{\lambda+1}(\mu;\phi)$.

Selanjutnya dengan menggunakan **Lemma 2** kita peroleh sifat pada kelas $C_\delta^\lambda(\mu;\phi) \subset C_\delta^{\lambda+1}(\mu;\phi)$

Teorema 3.

Misalkan $(\lambda>0,\ \delta>-1,\ f\in A)$. Maka untuk $\mu,\ \beta\geq 0$ dan $\phi,\ \psi\in N$ diperoleh sifat $Q_\delta^\lambda(\mu,\beta;\phi,\psi) \subset Q_\delta^{\lambda+1}(\mu,\beta;\phi,\psi)$.

Bukti. Akan ditunjukan $Q_\delta^\lambda(\mu,\beta;\phi,\psi) \subset Q_\delta^{\lambda+1}(\mu,\beta;\phi,\psi)$.

Misalkan $f\in Q_\delta^\lambda(\mu,\beta;\phi,\psi)$. Maka terdapat $g\in S_\delta^\lambda(\mu;\phi)$ sedemikian hingga

$$\frac{1}{1-\beta}\left[\frac{z\left(J_\delta^\lambda f(z)\right)'}{J_\delta^\lambda g(z)} - \beta\right] \prec \psi(z), \quad z\in D$$

.

Himpunan

$$p(z) = \frac{1}{1-\beta}\left[\frac{z\left(J_\delta^{\lambda+1} f(z)\right)'}{J_\delta^{\lambda+1} g(z)} - \beta\right], \quad \textbf{(10)}$$

dengan $p(z)=1+c_1z+c_2z^2+...$ adalah analitik di D dengan $p(0)=1$. Menggunakan persamaan **(4)** , diperoleh

$$(1-\beta)p(z)+\beta = \frac{(\lambda+\delta+1)J_\delta^\lambda f(z)-(\lambda+\delta)J_\delta^{\lambda+1}f(z)}{J_\delta^{\lambda+1}g(z)} \quad \textbf{(11)}$$

selanjutnya dengan menggunakan aturan logaritma turunan pada kedua sisi persamaan **(11)**, diperoleh

$$\frac{(1-\beta)p'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta}=\frac{(\lambda+\delta+1)\left(J_\delta^\lambda f(z)\right)'-(\lambda+\delta)(J_\delta^{\lambda+1}f(z))'}{z\left(J_\delta^{\lambda+1}f(z)\right)'}-\frac{\left(J_\delta^{\lambda+1}g(z)\right)'}{J_\delta^{\lambda+1}g(z)} \quad \textbf{(12)}$$

kalikan z pada kedua sisi persamaan **(12)**, maka diperoleh

$$\frac{(1-\beta)\,zp'(z)}{(1-\beta)p(z)+\beta}=\frac{(\lambda+\delta+1)\,z\left(J_\delta^\lambda f(z)\right)'}{z\left(J_\delta^{\lambda+1}f(z)\right)'}-(\lambda+\delta)-\frac{z\left(J_\delta^{\lambda+1}g(z)\right)'}{J_\delta^{\lambda+1}g(z)}. \quad \textbf{(13)}$$

disebabkan $g\in S_\delta^\lambda(\mu;\phi)$, dan berdasarkan teorema 1, $g\in S_\delta^{\lambda+1}(\mu;\phi)$.

Misalkan

$$q(z) = \frac{1}{1-\mu}\left[\frac{z\left(J_\delta^{\lambda+1}g(z)\right)'}{J_\delta^{\lambda+1}g(z)}-\mu\right], \quad \textbf{(14)}$$

dengan $q(z)=1+c_1z+c_2z^2+...$ adalah analitik di D dengan $q(0)=1$. Menggunakan persamaan **(4)**, diperoleh

$$(\lambda+\delta+1)\frac{J_\delta^\lambda g(z)}{J_\delta^{\lambda+1}g(z)}=q(z)(1-\mu)+\mu+(\lambda+\delta) \quad \textbf{(15)}$$

dari persamaan(13) and (14), diperoleh

$$\frac{1}{1-\beta}\left[\frac{z\left(J_\delta^\lambda f(z)\right)'}{J_\delta^\lambda g(z)}-\beta\right]=p(z)+\frac{zp'(z)}{(1-\mu)q(z)+\mu+(\lambda+\delta)}$$

disebabkan $q\prec\phi$ dan $R\{q(z)(1-\mu)+\mu+(\lambda+\beta)\}>0$, berdasarkan **Lemma 2** diperoleh $p\prec\psi$ sehingga $f\in Q_\delta^{\lambda+1}(\mu,\beta;\phi,\psi)$, terbukti bahwa $Q_\delta^\lambda(\mu,\beta;\phi,\psi)\subset Q_\delta^{\lambda+1}(\mu,\beta;\phi,\psi)$

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Fungsi analitik dan univalen pada persamaan (1) yang merupakan suatu kelas A dengan subkelas-subkelas yang diberikan dan dengan menggunakan operator integral, maka dapat disimpulkan bahwasannya:

1. Pada *starlike* sifat yang berlaku adalah $S_\delta^\lambda(\mu;\phi)\subset S_\delta^{\lambda+1}(\mu;\phi)$
2. Pada *convex* sifat yang berlaku adalah $C_\delta^\lambda(\mu;\phi)\subset C_\delta^{\lambda+1}(\mu;\phi)$.
3. Pada *close-to-convex* sifat yang berlaku adalah

$$Q_\delta^\lambda(\mu,\beta;\phi,\psi)\subset Q_\delta^{\lambda+1}(\mu,\beta;\phi,\psi).$$

Saran

Pembahasan kali ini merupakan pengembangan daripada kelas-kelas yang telah diperkenalkan oleh peneliti sebelumnya. Operator integral yang digunakan juga operator integral yang diperkenalkan oleh peneliti sebelumnya. Penelitian selanjutnya dapat dilakukan dengan menggunakan kelas yang lain tetapi operator integral yana sama, atau dengan kelas yang sama tetapi dengan operator integral yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

C. Pommerenke, Univalent functions: with a chapter on quadratic differentials by gerd jensen, Vandenhoeck & Ruprecht In Gottingen, 1973.

C. Selvaraj, and K.R. Karthikeyan, Some classes of analytic functions involving generalized integral operator, Int. Math. Forum. **2**(63) (2007), 3143-3153.

H.M. Srivastava and S. Owa, Univalent functions, Fractional calculus, and their Applications, Halsted Press/John Wiley and Sons, Chichester. New York, 1989.

H.M. Srivastava and S. Owa, Current topics in analytic function theory, World Scientific. Singapore-New Jersey-London-Hongkong, 1992.

I.B. Jung, Y.C. Kim and H.M. Srivastava, The Hardy space of analytic functions associated with certain one-parameter families of integral operators, J. Math. Anal. Appl. **176**(1) **(**1993**)**, 138–147.

J.L. Li, Some properties of two integral operators, Soochow J. Math. **25**(1) **(**1999), 91–96.

J.L. Li, Certain integral operator and strongly starlike functions, IJMMS. **30**(9) **(**2002), 569-574.

M. Darus and R. Ibrahim, On Inclusion Properties of Generalized Integral Operator involving Noor Integral, Far East J. Math. Sci. **33**(3) (2009), 309-321.

P. Eenigenburg, S. Miller, P. Mocanu and M. Reade, On a Briot – Bouqet differential subordination, General Inequalities, 3 (Oberwolfach 1981), 339-348, Internat. Schriftenreihe Numer. Math. 64, Birkhauser, Basel, 1983.

P.L. Duren, Coefficients of univalent functions, Bull. Amer. Math. Soc. **83**(5) (1977), 891-910

P.L. Duren, Univalent fuctions, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1983.

R.J. Libera, Some classes of regular univalent functions, Proc.Amer. Math. Soc. **16**(1965), 755-758.

S.D. Bernardi, Convex and starlike univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc. **135** (1969)**,** 429-446.

S. Miller, and P. Mocanu, Differential subordination and univalent functions, Michigan. Math. J. **28** (1981), 157-177.

S. Owa, and H.M. Srivastava, Some applications of the generalized Libera integral operator, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **62** (1986), 125-128.

S. Owa, Properties of certain integral operators. Georgian. Math. J. **2**(5) (1995), 535-545.