APLIKASI METODE SINGULAR VALUE DECOMPOSITION(SVD) PADA SISTEM PERSAMAAN LINIER KOMPLEKS

Fitri Aryani, Dewi Yulianti
Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN SUSKA Riau
Email: baihaqi_fatimah78@yahoo.com

ABSTRAK

Sistem Persamaan Linear (SPL) dapat dibentuk ke dalam persamaan matriks AX =B. Koefisien pada sistem persamaan linear ada yang berbentuk bilangan riil dan ada yang berbentuk bilangan kompleks. Metode SVD merupakan suatu metode yang mendekomposisikan suatu matriks A menjadi tiga komponen matriks USV^H. Metode SVD dapat digunakan untuk mencari solusi dari sistem persamaan linear kompleks yang konsisten maupun sistem persamaan linear kompleks yang tidak konsisten. Solusi yang diperoleh dari sistem persamaan linear kompleks yang konsisten dengan menggunakan SVD adalah solusi tunggal dan banyak solusi. Sedangkan, solusi yang diperoleh dari sistem persamaan linear kompleks yang tidak konsisten dengan menggunakan SVD adalah solusi pendekatan terbaik.

Katakunci: basis ortonormal, sistem persamaan linear kompleks, Singular Value Decomposition (SVD).

ABSTRACT

Linear Equation System (SPL) into equation of matrix AX = B. Coefficient of linear equation system there is which is the in form of real number and there is which is the in form of complex number. Method of SVD a method for decomposition matrix A become three component of matrix USV^H. Method of SVD earn is used to look for solution from linear equation system complex consistent and also linear equation system complex not the consistence. While, solution obtained from linear equation system complexnot the consistence is solution of best approach.

Keywords: *linear equation system complex, orthonormal base, Singular Value Decomposition (SVD).*

PENDAHULUAN

Sistem persamaan linear merupakan sekumpulan persamaan linear yang terdiri dari koefisien dan variabel. Koefisien pada sistem persamaan linear ada yang berbentuk bilangan riil dan ada yang berbentuk bilangan kompleks. Sistem persamaan linear mempunyai beberapa bentuk pemecahan atau solusi, yaitu solusi tunggal, banyak solusi dan tidak ada solusi.

Beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear diantaranya Operasi Baris Elementer (OBE) dan *Singular Value Decomposition* (SVD). Metode OBE adalah metode yang sangat dasar sekali dalam menyelesaiakn suatu sistem persamaan linier, baik SPL riil maupun SPL Kompleks [6]. Berdasarkan bentuk SPL ada yang konsisten dan ada yang tidak konsisten mempengaruhi hasil solusi dari SPL tersebut. Metode OBE hanya dapat menyelesaikan SPL yang konsisten.

Metode SVD adalah suatu metode yang juga dapat menyelesaikan SPL riil maupun SPL kompleks yang berbentuk konsisten. Tetapi SVD mempunyai kelebihan yaitu dapat meyelesasikan SPL yang berbentuk tidak konsisten, dalam hal ini solusi yang diperoleh adalah solusi pendekatan terbaik.

Metode SVD adalah suatu metode yang mendekomposisikan suatu matriks A

menjadi tiga komponen matriks USV^H, di mana U merupakan matriks uniter berukuran $m\ x\ m$, S merupakan matriks yang berukuran $m\ x\ n$ yang semua entri di luar diagonalnya 0, dan V merupakan matriks uniter berukuran $n\ x\ n$ [4].

Metode SVD telah digunakan oleh beberapa peneliti sebelumnya, diantaranya menggunakan SVD untuk menentukan invers Moore Penrose dari suatu matriks . Peneliti selanjutnya menggunakan SVD untuk mengurangi noise yang terdapat pada citra digital dengan bantuan DFT (*Discrete Fourier Transform*). Kemudian menggunakan SVD untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan koefisien bilangan riil.

Metode SVD untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier Kompleks pada tulisan ini dibatasi hanya pada bentuk SPL kompleks yang tidak konsisten. Aplikasi metode SVD yang digunakan pada tulisan ini juga berbentuk contoh-contoh Sistem Persamaan Linier Kompleks yang dibatasi oleh banyak persamaan 6 dengan banyak variabelnya 5 dan banyak persamaan 8 dengan banyak variabelnya 7.

METODE DAN BAHAN

Adapun metodologi penelitian yang penulis gunakan adalah metode studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diberikan sistem persamaan linear kompleks.
2. Mengubah suatu sistem persamaan linear kompleks ke dalam bentuk persamaan matriks $AX = B$.
3. Mencari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A dengan cara membentuk matriks baru A^HA .
4. Mendekomposisikan matriks A menjadi tiga komponen matriks USV^H
   a. U adalah matriks uniter berukuran $m\ x\ m$. Basis ortonormal dari U didefinisikan sebagai [2]:
   $$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i.$$
   b. S adalah matriks yang berukuran $m\ x\ n$ yang semua entri di luar diagonalnya adalah 0, dan elemen-elemen diagonalnya memenuhi $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$. Semua $\sigma_i$yang ditentukan adalah tunggal dan disebut nilai-nilai singular dari matriks A.
   c. V adalah matriks uniter berukuran $n\ x\ n$. Agar vektor-vektor kolom matriks V membentuk himpunan ortonormal, maka vektor-vektor eigen dari A^HA tersebut dinormalisasikan, yaitu:
   $$v_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i \ .$$
5. Membentuk basis-basis ortonormal $U(A), U(A^H), V(A)$ dan $V(A^H)$.
6. Menentukan solusi dari suatu sistem persamaan linear kompleks.

Bahan-bahan penunjang untuk pembahasan selanjutnya akan dipaparkandi bawah ini

1. Sistem Persamaan Linear

Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan linear yang terdiri dari m persamaan $L_1, L_2, \ldots, L_m$, dengan n variabel$x_1, x_2, \ldots, x_n$, yang dapat disusun dalam bentuk standar

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

yang mana a_{ij} dan b_i adalah konstanta. Huruf a_{ij} adalah koefisiendari variabelx_j

pada persamaan L_i, dan bilangan b_i adalah konstantadari persamaan L_i.

Sistem persamaan linear pada persamaan di atas yang terdiri dari m persamaan linear dengan n variabel ekuivalen dengan persamaan matriks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

atau $AX = B$,yang mana $A = [a_{ij}]$ adalah matriks koefisien, $X = [x_j]$ adalah vektor kolom dari variabel-variabel, dan $B = [b_i]$ adalah vektor kolom dari konstanta.

Beberapa bentuk pemecahan atau solusi dari sistem persamaan linear adalah sebagai berikut:

1. Solusi tunggal
   Dikatakan memiliki solusi tunggal apabila terdapat satu titik potong dari sistem persamaan linear.
2. Banyak solusi
   Dikatakan memiliki banyak solusi apabila terdapat banyak titik potong dari sistem persamaan linear.
3. Tidak ada solusi
   Dikatakan tidak ada solusi apabila tidak ada titik potong dari sistem persamaan linear.

Koefisien pada sistem persamaan linear ada yang berbentuk bilangan riil dan ada yang berbentuk bilangan kompleks. Selanjutnya, akan diberikan penjelasan tentang sistem persamaan linear yang berkoefisien bilangan riil dan sistem persamaan linear dengan koefisien bilangan kompleks

2. Sistem Persamaan Linear Riil

Sistem persamaan linear riil merupakan sistem persamaan linear dengan koefisien bilangan riil.Metode dasar yang sering digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear riil adalah Operasi Baris Elementer (OBE). OBE merupakan suatu metode untuk.

3. Sistem Persamaan Linear Kompleks

Sistem persamaan linear kompleks merupakan sistem persamaan linear dengan koefisien bilangan kompleks. Bilangan kompleks adalah bilangan yang terdiri dari bilangan riil dan bilangan imajiner. Menurut Nicholson (2001) sistem persamaan linear kompleks dapat juga diselesaikan dengan menggunakan Operasi Baris Elementer.

4. Metode *Singular Value Decomposition* (SVD)

Singular Value Decomposition atau Dekomposisi Nilai Singular yang selanjutnya ditulis dengan SVD adalah suatumetode yangmendekomposisikan suatu matriks$A$ menjadi tiga komponen matriksUSV^H, yang mana salah satu dari matriks tersebut entrinya merupakan nilai singular dari matriks A. Proses dekomposisi ini sering juga disebut dengan faktorisasi. Berikut akan diberikan definisi dari nilai singular.

Definisi 1 : Diketahui matriks $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$dengan$rank\,(A) = r$, yang mana $r \leq min(m,n)$. Nilai eigen dari matriks $A^H A$ adalah
$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.
Akar nilai eigen positif dari $A^H A$ disebut dengan nilai singular (σ) dari matriks A dan dinyatakan dengan$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, untuk setiap $1 \leq i \leq n$.

5. Ortogonal dan Basis Ortonormal

Definisi 2: Diketahui vektor $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$, maka hasil kali dalam vektor u dan v adalah

$$u.v = u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + \cdots + u_n\bar{v}_n$$

yang mana $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ adalah konjugat dari $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Selanjutnya akan diberikan definisi mengenai ortogonal.

Definisi 3 : Vektor$u, v \in \mathbb{C}^n$ dikatakan ortogonal jika dan hanya jika $\langle u, v\rangle = 0$.

Berikut akan diberikan teorema mengenai basis ortonormal.

Teorema 1 : Jika $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah basis ortonormal untuk ruang hasil kali dalam V, dan u adalah sebarang vektor dalam V, maka

$$u, v_1\rangle \quad v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + \cdots + \langle u, v_n\rangle v_n \ .$$

6. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 4 : Diketahui A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x di dalam $\mathbb{C}^n$ dinamakan vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yaitu:

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

7. Matriks Kompleks

Matriks kompleks yaitu matriks dengan entri-entri bilangan kompleks. Misalkan A adalah matriks kompleks, jika $z = x + iy$ adalah bilangan kompleks, maka $\bar{z} = x - iy$ adalah konjugatnya. Konjugat dari matriks kompleks A, yang ditulis $\bar{A}$, adalah matriks yang diperoleh dari A dengan cara menghitung konjugat dari setiap entri A.

Notasi A^H digunakan untuk transpos konjugat A. Yaitu,

$$A^H = (\bar{A})^T$$

Beberapa literatur menggunakan A^* sebagai ganti A^H.

Definisi 5 : Sebuahmatriks A dengan entri-entri bilangan kompleks disebut uniter jika

$$A^H = A^{-1}.$$

Dengan catatan A haruslah matriks bujursangkar dan dapat-dibalik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini akan dijelaskan bagaimana metode SVD dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear kompleks. Seperti yang telah diketahui bahwa sistem persamaan linear dapat dibentuk ke dalam persamaan matriks

$$AX = B \quad \textbf{...............................(1)}$$

yang mana matriks A merupakan matriks koefisien yang akan dicari bentuk SVD-nya.

Suatu sistem persamaan linear kompleks akan konsisten jika dan hanya jika matriks B pada persamaan **(1)** berada dalam $U(A)$. Untuk mengetahui bahwa B berada dalam $U(A)$, maka akan diuji apakah B sama dengan proyeksi B pada $U(A)$, yang mana $U(A)$ direntang oleh vektor $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$. Proyeksi B pada $U(A)$ diberikan oleh persamaan di bawah ini:

$$proy\ \langle B, U(A)\rangle = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle B, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} u_i \quad \textbf{......(2)}$$

Berdasarkan bentuk SPL Kompleks dan persamaan **(2)** di atas maka terdapat di dua kasus, yaitu:

1. Kasus untuk $B \in U(A)$

   Pada kasus untuk $B \in U(A)$ maka sistem persamaan linear kompleks konsisten dan mempunyai paling sedikit satu solusi. Karena $B \in U(A)$, maka $B = proy\ \langle B, U(A)\rangle$ sehingga menurut persamaan **(2)** diperoleh persamaan

   $$proy\ \langle B, U(A)\rangle = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle B, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$

   oleh karena $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$, maka

   $$B = A \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle B, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} \frac{v_i}{\sigma_i} \textbf{....................(3)}$$

   dengan mensubstitusikan persamaan **(3)** pada persamaan **(1)**, didapatkan

   $$AX = B$$

$$AX = A\sum_{i=1}^{r}\frac{\langle B,u_i\rangle}{\|u_i\|^2}\frac{v_i}{\sigma_i}$$

$$X = \sum_{i=1}^{r}\frac{\langle B,u_i\rangle}{\|u_i\|^2}\frac{v_i}{\sigma_i} \qquad \textbf{(4)}$$

yang merupakan solusi dari sistem persamaan linear kompleks pada persamaan **(1)**. Nilai solusi dari sistem persamaan linear kompleks bergantung pada ruang nol dari matriks A yaitu $V(A^H)$. Sehingga ada dua subkasus, yaitu:

a. Jika $V(A^H) = \{0\}$, maka sistem persamaan linear kompleks mempunyai satu solusi atau solusi tunggal, yang mana solusinya diberikan oleh persamaan **(4)**.

b. Jika $V(A^H) \neq \{0\}$, maka sistem persamaan linear kompleks mempunyai banyak solusi. Solusinya diberikan oleh:

$$X_{inf} = \sum_{i=1}^{r+1}\frac{\langle B,u_i\rangle}{\|u_i\|^2}\frac{v_i}{\sigma_i} + \sum_{i=r+1}^{n}\mu_i v_i$$

2. Kasus untuk $B \neq U(A)$

Pada kasus untuk $B \neq U(A)$ maka sistem persamaaan linear kompleks tidak konsisten, dalam hal ini solusi yang diperoleh adalah solusi pendekatan terbaik. Solusi pendekatan terbaik tersebut adalah vektor X_r sehingga

$$AX_r = B_r$$

yang mana B_r di dalam $U(A)$, dan B_r adalah vektor yang terdekat dengan B. Solusi pendekatan terbaik diberikan oleh persamaan **(4)**.

X_r disebut sebagai solusi pendekatan terbaik, artinya jika $AX_r = B_r$, maka B_r adalah vektor di $U(A)$ yang terdekat dengan B .

Sehingga vektor $(B - B_r)$ akan tegak lurus dengan setiap vektor di $U(A)$ termasuk vektor yang merentang $U(A)$ yaitu vektor-vektor u_i dengan $1 \leq i \leq r$ dan u_i adalah vektor yang ortonormal, maka berlaku:

$$\langle (B - B_r), u_i\rangle = \langle (B - AX_r, u_i)\rangle$$

$$= \left\langle \left(B - A\sum_{i=1}^{r}\frac{\langle B,u_i\rangle}{\|u_i\|^2}\frac{v_i}{\sigma_i}\right)\right\rangle$$

$$= \langle B,u_i\rangle - \langle B,u_i\rangle = 0$$

Hal ini menunjukkan bahwa $B - AX_r$ adalah tegak lurus dengan setiap vektor di $U(A)$ dan persamaan **(4)** merupakan solusi pendekatan terbaik.

Selanjutnya, akan diberikan beberapa contoh penyelesaian sistem persamaan linear kompleks yang tidak konsisten dengan menggunakan metode SVD. Beberapa contoh sistem persamaan linear kompleks yang diberikan berdasarkan dengan m persamaan dan n variabel.

Contoh 1: Diberikan sistem persamaan linear kompleks dengan 6 persamaan dan 5 variabel sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
ix_1 \quad - x_3 \quad + x_5 &= 3\\
x_1 + x_2 - ix_3 \quad &= 4i\\
2x_1 \quad + 5ix_3 \quad &= -3i\\
2ix_2 + 2x_3 \quad &= -5\\
x_4 + x_5 &= 5\\
ix_1 + ix_2 \quad &= -3
\end{aligned}$$

Penyelesaian:

1. Mengubah sistem persamaan linear kompleks ke dalam bentuk persamaan matriks $AX = B$

$$\begin{bmatrix} i & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -i & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5i & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 2 & 0 & 0 \\ i & i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4i \\ -3i \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2. Mencari nilai eigen dan vektor eigen

a. Didapat nilai-nilai eigen dari $A^H A$ adalah
$\lambda_1 = 35{,}2299$ $\lambda_2 = 8{,}1496$ $\lambda_3 = 2{,}6061$ $\lambda_4 = 0{,}7617$

dan $\lambda_5 = 0{,}2527$

b. vektor-vektor eigennya adalah
Didapat vektor eigen untuk $\lambda_1 = 35{,}2299$, yaitu:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0{,}3230 & -0{,}1379 & -0{,}9355i & 0{,}0011i & 0{,}0379i \end{bmatrix}^T$$

Didapat vektor eigen untuk $\lambda_2 = 8{,}1496$, yaitu:

$$x_2 = \begin{bmatrix} -0{,}6045 & -0{,}7862 & -0{,}0962i & -0{,}0118i & 0{,}0846i \end{bmatrix}^T$$

Didapat vektor eigen untuk $\lambda_3 = 2{,}6061$, yaitu:

$$x_3 = \begin{bmatrix} 0{,}0673i & -0{,}1591i & -0{,}0811i & 0{,}5188i & -0{,}8333i \end{bmatrix}^T$$

Didapat vektor eigen untuk $\lambda_4 = 0{,}7617$, yaitu:

$$x_4 = \begin{bmatrix} -0{,}6313i & 0{,}5270i & 0{,}2996 & -0{,}4705 & 0{,}1121 \end{bmatrix}^T$$

Didapat vektor eigen untuk $\lambda_5 = 0{,}2527$, yaitu:

$$x_5 = \begin{bmatrix} 0{,}3567i & -0{,}2446i & -0{,}1384 & -0{,}7137 & 0{,}5333 \end{bmatrix}^T$$

3. Mendekomposisikan matriks A menjadi tiga komponen matriks $\boldsymbol{USV^H}$

a. Menyusun matriks S

Nilai singular dari matriks A adalah

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{35{,}2299} = 5{,}9355$$
$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{8{,}1496} = 2{,}8547$$
$$\sigma_3 = \sqrt{\lambda_3} = \sqrt{2{,}6061} = 1{,}6143$$
$$\sigma_4 = \sqrt{\lambda_4} = \sqrt{0{,}7617} = 0{,}8728$$
$$\sigma_5 = \sqrt{\lambda_5} = \sqrt{0{,}2527} = 0{,}5027$$

Maka didapat matriks singular, yaitu

$$S = \begin{bmatrix} 5{,}9355 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}8547 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}6143 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}8728 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}5027 \end{bmatrix}$$

b. Menyusun matriks V dengan persamaan: $v_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i$ maka didapat:

$$S = \begin{bmatrix} 0{,}3230 & -0{,}6045 & 0{,}0673i & -0{,}6313i & 0{,}3567i \\ -0{,}1379 & -0{,}7862 & -0{,}1591i & 0{,}5270i & -0{,}2446i \\ -0{,}9355i & -0{,}0962i & -0{,}0811 & 0{,}2996 & -0{,}1384 \\ 0{,}0011i & -0{,}0118i & -0{,}5188 & -0{,}4705 & -0{,}7137 \\ 0{,}0379i & -0{,}0846i & -0{,}8333 & 0{,}1121 & 0{,}5333 \end{bmatrix}$$

c. Menyusun matriks U dengan persamaan: $u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$ maka didapat matriks sebagai berikut:

$$U = \begin{bmatrix} 0.2184i & 0.2158i & -0.5077 & 0.5085 & 0.6266 \\ -0.1264 & -0.529 & -0.0066i & -0.4268i & 0.4983i \\ 0.8969 & 0.2550 & -0.1678i & 0.2697i & 0.0426i \\ -0.3617i & -0.6183i & 0.0966 & -0.5122 & 0.4225 \\ 0.0066i & -0.0338i & -0.8376 & -0.4106 & -0.3589 \\ 0.0312i & -0.4872i & 0.0569 & 0.1195 & -0.2230 \end{bmatrix}$$

diperhatikan matriks uniter $U \in \mathbb{C}^{6x5}$, agar matriks uniter U menjadi matriks persegi berukuran $6x6$ harus ditambahkan satu kolom lagi, yang mana kolom tersebut saling ortonormal dengan vektor kolom lainnya. Misalnya diambil

$$u_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5i \\ 0{,}1667i \\ -0{,}1667i \\ 0 \\ 0{,}8333 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$U = \begin{bmatrix} 0.2184i & 0.2158i & -0.5077 & 0.5085 & 0.6266 & 0 \\ -0.1264 & -0.529 & -0.0066i & -0.4268i & 0.4983i & 0.5i \\ 0.8969 & 0.2550 & -0.1678i & 0.2697i & 0.0426i & 0.1667i \\ -0.3617i & -0.6183i & 0.0966 & -0.5122 & 0.4225 & -0.1667 \\ 0.0066i & -0.0338i & -0.8376 & -0.4106 & -0.3589 & 0 \\ 0.0312i & -0.4872i & 0.0569 & 0.1195 & -0.2230 & 0.8333 \end{bmatrix}$$

Sehingga bentuk SVD dari matriks A adalah:

$$A = USV^H = \begin{bmatrix} i & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -i & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5i & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ i & i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Menentukan basis-basis ortonormal untuk $U(A)$, $U(A^H)$, $V(A)$dan $V(A^H)$

a. Untuk basis $U(A)$

Basis dari $U(A)$ adalah $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0.2184i \\ -0.1264 \\ 0.8969 \\ -0.3617i \\ 0.0066i \\ 0.0312i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.2158i \\ -0.5209 \\ -0.2550 \\ -0.6182i \\ -0.0338i \\ -0.4872i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.5077 \\ -0.0066i \\ -0.1678i \\ 0.0966 \\ -0.8376 \\ 0.0569 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.5085 \\ -04628i \\ 0.2697i \\ -0.5122 \\ -0.4106 \\ 0.1195 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6266 \\ 0.4983i \\ 0.0426i \\ 0.4225 \\ -0.3589 \\ -0.2230 \end{bmatrix} \right\}$$

b. Untuk basis $U(A^H)$

Basis dari $U(A^H)$ adalah

$$\{u_6\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5i \\ 0.1667i \\ -0.1667 \\ 0 \\ 0.8333 \end{bmatrix}$$

c. Untuk basis $V(A)$

Basis dari $V(A)$ adalah $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0.3230 \\ -0.1379 \\ -0.9355i \\ 0.0011i \\ 0.0379i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.6045 \\ -0.7862 \\ -0.0962i \\ -0.0118i \\ -0.0846i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.0673i \\ -0.1591i \\ -0.0811 \\ -0.5188 \\ -0.8333 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.6313i \\ 0.5270i \\ 0.2996 \\ -0.4705 \\ 0.1121 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.3567i \\ -0.2446i \\ -0.1384 \\ -0.7137 \\ 0.5333 \end{bmatrix} \right\}$$

d. Untuk basis $V(A^H)$

Basis dari $V(A^H)$ adalah $\{v_6\} = \{0\}$

5. Menentukan solusi dari suatu sistem persamaan linear kompleks

$$proy\ \langle B, U(A) \rangle = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle B, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$

$$= \begin{bmatrix} 5{,}3992 \\ 4{,}7629i \\ -2{,}6591i \\ -5{,}8004 \\ 4{,}9765 \\ -3{,}4847 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perhitungan tersebut diperoleh $proy\ \langle B, U(A) \rangle \neq B$ atau $(5{,}3992,\ 4{,}7629i,\ -2{,}6591i,\ -5{,}8004,\ 4{,}9765,\ -3{,}4847) \neq (3,\ 4i, -3i,\ -5,\ 5)$

Karena $proy\ \langle B, U(A) \rangle \neq B$ berarti $B \neq U(A)$. Maka sistem persamaan linear kompleks di atas tidak konsisten, akan tetapi solusi pendekatan terbaiknya dapat dicari, yaitu:

$$X_r = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle B, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \frac{v_i}{\sigma_i}$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}8670i \\ 1{,}6174i \\ -1{,}2786 \\ 1{,}6780 \\ 3{,}2984 \end{bmatrix}$$

Jadi solusi pendekatan terbaik yang diperoleh dari sistem persamaan linear kompleks di atas adalah $x_1 = 1{,}8670i,\ \ x_2 = 1{,}6174i,\ \ x_3 = -1{,}2786,\ \ x_4 = 1{,}6780$ dan $x_5 = 3{,}2984$

Untuk mengetahui bahwa X_r merupakan solusi pendekatan terbaik akan ditunjukkan bahwa $\langle (B - AX_r, u_i) \rangle = 0$ sehingga diperoleh sebagai berikut:

$\langle (B - AX_r, u_1) \rangle = -0{,}0015i$

$\langle (B - AX_r, u_2) \rangle = 0{,}0042i$

$\langle (B - AX_r, u_3) \rangle = -0{,}006$

$\langle (B - AX_r, u_4) \rangle = 0{,}0511$

$\langle (B - AX_r, u_5) \rangle = 0{,}0052$

Contoh 3.2: Diberikan sistem persamaan linear kompleks dengan 8 persamaan dan 7 variabel sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad &+ ix_6 = 3i \\
x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &- ix_6 = i \\
x_2 + ix_3 \qquad\qquad\qquad &+ ix_6 = 7i \\
x_3 + x_4 \qquad\qquad\qquad &= 5 \\
ix_1 \qquad\qquad\qquad x_5 &+ x_6 = 2 \\
2x_4 \qquad\qquad &+ x_6 = 5 \\
-x_1 \qquad + ix_4 \qquad\qquad &+ ix_7 = 3i \\
x_1 \quad + ix_3 \qquad\qquad\qquad &= 5i
\end{aligned}$$

Penyelesaian: Dengan aturan yang sama pada contoh di atas maka di dapat solusi pendekatan terbaik dari sistem persamaan linear kompleks di atas adalah $x_1 = 1{,}5300i,\ \ x_2 = 2{,}3030i,\ \ x_3 = 3{,}3406,\ \ x_4 = 2{,}3344$, $x_5 = 3{,}4432,\ \ x_6 = 0{,}8494$ dan $x_7 = 0{,}8123$

Untuk mengetahui bahwa X_r merupakan solusi pendekatan terbaik akan ditunjukkan bahwa $\langle (B - AX_r, u_i) \rangle = 0$ sehingga diperoleh sebagai berikut:

$\langle (B - AX_r, u_1) \rangle = 0{,}0023i$

$\langle (B - AX_r, u_2) \rangle = 0{,}0059i$

$\langle (B - AX_r, u_3) \rangle = 0{,}0419$

$\langle (B - AX_r, u_4) \rangle = 0{,}0025$

$\langle (B - AX_r, u_5) \rangle = 0{,}0007$

$\langle (B - AX_r, u_6) \rangle = -0{,}0006$

$\langle (B - AX_r, u_7) \rangle = 0{,}0002$

Berdasarkan dua contoh penyelesaian SPL kompleks yang tidak konsisten tersebut dapat disimpulkan bahwa solusi pendekatan terbaik yang diperoleh adalah solusi pendekatan terbaik yang memiliki tingkat kesalahan yang relative kecil, karena solusi pendekatan terbaik dari dua contoh tersebut memiliki hasil kali $\langle (B - AX_r, u_i) \rangle$ yang mendekati nol.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diperoleh hasil penelitian yaitu metode *Singular Value Decomposition* (SVD) dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear kompleks. Berdasarkan contoh yang diberikan merupakan sistem persamaan linear kompleks yang tidak konsisten dan dengan menggunakan langkah-langkah SVD dalam penyelesaian sistem persamaan linear kompleks solusi yang diperoleh adalah solusi pendekatan terbaik, yaitu:

a. Contoh 1 dengan 6 persamaan dan 5 variabel diperoleh solusi pendekatan terbaiknya adalah :
$x_1 = 1{,}8670i,\ \ x_2 = 1{,}6174i,$
$x_3 = \quad -1{,}2786,\ \ x_4 = 1{,}6780$
dan $x_5 = 3{,}2984$.

b. Contoh 2 dengan 8 persamaan dan 7 variabel diperoleh solusi pendekatan terbaiknya adalah :
$x_1 = 1{,}5300i,\ \ x_2 = 2{,}3030i,$
$x_3 = 3{,}3406,\ \ x_4 = 2{,}3344$,
$x_5 = 3{,}4432,\ \ x_6 = 0{,}8494$ dan
$x_7 = 0{,}8123$.

DAFTAR PUSTAKA

Ahmad, Irdam Haidir, dan Lucia Ratnasari (2010). ‘Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Menggunakan Analisis SVD”. *UEJS (Undip E-Journal System Portal)*, Vol. 13;40-45.

Kalman Dan (1996). “A Singularly Valuable Decomposition : The SVD of a Matrix”. The College Mathematics Journal, Vol. 27 No. 1 January.

Adiwijaya dkk (2009). *Dekomposisi Nilai Singular dan Discrete Fourier Transform untuk noise Filtering pada Citra Digital*. Seminar nasional Aplikasi Teknologi Informasi (SNATI). Yogyakarta.

Anton, Howard (2000). *“Elementary Linear Algebra”,* Eighth Edition. John Wiley, New York.

Churchill, Ruel V, dan James Ward Brown (1990). *“Complex Variables and Applications”*. Fifth Edition. McGraw-Hill, Singapore.

Leon, Steven J (2001). *“Aljabar Linear dan Aplikasinya”,* Edisi Kelima. Erlangga, Jakarta.

Lipschutz, Seymour, dan Marc Lars Lipson (2006). *“Aljabar Linear Schaum’s”.* Edisi Ketiga. Erlangga, Jakarta.

Nicholson, W. Keith (2001). *“Elementary Linear Algebra”*. First Edition. McGraw-Hill, Singapore.

Sutojo, T. dkk (2010). *“Teori dan Aplikasi Aljabar Linear dan Matriks”.* Andi, Yogyakarta.

Mariya Dina (2008). Menentukan Invers Moore Penrose dari suatu Matriks dengan Menggunakan Dekomposisi Nilai Singular. Semarang. Universitas Diponegoro.