METODE SECANT-MIDPOINT NEWTON UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN NONLINEAR

Supriadi Putra

sputra@unri.ac.id

Laboratorium Komputasi Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya Pekanbaru (28293)

ABSTRAK

Pada artikel ini akan dibahas metode baru yang dikembangkan dari kombinasi metode Secant dan metode Midpoint Newton untuk menyelesaikan persamaan nonlinear. Penerapan metode Midpoint Newton yang memiliki orde kekonvergenan tiga kedalam metode Secant yang memiliki orde kekonvergenan superlinear akan menghasilkan metode dengan orde kekonvergenan empat. Uji komputasi akan diberikan untuk menunjukkan bahwa metode baru ini cukup sebanding dengan metode Secant-Trapesium Newton yang diusulkan oleh Jain [2] terhadap beberapa contoh persamaan nonlinear.

Kata Kunci: Metode Newton, Metode Midpoint Newton, Metode Secant, Metode Secant-Midpoint Newton, Orde Kekonvergenan.

ABSTRACT

This article discuss a new method that was developed from a combination of the Secant method and Midpoint Newton method to solve nonlinear equations. Application of Midpoint Newton method of the order of convergence three into the Secant method has order of convergence superlinear will generate method with order of convergence four. Numerical computation will be given to show that the new method is quite comparable with Secant-Trapezoid Newton method that proposed by Jain [2] for some examples of nonlinear equations.

Key Words: Newton's method, Midpoint Newton method, Secant's method, Secant-Midpoint Newton method, Order of Convergence.

PENDAHULUAN

Menentukan akar dari suatu persamaan nonlinear,

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

adalah masalah yang sering muncul dari penerapan matematika dalam menyelesaikan masalah teknik dan sains. Dalam banyak kasus, menemukan akar analitik dari suatu persamaan nonlinear terkadang tidak memungkinkan. Untuk alasan itulah metode numerik banyak dikembangkan.

Dua metode numerik dasar yang sering digunakan adalah metode Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\dots \tag{2}$$

dan metode Secant

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n). \tag{3}$$

Dalam beberapa tahun terakhir pengembangan metode iterasi untuk menentukan akar persamaan nonlinear telah dilakukan dengan cara memodifikasi metode yang ada ataupun mengkombinasikan pemakaiannya secara bersama-sama. Seperti yang dilakukan oleh Weerakoon dan Fernando [6] dengan menggunakan teorema Newton

$$f(x) = f(x_n) + \int_{x_n}^{x} f'(t)dt \tag{4}$$

dan mengaproksimasi nilai integral dengan aturan Trapesium, yaitu

$$\int_{x_n}^{x} f'(t)dt = \left(\frac{x - x_n}{2}\right)\left(f'(x) + f'(x_n)\right) \qquad (5)$$

Apabila persamaan (5) ini disubstitusikan ke persamaan (4) akan diperoleh formula iterasi yang dikenal dengan nama metode Trapesium Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n^*) + f'(x_n)}, \qquad (6)$$

dimana x_n^* dihitung dengan menggunakan metode Newton. Metode Trapesium Newton ini telah ditunjukkan Weerakoon dan Fernando [6] memiliki orde kekonvergenan tiga.

Apabila nilai integral diaproksimasi dengan metode Midpoint (titik tengah), yaitu

$$\int_{x_n}^{x} f'(t)dt = (x - x_n) f'\left(\frac{x - x_n}{2}\right) \qquad (7)$$

Ozban [5] berhasil memperoleh formula yang dikenal dengan nama metode Midpoint Newton dengan bentuk iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{x_n^* + x_n}{2}\right)}, \qquad (8)$$

dimana x_n^* dihitung dengan menggunakan metode Newton. Metode Midpoint Newton ini telah ditunjukkan memiliki orde kekonvergenan tiga.

Perkembangan selanjutnya Jain [2] mengkombinasikan pengunaan metode Secant (3) dan Trapesium Newton (6) ini dengan bentuk

$$x_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} f(\bar{x}_n), \qquad (9)$$

dimana

$$\bar{x}_n = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n^*) + f'(x_n)}, \qquad (10)$$

dengan x_n^* dihitung dengan menggunakan metode Newton. Metode ini adalah varian baru dan telah ditunjukkan memiliki orde kekonvergenan empat.

Dengan menggunakan ide Jain [2] ini, penulis akan mengkombinasikan pemakaian metode Secant dan Midpoint Newton.

METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian ini akan dilakukan melalui kajian pustaka terhadap beberapa metode iterasi untuk menyelesaikan persamaan nonlinear, diantaranya [1-6]. Selanjutnya metode yang diusulkan akan formulasikan. Untuk meyakinkan metode ini dapat digunakan, maka akan dilakukan kajian teoritis untuk menunjukkan orde kekonvergenannya.

Untuk mendukung hasil yang diperoleh akan dilakukan uji komputasi dengan metode yang sebanding yang dalam hal ini digunakan metode yang diusulkan oleh Jain [2] terhadap beberapa contoh persamaan nonlinear. Berikut adalah beberapa definisi yang akan digunakan.

<u>Definisi 1</u>

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi real dengan akar sederhana α dan $\{x_n\}$ adalah barisan bilangan real yang konvergen ke α. Apabila $e_n = x_n - \alpha$ adalah error pada iterasi ke-*n*, maka relasi

$$e_{n+1} = Ce_n^p + O\left(e_n^{p+1}\right), \qquad (11)$$

disebut persamaan error.

Apabila persamaan error ini dapat ditentukan untuk sembarang metode iterasi, maka nilai *p* disebut sebagai orde kekonvergenan.

<u>Definisi 2</u>

Misalkan $x_{n+1}, x_n,$ dan x_{n-1} adalah tiga buah nilai iterasi berturut-turut yang dekat dengan α maka orde kekonvergenan secara komputasi (COC) dapat diaproksimasi dengan

$$COC \cong \frac{\ln\left|(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)\right|}{\ln\left|(x_n - \alpha)/(x_{n-1} - \alpha)\right|}. \qquad (12)$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Metode Secant – Midpoint Newton

Dengan menggunakan ide Jain [2] di atas, apabila penggunaan metode Trapesium Newton

(6) diganti dengan metode Midpoint Newton (8), akan memberikan bentuk iterasi baru yaitu

$$x_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} f(\bar{x}_n), \qquad (13)$$

dimana

$$\bar{x}_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{x_n^* + x_n}{2}\right)}, n = 0,1,2,\ldots \qquad (14)$$

dengan x_n^* dihitung dengan menggunakan metode Newton. Metode ini diperkenalkan dengan nama metode Secant-Midpoint Newton.

Analisa Kekonvergenan

Teorema 1

Misalkan $\alpha \in D$ adalah akar sederhana dari fungsi terdiferensialkan secukupnya $f : D \subseteq R \rightarrow R$ untuk interval buka D dengan $f'(\alpha) \neq 0.$ Jika x_0 cukup dekat ke α maka metode Secant-Midpoint Newton yang diberikan oleh persamaan (13) dan (14) memiliki orde kekonvergenan empat.

Bukti:

Misalkan e_n dan $\bar{e}_n$ masing-masing adalah error untuk x_n dan $\bar{x}_n$, yaitu $x_n = \alpha + e_n$ dan $\bar{x}_n = \alpha + \bar{e}_n$.

Telah ditujukkan oleh Ozban [5] error metode Midpoint Newton (8) diberikan oleh

$$\bar{e}_n = \left(C_2^2 - \tfrac{1}{4} C_3\right) e_n^3 + \mathrm{O}(e_n^4) = A e_n^3 + \mathrm{O}(e_n^4). \qquad (15)$$

dimana

$$C_2 = \frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}, \; C_3 = \frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

dan $\quad A = C_2^2 - \dfrac{C_3}{4}.$

Polinomial Taylor dari $f(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$ dapat dituliskan dalam bentuk

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!} e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!} e_n^3 + \mathrm{O}(e_n^4)$$

Karena $f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) \neq 0$ maka setelah disederhanakan persamaan terakhir menjadi

$$f(x_n) = e_n f'(\alpha)\left(1 + C_2 e_n + C_3 e_n^2 + \mathrm{O}(e_n^3)\right) \qquad (16)$$

Selanjutnya dengan menggunakan (15) diperoleh

$$f(\bar{x}_n) = f(\alpha + \bar{e}_n) = \bar{e}_n f'(\alpha) + \mathrm{O}(\bar{e}_n^2)$$

atau

$$f(\bar{x}_n) = A e_n^3 f'(\alpha) + \mathrm{O}(e_n^6). \qquad (17)$$

Sehingga dengan menggunakan persamaan (16) dan (17) diperoleh

$$\begin{aligned} f(\bar{x}_n) - f(x_n) &= \left[A e_n^3 f'(\alpha) + \mathrm{O}(e_n^6)\right] \\ &\quad - \left[e_n f'(\alpha)\left(1 + C_2 e_n + C_3 e_n^2 + \mathrm{O}(e_n^3)\right)\right] \\ &= -\, e_n f'(\alpha)\left(1 + C_2 e_n - (A - C_3)e_n^2 + \mathrm{O}(e_n^3)\right) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} &\left[1 + C_2 e_n - (A - C_3)e_n^2 + \mathrm{O}(e_n^3)\right]^{-1} \\ &= 1 - \left[C_2 e_n - (A - C_3)e_n^2 + \mathrm{O}(e_n^3)\right] \\ &\quad + \left[C_2 e_n - (A - C_3)e_n^2 + \mathrm{O}(e_n^3)\right]^2 + \mathrm{O}(e_n^3) \\ &= 1 - \left[C_2 e_n - (A - C_3)e_n^2 + \mathrm{O}(e_n^3)\right] + C_2^2 e_n^2 + \mathrm{O}(e_n^3) \\ &= 1 - C_2 e_n - (A - C_3 + C_2^2)e_n^2 + \mathrm{O}(e_n^3). \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{1}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} = -\frac{1}{e_n f'(\alpha)} \times \left[1 - C_2 e_n - (A - C_3 + C_2^2)e_n^2 + \mathrm{O}(e_n^3)\right] \qquad (18)$$

Kita juga mempunyai,

$$\bar{x}_n - x_n = \left(\alpha + \bar{e}_n\right) - \left(\alpha + e_n\right) = \bar{e}_n - e_n.$$

atau dengan menggunakan persamaan (15) menjadi

$$\bar{x}_n - x_n = \mathrm{A}e_n^3 - e_n + \mathrm{O}(e_n^4). \qquad (19)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (17)-(19) diperoleh

$$\begin{aligned}
&\frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} f(\bar{x}_n) \\
&= \left[Ae_n^3 - e_n + \mathrm{O}(e_n^4)\right] \times \left[Ae_n^3 f'(\alpha) + \mathrm{O}(e_n^6)\right] \\
&\quad \times \frac{-1}{e_n f'(\alpha)} \left[1 - C_2 e_n - (A - C_3 + C_2^2)e_n^2 + \mathrm{O}(e_n^3)\right] \\
&= \left[Ae_n^3 - e_n + \mathrm{O}(e_n^4)\right] \times e_n f'(\alpha) \left[Ae_n^2 + \mathrm{O}(e_n^6)\right] \\
&\quad \times \frac{-1}{e_n f'(\alpha)} \left[1 - C_2 e_n - (A - C_3 + C_2^2)e_n^2 + \mathrm{O}(e_n^3)\right] \\
&= \left[Ae_n^3 - A^2 e_n^5 + \mathrm{O}(e_n^6)\right] \\
&\quad \times \left[1 - C_2 e_n - (A - C_3 + C_2^2)e_n^2 + \mathrm{O}(e_n^3)\right].
\end{aligned}$$

atau

$$\frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} f(\bar{x}_n) = Ae_n^3 - AC_2 e_n^4 + \mathrm{O}(e_n^5) \qquad (20)$$

Akhirnya diperoleh

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= x_{n+1} - \alpha \\
&= \bar{x}_n - \frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} f(\bar{x}_n) - \alpha \\
&= (\bar{x}_n - \alpha) - \frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} f(\bar{x}_n) \\
&= \bar{e}_n - \frac{\bar{x}_n - x_n}{f(\bar{x}_n) - f(x_n)} f(\bar{x}_n).
\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (15) dan (20) ke dalam persamaan terakhir ini akan diperoleh

$$e_{n+1} = Ae_n^3 - \left(Ae_n^3 - AC_2 e_n^4 + \mathrm{O}(e_n^5)\right)$$

atau

$$e_{n+1} = AC_2 e_n^4 + \mathrm{O}(e_n^5). \qquad (21)$$

Berdasarkan Definisi 2, maka dapat kita katakan bahwa metode Secant-Midpoint Newton memiliki orde kekonvergenan empat□

Uji Komputasi

ada bagian ini, akan dilakukan uji komputasi untuk membandingkan banyak iterasi (***n***), banyak fungsi yang dievaluasi pada setiap iterasinya (**NOFE**) dan Orde kekonvergenan komputasi (**COC**) untuk dua metode dengan orde kekonvergenan empat yang dibandingkan : metode Secant-Trapesium Newton (**Sec-TrapNewt**) dan metode Secant-Midpoint Newton (**Sec-MidNewt**).

Persamaan nonlinear yang digunakan adalah seperti yang juga digunakan oleh Weerakon dan Fernando [6], yaitu :

1. $f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10,$
   dengan $\alpha = 1.365230013414097$
2. $f_2(x) = \sin^2(x) - x^2 + 1,$
   dengan $\alpha = 1.404491648215341$
3. $f_3(x) = x^2 - e^x - 3x + 2,$
   dengan $\alpha = 0.257530285439861$
4. $f_4(x) = \cos(x) - x,$
   dengan $\alpha = 0.739085133215161$
5. $f_5(x) = (x-1)^3 - 1,$
   dengan $\alpha = 2.000000000000000$
6. $f_6(x) = x^3 - 10,$
   dengan $\alpha = 2.154434690031884$
7. $f_7(x) = xe^{x^2} - \sin^2(x) + 3\cos(x) + 5,$
   dengan $\alpha = -1.207647827130919$
8. $f_8(x) = x^2 \sin^2(x) + e^{x^2 \cos(x)\sin(x)} - 28,$
   dengan $\alpha = 3.437471743421766$
9. $f_7(x) = e^{x^2+7x-30} - 1,$
   dengan $\alpha = 3.000000000000000.$

Dalam melakukan komputasi, kriteria pemberhentian iterasi yang digunakan adalah sama untuk semua metode, yaitu apabila:

- nilai mutlak errror $|x_n - \alpha| < toleransi,$
- nilai mutlak fungsi $|f(x_n)| < toleransi,$
- iterasi maksimum telah terpenuhi.

Dalam hal ini *toleransi* yang digunakan adalah sebesar 1×10^{-15} dan jumlah iterasi maksimum adalah sebanyak 100 iterasi.

Hasil komputasi dari metode yang dibandingkan disajikan dalam Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Perbandingan Hasil Uji Komputasi untuk Beberapa Metode Iterasi

Persamaan nonlinear	x_0	(*n*, NOFE, COC)						Akar (α)
		Sec-TrapNewt			Sec-MidNewt			
$f_1(x)=0$	-0.5	8	32	4.00	7	28	4.00	1.365230013414097
	1.0	3	12	4.00	3	12	4.00	
$f_2(x)=0$	1.0	3	12	3.99	3	12	3.99	1.404491648215341
	3.0	3	12	4.00	3	12	3.97	
$f_3(x)=0$	2.0	3	12	4.00	3	12	4.00	0.257530285439861
	3.0	3	12	3.92	3	12	4.09	
$f_4(x)=0$	1.0	2	8	3.80	2	8	3.95	0.739085133215161
	-0.3	3	12	3.98	3	12	3.98	
$f_5(x)=0$	3.5	4	16	4.00	4	16	4.00	2.000000000000000
	2.5	3	12	4.00	3	12	4.00	
$f_6(x)=0$	1.5	3	12	3.99	3	12	4.00	2.154434690031884
	3.0	3	12	4.00	3	12	4.00	
$f_7(x)=0$	-2.0	4	16	3.99	4	16	4.00	-1.207647827130919
	2.0	div			17	68	4.00	
$f_8(x)=0$	3.5	3	12	4.00	3	12	4.00	3.437471743421766
	5.0	6	24	4.00	6	24	4.00	
$f_9(x)=0$	3.5	6	24	3.98	6	24	4.00	3.000000000000000
	3.25	5	20	4.00	4	12	3.99	

Pada **Tabel 1** di atas, untuk setiap metode yang dibandingkan dihitung ***n*** untuk banyak iterasi, **NOFE** untuk banyak fungsi yang dievaluasi pada setiap iterasinya, dan **COC** untuk orde kekonvergenan komputasi. **Div** menunjukkan bahwa metode divergen atau tidak menemukan akar. Secara umum hasil komputasi menunjukkan kedua metode memilki orde kekonvergenan empat. Dilihat dari banyak iterasi dan NOFE, metode Secant-Midpoint Newton yang diusulkan cukup sebanding dengan metode Secant-Trapesium Newton.

KESIMPULAN

Dalam artikel ini, kita telah mendisikusikan metode baru yang dikembangkan dari kombinasi metode Secant dan metode Midpoint Newton. Metode ini memerlukan dua kali evaluasi fungsi dan dua kali evaluasi turunan pertama fungsi. Melalui uji komputasi, kita juga telah menunjukkan bahwa kedua metode memiliki orde kekonvergenan empat. Secara umum metode iterasi Secant-Midpoint Newton yang diusulkan cukup sebanding dengan metode Secant-Trapesium Newton yang sebelumnya diusulkan Jain [2]. Bahkan relatif lebih baik, terlihat dari hasil komputasi dimana untuk persamaan nonlinear $f_7(x)=0$ dengan $x_0=2.0$ metode Secant-Trapesium Newton gagal tetapi Secant-Midpoint Newton sukses meskipun dengan iterasi yang cukup lama, yaitu 17 iterasi.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Atkinson. K.E. (1989), *An Introduction to Numerical Analysis*, second ed., John Wiley & Sons, New York.

[2] Jain, D. (2013). Family of Newton-like methods with fourt-order convergence. *Int. of Journal Computer Mathematics*, DOI:10.1080/00207160.2012.746670.

[3] Sharma, J.R. Guha, R.K. and Sharma R,. (2011). Some modified newton's methods with fourth-order convergence, *Advances in applied Science Research*, 2(1): 240-247.

[4] Frontini M., Sormani E, (2003), Some variants of Newton's method with third-order convergence, Appl. Math. Comput. 140, 419–426.

[5] Ozban, A.Y. (2004). Some New Variants of Newton's Methods, *App. Math. Letter 17*, 677-682.

[6] Weerakoon, S. & Fernando, T. G. I. 2000. A variant of Newton's Method With Accelerated Third-Order Convergence. *Applied Mathematics Letters*. 13: 87–93.