SOLUSI NON NEGATIF PARSIAL SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER ORDE SATU

Muhafzan
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Andalas, Kampus Unand Limau Manis, Padang, 25163
email: muhafzan@gmail.com

ABSTRAK

Dalam artikel ini dikaji kenonnegatifan parsial solusi sistem persamaan diferensial linier orde satu. Kajian dilakukan dengan memanfaatkan hasil-hasil tentang matriks non negatif parsial yang diajukan oleh Noutsos dkk. (2008). Selanjutnya dikonstruksi suatu syarat cukup yang menjamin kenonnegatifan parsial solusi sistem persamaan diferensial linier orde satu tersebut. Selain itu disajikan beberapa contoh yang mengilustrasikan hasil utama.

Kata Kunci: Non negatif parsial, non negatif parsial eksponensial.

ABSTRACT

In this paper, we will study the partially nonnegativity of the solution for the system of first order linear differential equation. The study utilise the results from Noutsos et al. (2008) about partially nonnegativity of the matrices. Furthermore, a sufficient condition for partially nonnegativity of solution is established. Some examples are given to illustrate the main result.

***Key Words**: Partial nonnegative, partial nonnegative exponential.*

PENDAHULUAN

Sistem persamaan diferensial linier orde satu lazimnya diberikan sebagai persamaan berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0}, \quad (1)$$

dimana $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ dan $t \in \mathbb{R}$. Persamaan ini sering dijumpai dalam berbagai aplikasi, dan solusinya dengan mudah dapat ditentukan, yaitu

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x_0} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}B\,\mathbf{u}(s)ds. (2)$$

Dalam kajian tentang teori persamaan diferensial, biasanya positif atau tidaknya suatu solusi sangat jarang diperhatikan. Padahal dalam prakteknya, vektor solusi ini, entri-entrinya dapat bernilai non negatif, yakni $\mathbf{x}(t) \succcurlyeq \mathbf{0}$, tapi mungkin saja bernilai non positif, yakni $\mathbf{x}(t) \preccurlyeq \mathbf{0}$. Tentunya, kenonnegatifan atau kenonpositifan ini bergantung kepada matriks atau parameter-parameter penyusunnya. Dalam Kaczorek (2001) dinyatakan bahwa solusi sistem (1) dikatakan non negatif jika untuk setiap syarat awal $\mathbf{x_0} \succcurlyeq \mathbf{0}$ dan $\mathbf{u}(t) \succcurlyeq \mathbf{0}$ maka $\mathbf{x}(t) \succcurlyeq \mathbf{0}, \forall\, t \geq 0$.

Dalam berbagai aplikasi, kadang-kadang diperlukan bahwa kenonnegatifan dari solusi tersebut hanya diperlukan secara parsial saja. Dalam makalah ini diperkenalkan terminologi tentang solusi non negatif parsial dari sistem persamaan diferensial linier. Solusi $\mathbf{x}(t)$ untuk sistem linier (1) dikatakan non negatif parsial jika ada $t_0 \in [0,\infty)$ sedemikian sehingga $\mathbf{x}(t) \succcurlyeq \mathbf{0}, \forall\, t \geq t_0$.

Kajian tentang kenonnegatifan parsial dari solusi ini merupakan kelanjutan dari kajian tentang matriks non negatif parsial yang diajukan oleh Noutsos, dkk., (2008).

Dalam artikel ini akan dikaji syarat yang menjamin agar solusi sistem persamaan diferensial (1) adalah nonnegatif parsial.

Beberapa kajian untuk kenonnegatifan solusi untuk sistem persamaan diferensial linier yang berbeda dapat dilihat dalam Kaczorek (2001), Kaykobad (1985), Makino (1984), dan Wang dan Erbe (1994). Namun demikian semua literatur yang disebutkan ini, tidak satupun yang mengkaji tentang solusi non negatif parsial dari sistem persaman (1).

METODE

Terlebih dahulu diperkenalkan terminologi yang digunakan sepanjang makalah ini. Suatu matriks riil $A = [a]_{ij}$ berukuran $n \times m$ dikatakan nonnegatif, dinotasikan $A \succcurlyeq O$, jika $a_{ij} \geq 0, \forall i, j$, dimana O adalah matriks nol. Suatu matriks $A_{n\times n}$ dikatakan matriks Metzler jika $a_{ij} \geq 0$ untuk setiap $i \neq j$. Selanjutnya, matriks $A_{n\times n}$ dikatakan non negatif parsial jika ada bilangan bulat positif k_0 sedemikian sehingga $A^k \succcurlyeq O$ untuk setiap $k \geq k_0$. Bilangan bulat positif terkecil k_0 yang memenuhi sifat ini disebut indeks pangkat dari A, dan dinotasikan dengan $k_0(A)$. Selain itu, ia dikatakan eksponensial non negatif jika $e^{At} \succcurlyeq O$ untuk setiap $t \geq 0$. Matriks $A_{n\times n}$ yang bersifat ada $t_0 \in [0, \infty)$ sedemikian sehingga $e^{At} \succcurlyeq O$ untuk setiap $t \geq t_0$ disebut sebagai matriks eksponensial non negatif parsial. Bilangan non negatif terkecil t_0 ini disebut sebagai indeks eksponensial dari A, dan dinotasikan dengan $t_0(A)$ (Noutsos dkk, 2008). Perlu diingat bahwa matriks e^{At} didefinisikan sebagai deret tak hinga

$$e^{At} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tA)^j}{j!}$$

$$= I + tA + \frac{(tA)^2}{2!} + \cdots + \frac{(tA)^p}{p!} + \cdots$$

dimana $t \in \mathbb{R}$ dan adalah matriks identitas berukuran $n \times n$.

Untuk setiap matriks $A_{n\times n}$, spektrum dari A dinyatakan dengan $\sigma(A)$, dan radius spektralnya dinyatakan dengan $\rho(A)$, didefinisikan sebagai $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Beberapa hasil berikut berguna untuk mendapatkan hasil utama.

Definisi 1. (Meyer, 2001) Matriks $A_{n\times n}$ dikatakan

(a). *bersifat Perron Frobenius jika* $\rho(A) > 0$ *dan terdapat suatu vektor eigen non negatif yang berkaitan dengan* $\rho(A)$.

(b). *bersifat Perron Frobenius kuat jika*

(i). A *bersifat Perron Frobenius*

(ii). $\rho(A)$ *merupakan nilai eigen sederhana sedemikian sehingga* $\rho(A) > |\lambda|, \forall \lambda \in \sigma(A), \lambda \neq \rho(A)$

(iii). *Terdapat vektor eigen positif yang berkaitan dengan* $\rho(A)$.

Proposisi 1. (Noutsos, dkk., 2008) *Matriks* $A_{n\times n}$ *adalah eksponensial non negatif jika dan hanya jika* A *adalah suatu matriks Metzler.*

HASIL UTAMA

Proposisi berikut berguna untuk mendapatkan hasil utama.

Proposisi 2. *Matriks* $A_{n\times n}$ *adalah non negatif parsial jika dan hanya jika ia memiliki sifat Perron Frobenius kuat.*

Bukti.

Misalkan A adalah suatu matriks non negatif parsial, maka terdapat bilangan bulat $k_0 > 0$ sedemikian sehingga $A^k \succcurlyeq O$ untuk setiap $k \geq k_0$. Akibatnya, matriks A^k memiliki nilai eigen dominan positif, sebutlah α_1. Misalkan $\mathbf{x_1} \succcurlyeq \mathbf{0}$ adalah vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen α_1. Maka $\alpha_1^{1/k} > 0$ adalah nilai eigen dari A dengan vektor eigennya $\mathbf{x}_1$. Karena hal ini terjadi untuk setiap $k \geq k_0$, maka A memiliki sifat strong Frobenius.

Sebaliknya, misalkan A memiliki sifat strong Frobenius, maka terdapat suatu matriks non singular V sedemikian sehingga

$$A = VJV^{-1},$$

dimana J adalah suatu matriks Jordan yang terkait dengan matriks A. Misalkan γ_1 adalah nilai eigen A dengan $\gamma_1 = \rho(A)$ merupakan unsur pertama pada diagonal utama dari matriks J. Maka matriks A dapat ditulis menjadi

$$A = \begin{pmatrix} V_1 & V_{n,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & O \\ O & J_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1^T \\ Y_{n-1,n} \end{pmatrix},$$

dimana Y_1^T merupakan baris pertama dari matriks V^{-1} dan $Y_{n-1,n}$ merupakan matriks yang dibentuk oleh $n-1$ baris terakhir dari matriks V^{-1}. Karena A memiliki sifat strong Frobenius, maka V_1 merupakan vektor eigen positif. Transpos dari matriks A adalah

$$A^T = (Y_1 \quad Y_{n-1,n}^T)\begin{pmatrix} \gamma_1 & O \\ O & J_{n-1,n-1}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1^T \\ V_{n,n-1}^T \end{pmatrix}.$$

Akibatnya, ada matriks permutasi $P \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$ sedemikian sehingga

$$J_{n-1,n-1} = P^T J_{n-1,n-1}^T P.$$

Oleh karena itu,

$$A^T = (Y_1 \quad Y_{n-1,n}^T)\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & P^T \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & O \\ O & J_{n-1,n-1}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & P^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1^T \\ V_{n,n-1}^T \end{pmatrix}$$

$$= (Y_1 \quad \bar{Y}_{n-1,n}^T)\begin{pmatrix} \gamma_1 & O \\ O & J_{n-1,n-1}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1^T \\ \bar{V}_{n,n-1}^T \end{pmatrix},$$

dimana

$$\bar{Y}_{n-1,n}^T = Y_{n-1,n}^T P \text{ dan } \bar{V}_{n,n-1}^T = P^T V_{n,n-1}^T.$$

Jelas bahwa matriks

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & O \\ O & J_{n-1,n-1}^T \end{pmatrix}$$

merupakan matriks Jordan yang terkait dengan matriks A^T. Akibatnya Y_1 merupakan vektor eigen yang terkait dengan nilai eigen dominan γ_1. Mudah untuk dibuktikan bahwa jika A memiliki sifat strong Perron Frobenius, maka demikian juga A^T. Akibatnya, Y_1 merupakan vektor eigen positif. Sehingga diperoleh

$$A^k = (V_1 \quad V_{n,n-1})\begin{pmatrix} \gamma_1^k & O \\ O & J_{n-1,n-1}^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1^T \\ Y_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, diperoleh

$$\frac{1}{\gamma_1^k}A^k = (V_1 \quad V_{n,n-1})\begin{pmatrix} 1 & O \\ O & \frac{1}{\gamma_1^k}J_{n-1,n-1}^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1^T \\ Y_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

dan

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\gamma_1^k}A^k = \lim_{k\to\infty}\left(V_1 Y_1^T + \frac{1}{\gamma_1^k} V_{n,n-1} J_{n-1,n-1}^k\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} V_1 Y_1^T.$$

Karena V_1 dan Y_1 adalah vektor-vektor eigen positif, maka

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\gamma_1^k}A^k = \lim_{k\to\infty} V_1 Y_1^T > 0.$$

Fakta terakhir ini memperlihatkan bahwa terdapat bilangan bulat $k_0 > 0$ sedemikian sehingga $A^k \geq 0$ untuk setiap $k \geq k_0$. Jadi A merupakan matriks non negatif parsial. ■

Proposisi 3. *Matriks $A_{n\times n}$ adalah eksponensial non negatif parsial jika dan hanya jika $A + \alpha I$ merupakan suatu matriks non negatif parsial untuk suatu $\alpha \geq 0$.*

Bukti.
Misalkan A adalah matriks eksponensial non negatif parsial. Karena $(e^A)^k = e^{Ak}$, maka e^A adalah matriks non negatif parsial. Akibatnya, berdasarkan Proposi 1, maka matriks e^A memiliki sifat Perron-Frobenius kuat. Perhatikan himpunan

$$\sigma(e^A) = \{e^\gamma : \gamma \in \sigma(A)\},$$

maka $r(e^A) = e^\gamma$ untuk suatu $\gamma \in \sigma(A)$. Untuk setiap $\mu \in \sigma(A)$, dimana $\mu \neq \gamma$, berlaku

$$\begin{aligned} e^\gamma > |e^\mu| &= \left|e^{Re(\mu)+i\,Im(\mu)}\right| \\ &= \left|e^{Re(\mu)}e^{i\,Im(\mu)}\right| \\ &= \left|e^{Re(\mu)}\left(\cos(Re(\mu)) + i\sin(Im(\mu))\right)\right| \\ &= \sqrt{e^{2Re(\mu)}\left(\cos^2(Re(\mu)) + \sin^2(Im(\mu))\right)} \\ &= e^{Re(\mu)}, \end{aligned}$$

dimana $Re(\mu)$ menyatakan bagian riil dari μ dan $Im(\mu)$ menyatakan bagian imaginer μ. Sehingga, γ adalah absis spektral dari A, yakni $\gamma > Re(\mu)$ untuk setiap $\mu \in \sigma(A)$ dengan $\mu \neq \gamma$. Ini bermakna bahwa ada $\alpha > 0$ sedemikian sehingga

$$\gamma + \alpha > |\mu + \alpha|, \ \ \mu \in \sigma(A), \ \ \mu \neq \gamma.$$

Selanjutnya, karena ruang eigen dari matriks $A + \alpha I$ sama dengan ruang eigen dari matriks e^{A}, maka matriks $A + \alpha I$ memiliki sifat Perron Frobenius kuat. Akibatnya, matriks $A + \alpha I$ adalah non negatif parsial.

Sebaliknya, misalkan $A + \alpha I$ merupakan suatu matriks non negatif parsial untuk suatu $\alpha \geq 0$ dan k_0 adalah suatu bilangan bulat positif sedemikian sehingga $(A + \alpha I)^k \succcurlyeq O$ untuk setiap $k \geq k_0$. Maka terdapat $t_0 > 0$ sedemikian sehingga $(k_0 - 1)$ suku pertama dari deret

$$e^{(A+\alpha I)t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(A + \alpha I)^j t^j}{j\,!}$$

didominasi oleh suku-suku sisanya, sehingga setiap unsur dari matriks $e^{(A+\alpha I)}$ adalah non negatif untuk setiap $t \geq t_0$, yang menunjukkan bahwa A adalah matriks ekponensial non negatif parsial. ■

Proposisi 4. *Untuk sistem* (1), *jika* $B \succcurlyeq O$, $\mathbf{x_0} \succcurlyeq \mathbf{0}$ *dan* $\mathbf{u}(t) \succcurlyeq \mathbf{0}$ *untuk setiap* $t \geq 0$ *dan* terdapat $\alpha \geq 0$ sedemikian sehingga $A + \alpha I$ *merupakan suatu matriks non negatif parsial, maka solusi* $\mathbf{x}(t)$ *untuk sistem* (1) *adalah non negatif parsial*.

Bukti.
Misalkan $A + \alpha I$ merupakan suatu matriks non negatif parsial untuk suatu $\alpha \geq 0$, maka matriks A adalah eksponensial positif parsial. Akibatnya ada $t_0 \in [0, \infty)$ sedemikian sehingga $e^{At} \succcurlyeq O$ untuk setiap $t \geq t_0$. Karena $\mathbf{x_0} \succcurlyeq O$, maka $e^{A(t-t_0)}\mathbf{x_0} \succcurlyeq O$. Selain itu, karena $B \succcurlyeq O$ dan $\mathbf{u}(t) \succcurlyeq O$ untuk setiap $t \geq 0$, maka

$$\int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} B\, \mathbf{u}(s) ds \succcurlyeq O.$$

Oleh karena itu, solusi $\mathbf{x}(t)$ untuk sistem (1) adalah non negatif parsial. ■

Contoh 1. Contoh berikut mengilustrasikan keberlakuan Proposisi 4. Diberikan sistem (1) dimana

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 100 \end{pmatrix}$$

dan $u(t) = t$. Untuk $\alpha = 0$, diperoleh

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \ A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Jadi $k_0(A) = 2$, yang menunjukkan bahwa A adalah suatu matriks non negatif parsial. Berdasarkan Proposisi 3, maka A adalah suatu matriks eksponensial non negatif parsial. Sebagai ilustrasi, matriks e^{At} untuk $t = 1, 2$ berturut-turut adalah

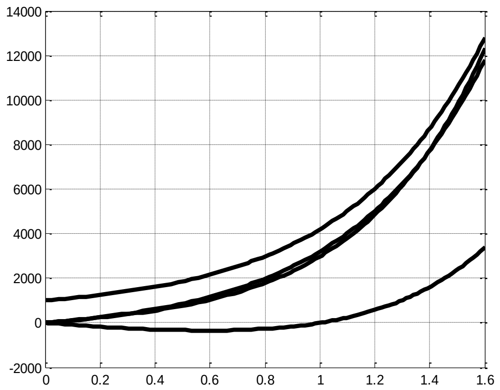
$$e^{A} = \begin{pmatrix} 1{,}5431 & 1{,}1752 & 2{,}3404 & -0{,}0100 \\ 1{,}1752 & 1{,}5431 & 4{,}0487 & 2{,}9625 \\ 0 & 0 & 4{,}1945 & 3{,}1945 \\ 0 & 0 & 3{,}1945 & 4{,}1945 \end{pmatrix},$$

$$e^{2A} = \begin{pmatrix} 3{,}7622 & 3{,}6269 & 18{,}1543 & 10{,}9006 \\ 3{,}6269 & 3{,}7622 & 35{,}4439 & 29{,}9195 \\ 0 & 0 & 27{,}7991 & 26{,}7991 \\ 0 & 0 & 26{,}7991 & 27{,}7991 \end{pmatrix}.$$

Ilustrasi ini memperlihatkan bahwa terdapat t_0, dimana $1 < t_0 < 2$, sedemikian sehingga $\mathbf{x}(t) \succcurlyeq O$. Solusi untuk sistem ini adalah

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 665{,}5e^{-t} - 997{,}5e^{t} + 333{,}75e^{2t} \\ -665{,}5e^{-t} - 997{,}5e^{t} + 667{,}5e^{2t} \\ 500{,}625e^{2t} \\ 500{,}625e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1{,}5t - 1{,}75 \\ -0{,}5t^2 - 2t + 997{,}5 \\ -0{,}25t - 499{,}625 \\ -0{,}25t^2 - 0{,}25t + 499{,}3755 \end{pmatrix}.$$

Grafik solusi $\mathbf{x}(t)$ terhadap t diperlihatkan dalam Gambar 1 berikut ini.



Gambar 1

Dari Gambar 1 dapat dilihat bahwa ada suatu kurva yang berada di daerah negatif dan setelah suatu waktu t_0, dengan $1 < t_0 < 2$, kurva tersebut berada di daerah non negatif dan selamanya berada dalam daerah non negatif. Hal ini menunjukkan bahwa solusi $\mathbf{x}(t)$ ini adalah non negatif parsial.

Contoh 2. Contoh ini juga mengilustrasikan Proposisi 4 dimana $u(t) = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 0,3929 & -0,8393 & 1,1071 & 1,3393 \\ 1,0357 & 0,6964 & -0,5357 & 0,8036 \\ 1,0357 & -0,3036 & 0,4643 & 0,8036 \\ 1,4643 & 1,0536 & -0,9643 & 0,4464 \end{pmatrix}$$

dan

$$\mathbf{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Untuk $\alpha = 0$, dapat dihitung bahwa $k_0(A) = 4$. Ini menunjukkan bahwa A adalah suatu matriks non negatif parsial, dimana

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3,1787 & -0,5179 & 1,3213 & 4,0179 \\ 3,8215 & 1,0178 & -0,3215 & 3,4822 \\ 3,8215 & 0,0178 & 0,6785 & 3,4822 \\ 4,2501 & 1,3750 & -0,7501 & 3,1250 \end{pmatrix}$$

dan

$$A^4 = \begin{pmatrix} 7,9644 & 0,8036 & 0,5356 & 6,6964 \\ 7,3216 & 1,2679 & 0,1784 & 7,2321 \\ 7,3216 & 0,2679 & 1,1784 & 7,2321 \\ 6,8930 & 0,9107 & 0,6070 & 7,5893 \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan Proposisi 3, maka A adalah suatu matriks eksponensial non negatif parsial. Dengan menggunakan Matlab dapat diestimasi bahwa $t_0(A) = 2,645$, dan diperoleh

$$e^{2A} = \begin{pmatrix} 25,4222 & -0,7093 & 5,5714 & 24,3138 \\ 24,9780 & 7,1430 & -1,3734 & 23,8506 \\ 24,9780 & -0,2461 & 6,0156 & 23,8506 \\ 25,3486 & 6,4519 & -1,7440 & 24,5417 \end{pmatrix}$$

dan

$$e^{t_0(A)A} = \begin{pmatrix} 92,128 & 3,6154 & 14,0855 & 88,5146 \\ 91,7251 & 18,1965 & 0,4049 & 88,0170 \\ 91,7251 & 4,1130 & 14,4883 & 88,0170 \\ 92,1233 & 17,5283 & 0,0067 & 88,6851 \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan Proposisi 3, maka solusi $\mathbf{x}(t)$ untuk sistem ini adalah non negatif parsial. Solusi

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x_0}$$

untuk beberapa nilai t diberikan berikut ini.

$$\mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} -0,9714 \\ 6,0748 \\ 0,6382 \\ 3,4812 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}(1,5) = \begin{pmatrix} -0,3573 \\ 10,3552 \\ 1,3918 \\ 7,8548 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}(1,6) = \begin{pmatrix} 0,0278 \\ 11,7034 \\ 1,7974 \\ 9,2166 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}(2) = \begin{pmatrix} 3,4437 \\ 20,0556 \\ 5,2774 \\ 17,6116 \end{pmatrix}.$$

Dapat dilihat bahwa solusi $\mathbf{x}(t)$ masih belum non negatif untuk $t < 1,6$ dan positif setelah itu.

Contoh 3. Contoh berikut mengilustrasikan suatu keadaan dimana solusi $\mathbf{x}(t)$ adalah non negatif untuk $t \geq 0$. Matriks-matriks untuk sistem (1) diberikan sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dan $u(t) = 0$. Dengan $\alpha = 0$, diperoleh

$$(A + \alpha I)^3 = \begin{pmatrix} 15 & 21 & 28 & 28 \\ 14 & 22 & 28 & 28 \\ -2 & 9 & 15 & 14 \\ 9 & 12 & 21 & 22 \end{pmatrix},$$

$$(A + \alpha I)^4 = \begin{pmatrix} 51 & 85 & 120 & 120 \\ 50 & 86 & 120 & 120 \\ 4 & 31 & 51 & 50 \\ 31 & 54 & 85 & 86 \end{pmatrix},$$

$$(A + \alpha I)^5 = \begin{pmatrix} 187 & 341 & 496 & 496 \\ 186 & 342 & 496 & 496 \\ 38 & 117 & 187 & 186 \\ 117 & 224 & 341 & 342 \end{pmatrix}.$$

Ini menunjukkan bahwa $k_0(A) = 4$. Sehingga A adalah suatu matriks eksponensial non negatif parsial. Berikut ini adalah matriks e^{tA} untuk beberapa nilai t.

$$e^{A} = \begin{pmatrix} 5{,}0401 & 6{,}3618 & 8{,}6836 & 8{,}6836 \\ 4{,}0401 & 7{,}3618 & 8{,}6836 & 8{,}6836 \\ -0{,}4655 & 2{,}7873 & 5{,}0401 & 4{,}0401 \\ 2{,}7873 & 3{,}5746 & 6{,}3618 & 7{,}3618 \end{pmatrix}$$

$$e^{1{,}19A} = \begin{pmatrix} 7{,}8963 & 11{,}5055 & 16{,}1148 & 16{,}1148 \\ 6{,}8963 & 12{,}5055 & 16{,}1148 & 16{,}1148 \\ -0{,}0193 & 4{,}6285 & 7{,}8963 & 6{,}8963 \\ 4{,}6285 & 6{,}8770 & 11{,}5055 & 12{,}5055 \end{pmatrix}$$

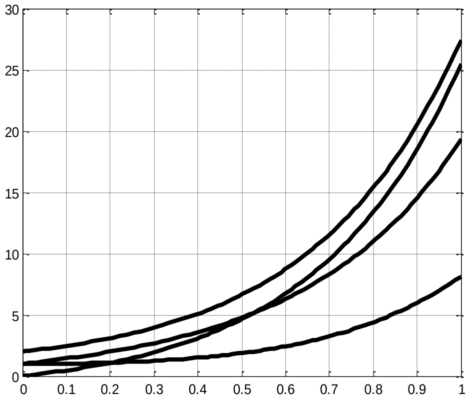
$$e^{1{,}2A} = \begin{pmatrix} 8{,}0931 & 11{,}8661 & 16{,}6391 & 16{,}6391 \\ 7{,}0931 & 12{,}8661 & 16{,}6391 & 16{,}6391 \\ 0{,}0176 & 4{,}7554 & 8{,}0931 & 7{,}0931 \\ 4{,}7554 & 7{,}1107 & 11{,}8661 & 12{,}8661 \end{pmatrix}$$

Kecenderungan nilai-nilai entri pada matriks-matriks di atas memperlihatkan bahwa terdapat $t_0 \in (1{,}2)$ sedemikian sehingga $e^{tA} \succcurlyeq O$ untuk setiap $t \geq t_0$. Berdasarkan Proposisi 4, maka solusi $\mathbf{x}(t)$ untuk sistem ini adalah non negatif parsial,

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x_0}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{4}{3}e^{3t} \\ -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}e^{3t} \\ \frac{5}{9} - \frac{4}{3}t + \frac{4}{9}e^{3t} \\ \frac{1}{9} + \frac{4}{3}t + \frac{8}{9}e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Grafik solusi dari sistem ini diberikan dalam Gambar 2.



Gambar 2

Contoh 4. Contoh berikut mengilustrasikan kasus dimana sistem yang diberikan adalah non homogen dimana matriks-matriks yang berkaitan adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dan $u(t) = t$. Jelas bahwa, untuk $\alpha = 0$, diperoleh

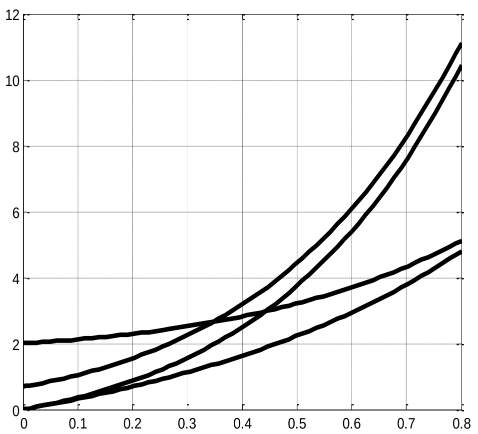
$$(A + \alpha I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sehingga, $k_0(A) = 2$. Akibatnya, matriks $(A + \alpha I)$ adalah non negatif parsial.

Berdasarkan Proposisi 4, maka solusi $\mathbf{x}(t)$ adalah non negatif parsial. Solusi dari sistem persamaan diferensial ini diberikan oleh

$$\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} 0.69e^{2t}+2te^{2t}+0.12t^2-0.34t \\ 0.69e^{2t}+2te^{2t}+0.12t^2-0.38t-0{,}69 \\ e^{2t}-0.083t^3-t+1 \\ e^{2t}+0.083t^3+t-1 \end{pmatrix}.$$

Grafik solusi diperlihatkan dalam Gambar 3.



Gambar 3

Contoh 5. Contoh berikut mengilustrasikan keberlakuan Proposisi 4 untuk matriks $A_{3\times 3}$, dengan $u(t)=\sin(t)$.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

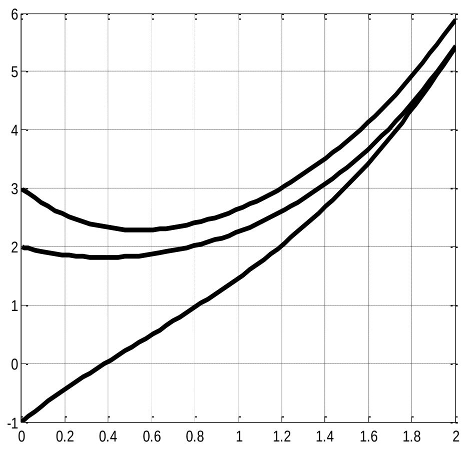
Untuk $\alpha=2$ diperoleh

$$A+\alpha I=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\succcurlyeq O,$$

yang memperlihatkan bahwa $A+\alpha I$ adalah matriks non negatif parsial dengan $k_0(A)=1$. Berdasarkan Proposisi 3, maka matriks e^{At} adalah eksponensial non negatif parsial dengan $t_0(A)=0$.
Solusi untuk sistem ini adalah

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^{t}+\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{2}{5}e^{-2t}+\frac{1}{10}\cos(t)-\frac{1}{5}\sin(t) \\ \frac{3}{4}e^{t}-\frac{3}{4}e^{-t}-\frac{4}{5}e^{-2t}-\frac{1}{5}\cos(t)-\frac{1}{10}\sin(t) \\ \frac{3}{4}e^{t}+\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{8}{5}e^{-2t}-\frac{1}{10}\cos(t)+\frac{1}{5}\sin(t) \end{pmatrix}$$

Grafik solusi diperlihatkan dalam Gambar 4.



Gambar 4

Perlu diperhatikan bahwa hipotesis $\mathbf{x}(0)\succcurlyeq\mathbf{0}$ dalam Proposisi 4 tidak dipenuhi untuk contoh 5, namun demikian solusi untuk sistem tersebut adalah non negatif parsial. Tentunya hal ini tidak bertentangan dengan Proposisi 4.

KESIMPULAN

Solusi persamaan diferensial (1) adalah non negatif parsial jika $B\succcurlyeq O$, $\mathbf{x_0}\succcurlyeq\mathbf{0}$, $\mathbf{u}(t)\succcurlyeq\mathbf{0}$ untuk setiap $t\geq 0$ dan $A+\alpha I$ merupakan suatu matriks non negtif parsial untuk suatu $\alpha\geq 0$.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada para kolega yang sudah ikut berkontribusi untuk meningkatkan kualitas dari artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

Kaczorek, T., (2001), Externally and Internally Positive Time Vrying Linear Systems, Int. Journal of Appl. Math. Comput. Science, Vol. 11, No. 4: 957-964.

Kaykobad, M., (1985), Positive Solutions of Positive Linear Systems, *Linear Algebra and Its Applications*, Vol. 64: 133-140.

Makino, T., (1984), On the Existence of Positive Solutions at Infinity for Ordinary

Differential Equation of Emden Type, *Funkcialaj Ekvacioj*, Vol.27: 319-329.

Meyer, C. D., (2001), Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM, USA

Noutsos D. Dan Tsatsomeros, M. J., (2008), Reachability and Holdability of Nonnegative States, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 30,No. 2: 700-712.

Wang, H. & Erbe, L. H., (1994), On the Existence of Positive Solutions of Ordinary Differential Equations, *Proceedings of the Mathematical Society*, Vol 120, 3: 743-748.