SOLUSI NON NEGATIF MASALAH NILAI AWAL DENGAN FUNGSI GAYA MEMUAT TURUNAN

Muhafzan
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Universitas Andalas, Kampus Unand Limau Manis, Padang, 25163
email: muhafzan@gmail.com

ABSTRAK

Dalam artikel ini akan dikaji kenonnegatifan solusi masalah nilai awal dengan fungsi gaya memuat turunan. Kajian dimulai dengan mereduksi masalah menjadi sistem persamaan diferensial linier orde 1. Selanjutnya dikonstruksi suatu syarat cukup yang menjamin kenonnegatifan solusi masalah nilai awal dengan fungsi gaya memuat turunan. Beberapa contoh diberikan untuk mengilustrasikan hasil utama.

Kata Kunci: Masalah nilai awal, solusi nonnegatif

ABSTRACT

In this paper, we will study the nonnegativity of the solution of a initial value problem with the force functions contain the derivatives, Firstly, the given initial value problem is reduced into a system of first order differential equation. Furthermore, a sufficient condition for nonnegativity of solution is established. Some examples are given to illustrate the main result.

***Key Words**: Initial Value Problem, nonnegative solution*

PENDAHULUAN

Masalah nilai awal merupakan suatu topik klasik dalam matematika yang pada dasarnya melibatkan suatu persamaan diferensial, baik persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial.

Secara umum, masalah nilai awal persamaan diferensial biasa yang fungsi gayanya memuat turunan mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\mathbf{a}\mathbf{y} = \mathbf{b}\mathbf{u}, \tag{1}$$

dimana

$\mathbf{a} = (1 \;\; a_1 \;\; a_2 \cdots \; a_n)$,
$\mathbf{b} = (b_0 \;\; b_1 \;\; b_2 \cdots \; b_n)$,
$\mathbf{y} = \left(y^{(n)}(t) \;\; y^{(n-1)}(t) \cdots y'(t) \;\; y(t)\right)^{\mathrm{T}}$
$\mathbf{u} = \left(u^{(n)}(t) \;\; u^{(n-1)}(t) \cdots u'(t) \;\; u(t)\right)^{\mathrm{T}}$,

dengan syarat awal $y(0) = y_{00}, y'(0) = y_{01}, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{0(n-1)}$, dimana $a_i, b_{i-1}, i = 1, \ldots, n-1, n,\ b_n$ adalah skalar-skalar riil, $y, u\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, u adalah fungsi gaya, superskrip (n) menyatakan turunan ke n dan superskrip T menyatakan transpos dari suatu matriks.

Solusi masalah nilai awal (1) tidak sulit ditentukan jika fungsi gaya u dan skalar-skalar $a_i, b_{i-1}, i = 1, \ldots, n-1, n,$ dan b_n diketahui. Namun demikian, jika solusi yang diinginkan adalah fungsi $y(t)$ yang nonnegatif, yaitu $y(t) \geq 0, \forall t \in [0,\infty)$, maka persoalan penentuan solusi (1) tidaklah mudah.

Dalam artikel ini akan dikaji syarat cukup (*sufficient condition*) yang menjamin agar solusi masalah nilai awal (1) adalah nonnegatif. Selain itu, beberapa contoh disajikan untuk memperlihatkan keberlakuan dari syarat cukup ini.

Beberapa kajian untuk kenonnegatifan solusi untuk masalah-masalah nilai awal yang berbeda dapat dilihat dalam El Shahed (2008), Kaykobad (1985), Makino (1984), Muhafzan dan Stephane (2013) dan Wang dan Erbe (1994), Berman dan Plemmons (1994).

BAHAN DAN METODE

Terlebih dahulu diperkenalkan terminologi yang digunakan sepanjang artikel ini. Suatu matriks riil $A = [a]_{ij}$ berukuran $n \times m$ dikatakan nonnegatif, dinotasikan $A \succcurlyeq O$, jika $a_{ij} \geq 0, \forall i, j$, dimana O adalah matriks nol.

Untuk menentukan syarat yang menjamin agar solusi yang diinginkan adalah nonnegatif, masalah nilai awal (1) direduksi menjadi suatu sistem persamaan diferensial orde 1 dengan mengikuti prosedur berikut ini. Misalkan

$$x_1(t) = y(t) - \beta_0 u(t), \tag{2}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= y'(t) - \beta_0 u'(t) - \beta_1 u(t) \\ &= x_1'(t) - \beta_1 u(t), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} x_3(t) &= y''(t) - \beta_0 u''(t) - \beta_1 u'(t) \\ &\quad - \beta_2 u(t) \\ &= x_2'(t) - \beta_2 u(t), \end{aligned} \tag{4}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) - \beta_0 u^{(n-1)}(t) \\ &\quad - \beta_1 u^{(n-2)}(t) - \cdots - \beta_{n-2} u'(t) \\ &\quad - \beta_{n-1} u(t) \\ &= x_{n-1}'(t) - \beta_{n-1} u(t), \end{aligned} \tag{5}$$

dimana nilai-nilai β_j, $j = 0,1,\ldots,n-1$ ditentukan dari hubungan berikut:

$$\beta_0 = b_0 \tag{5a}$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 \tag{5b}$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 \tag{5c}$$

$$\beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 \tag{5d}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \beta_{n-1} &= b_{n-1} - a_1\beta_{n-2} - a_2\beta_{n-3} \\ &\quad - \cdots - a_{n-2}\beta_1 - a_{n-1}\beta_0, \end{aligned}$$

(5e)

dan

$$\begin{aligned} \beta_n &= b_n - a_1\beta_{n-1} - a_2\beta_{n-2} \\ &\quad - \cdots - a_{n-1}\beta_1 - a_n\beta_0. \end{aligned} \tag{5f}$$

Dengan menurunkan (5) terhadap t, dan kemudian mensubtitusikan $y^{(n)}(t)$, diperoleh

$$\begin{aligned} x_n'(t) &= y^{(n)}(t) - \beta_0 u^{(n)}(t) - \beta_1 u^{(n-1)}(t) \\ &\quad - \cdots - \beta_{n-2} u''(t) - \beta_{n-1} u'(t) \\ &= -a_1 y^{(n-1)}(t) - \cdots - a_{n-1} y'(t) \\ &\quad - a_n y(t) + b_0 u^{(n)}(t) + b_1 u^{(n-1)}(t) \\ &\quad + \cdots + b_{n-1} u'(t) + b_n u(t) \\ &\quad - \beta_0 u^{(n)}(t) - \beta_1 u^{(n-1)}(t) \\ &\quad - \cdots - \beta_{n-2} u''(t) - \beta_{n-1} u'(t) \\ &= -a_1 y^{(n-1)}(t) - \cdots - a_{n-1} y'(t) \\ &\quad - a_n y(t) + (b_0 - \beta_0) u^{(n)}(t) \\ &\quad + (b_1 - \beta_1) u^{(n-1)}(t) \\ &\quad + \cdots + (b_{n-1} - \beta_{n-1}) u'(t) \\ &\quad + b_n u(t) \\ &= -a_1 y^{(n-1)}(t) - \cdots - a_{n-1} y'(t) \\ &\quad - a_n y(t) + (b_1 - \beta_1) u^{(n-1)}(t) + \cdots \\ &\quad + (b_{n-1} - \beta_{n-1}) u'(t) + b_n u(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Subtitusikan $y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-2)}(t)$ dan $y^{(n-1)}(t)$ dari (2) sampai (5) ke dalam (6), diperoleh

$$\begin{aligned} x_n'(t) &= -a_1[x_n(t) + \beta_0 u^{(n-1)}(t) \\ &\quad + \beta_1 u^{(n-2)}(t) + \cdots + \beta_{n-2} u'(t) \\ &\quad + \beta_{n-1} u(t)] - a_2[x_{n-1}(t) + \\ &\quad + \beta_0 u^{(n-2)}(t) + \beta_1 u^{(n-3)}(t) \\ &\quad + \cdots + \beta_{n-3} u'(t) + \beta_{n-2} u(t)] \\ &\quad - \cdots - a_{n-1}[x_2(t) + \beta_0 u'(t) + \beta_1 u(t)] \\ &\quad - a_n[x_1(t) + \beta_0 u(t)] \\ &\quad + (b_1 - \beta_1) u^{(n-1)}(t) \\ &\quad + \cdots + (b_{n-2} - \beta_{n-2}) u''(t) \\ &\quad + (b_{n-1} - \beta_{n-1}) u'(t) + b_n u(t) \\ &= -a_1 x_n(t) - a_2 x_{n-1}(t) - \cdots - a_{n-1} x_2(t) \\ &\quad - a_n x_1(t) + [b_n - a_1\beta_{n-1} - \cdots - a_{n-1}\beta_1 \\ &\quad - a_n\beta_0] u(t) + [b_{n-1} - \beta_{n-1} - a_1\beta_{n-2} \\ &\quad - a_2\beta_{n-3} - \cdots - a_{n-1}\beta_0] u'(t) + [b_{n-2} \\ &\quad - \beta_{n-2} - a_1\beta_{n-3} - a_2\beta_{n-4} - \cdots \\ &\quad - a_{n-2}\beta_0] u''(t) + \cdots \\ &\quad + [b_2 - \beta_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0] u^{(n-2)}(t) \\ &\quad + [b_1 - \beta_1 - a_1\beta_0] u^{(n-1)}(t). \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan mensubtitusikan (5a) sampai (5f) ke dalam masing-masing koefisien dari $u^{(n-1)}$, $u^{(n-2)}, \ldots, u''$ dan u', diperoleh bahwa semua koefisien dari $u^{(n-1)}$, $u^{(n-2)}, \ldots, u''$ dan u' adalah 0. Sehingga

$$\begin{aligned} x_n'(t) &= -a_1 x_n(t) - a_2 x_{n-1}(t) \\ &\quad - \cdots - a_{n-1} x_2(t) - a_n x_1(t) - \cdots \\ &\quad + [b_n - a_1\beta_{n-1} - a_{n-1}\beta_1 - a_n\beta_0] u(t) \\ &= -a_n x_1(t) - a_{n-1} x_2(t) - \cdots \\ &\quad - a_2 x_{n-1}(t) - a_1 x_n(t) - \beta_n u(t). \end{aligned} \tag{7}$$

Sehingga, dari (2), (3), (4), (5) dan (7) diperoleh

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) + \beta_1 u(t) \\ x_2'(t) &= x_3(t) + \beta_2 u(t) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x'_{n-1}(t) = x_2(t) + \beta_{n-1}u(t)$$
$$x'_n(t) = -a_n x_1(t) - a_{n-1}x_2(t) - \cdots$$
$$-a_2 x_{n-1}(t) - a_1 x_n(t) - \beta_n u(t),$$

atau dalam notasi matriks dapat ditulis:

$$\mathcal{X}'(t) = \mathcal{A}\mathcal{X}(t) + \mathcal{B}u(t), \qquad (8)$$

dimana

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \vdots \\ \beta_{n-1}(t) \\ \beta_n(t) \end{pmatrix} \text{ dan } \mathcal{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, dengan menggunakan syarat awal $y(0) = y_{00}, y'(0) = y_{01}, \cdots,$ dan $y^{(n-1)}(0) = y_{0(n-1)}$, maka syarat awal untuk (8) adalah

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_{n-1}(0) \\ x_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{00} - \beta_0 u(0) \\ x'_1(0) - \beta_1 u(0) \\ \vdots \\ x'_{n-2}(0) - \beta_{n-2}u(0) \\ x'_{n-1}(0) - \beta_{n-1}u(0) \end{pmatrix}.$$

Persamaan (8) adalah sistem persamaan diferensial linier orde 1 yang solusinya dengan mudah dapat ditentukan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari uraian dalam bagian sebelumnya dapat dipahami bahwa solusi nonnegatif dari masalah nilai awal (1) dapat ditentukan dari solusi sistem persamaan diferensial (8).

Solusi masalah (8) adalah

$$\mathcal{X}(t) = e^{\mathcal{A}t}\mathcal{X}(0) + \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-s)}\mathcal{B}u(s)ds.$$

Hubungan ini memperlihatkan bahwa $\mathcal{X}(t) \succcurlyeq \mathbf{0}$ jika $e^{\mathcal{A}t}\mathcal{X}(0) \succcurlyeq \mathbf{0}$ dan

$$\int_0^t e^{\mathcal{A}(t-s)}\mathcal{B}u(s)ds \succcurlyeq \mathbf{0}.$$

Berikut ini disajikan suatu proposisi yang menjamin agar $e^{\mathcal{A}t} \succcurlyeq \mathbf{0}, \forall t \in [0,\infty)$.

Proposisi 1. $e^{\mathcal{A}t} \succcurlyeq \mathbf{0}$, $\forall t \in [0,\infty)$ *jika dan hanya jika* $a_i \leq 0, i = 2, \dots, n-1, n.$

Bukti.
Misalkan $a_i \leq 0, i = 1, \dots, n-1, n.$ Tulis

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2,$
dimana

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Karena $a_i \leq 0, i = 2, \dots, n-1, n,$ maka $\mathcal{A}_2 \succcurlyeq \mathbf{0}$. Selanjutnya, karena

$$e^{\mathcal{A}_2 t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j \mathcal{A}_2^j,$$

dan $t \in [0,\infty)$, maka $e^{\mathcal{A}_2 t} \succcurlyeq \mathbf{0}$. Selain itu, jelas bahwa

$$e^{\mathcal{A}_1 t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{-a_1 t} \end{pmatrix} \succcurlyeq \mathbf{0}.$$

Akibatnya
$e^{\mathcal{A}t} = e^{\mathcal{A}_1 t}e^{\mathcal{A}_2 t} \succcurlyeq \mathbf{0},$

untuk setiap $t \in [0,\infty)$. Sebaliknya, misalkan $e^{\mathcal{A}t} \succcurlyeq \mathbf{0}$, $\forall t \in [0,\infty)$ dan andaikan ada $k \in \{2, \dots, n\}$ sedemikian sehingga $a_k > 0$. Dengan menyatakan entri-entri dari $\mathcal{A}^k$ dengan a_{ij}^k, maka untuk entri baris ke n dari matriks $\mathcal{A}$, diperoleh

$$\left(e^{\mathcal{A}t}\right)_{nk} = t(-a_{k)} + \frac{t^2}{2!}a_k^2 + \frac{t^3}{3!}(-a_k^3) + \cdots.$$

Sehingga, jika $t \to 0^+$ maka diperoleh $\left(e^{\mathcal{A}t}\right)_{nk} < 0$ untuk suatu $t > 0$ yang adalah kontradiksi. ■

Proposisi berikut menjamin kenonnegatifan solusi masalah nilai awal (1) yang merupakan hasil utama dari artikel ini.

Proposisi 2.*Untuk masalah nilai awal* (1), *jika untuk setiap* $t \in [0,\infty)$ *syarat berikut berlaku*:

(i). $u(t) \geq 0$

(ii). $y_{0i} \geq 0$ *sedemikian sehingga*
$x_{i+1}(0) \geq 0,\ i = 0,1,\dots,n-1$

(iii). $a_i \leq 0, b_i \geq 0$ *untuk* $i = 2,\dots,n,$
$b_0 \geq 0$ *dan* $b_1 \geq 0,$

maka $y(t) \geq 0.$

Bukti. Hipotesis $b_0 \geq 0,\ b_1 \geq 0,\ a_i \leq 0$ dan $b_i \geq 0$ untuk $i = 0,1,\dots,n-1,$ mengakibatkan bahwa $e^{\mathcal{A}t} \succcurlyeq \mathbf{0}$ dan $\mathcal{B} \succcurlyeq \mathbf{0}$. Selain itu, karena $x_{i+1}(0) \geq 0,\ i = 0,1,\dots,n-1,$ maka $\mathcal{X}(0) \succcurlyeq \mathbf{0}$. Selanjutnya, karena $u(t) \geq 0,$ maka

$$\int_0^t e^{\mathcal{A}(t-s)}\mathcal{B}u(s)ds \succcurlyeq \mathbf{0},$$

dan akibatnya $\mathcal{X}(t) \succcurlyeq \mathbf{0}$. Terakhir, dari (2) diperoleh $y(t) = x_1(t) + \beta_0 u(t) \geq 0.$ ■

Contoh 1. Contoh berikut mengilustrasikan Proposisi 2 dimana fungsi gayanya adalah $t^2 - \frac{1}{2}t.$

$$y''' + y'' - y' - y = t^2 - \frac{1}{2}t, \qquad (9)$$

dengan syarat awal

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 2, y''(0) = 1.$$

Dengan mengikuti proses (2) sampai (5) seperti di atas, diperoleh sistem

$$\mathcal{X}' = \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{B}u, \qquad (10)$$

dimana

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathcal{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

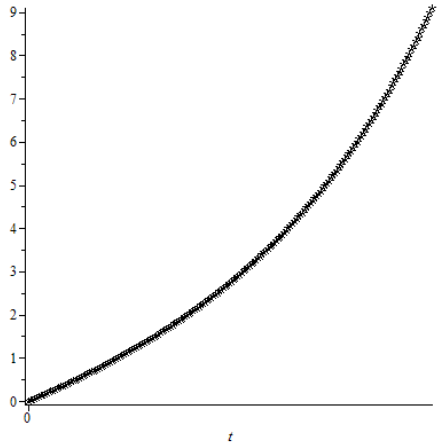
dan $u(t) = t^2 - \frac{1}{2}t.$ Karena matriks $\mathcal{A}$ memenuhi hipotesis Proposisi 1, maka $e^{\mathcal{A}t} \succcurlyeq \mathbf{0},\ \forall t \in [0,\infty).$ Solusi untuk sistem (10) ini adalah

$$\mathcal{X}(t) = \begin{pmatrix} \frac{13}{8}e^t + \frac{23}{8}e^{-t} + \frac{3}{4}te^{-t} + \frac{5}{2}t - t^2 - \frac{9}{2} \\ \frac{13}{8}e^t - \frac{17}{8}e^{-t} - \frac{3}{4}te^{-t} - 2t + \frac{5}{2} \\ \frac{13}{8}e^t + \frac{11}{8}e^{-t} + \frac{3}{4}te^{-t} - 2 \end{pmatrix}$$

yang non negatif untuk setiap $t \in [0,\infty)$. Sehingga, solusi dari masalah nilai awal (9) adalah komponen pertama dari vektor $\mathcal{X}(t)$, yaitu

$$y(t) = \frac{13}{8}e^t + \frac{23}{8}e^{-t} + \frac{3}{4}te^{-t} + \frac{5}{2}t - t^2 - \frac{9}{2},$$

untuk $t \in [0,\infty)$. Grafik dari solusi ini diperlihatkan dalam Gambar 1 berikut ini.



Gambar 1.

Grafik solusi memperlihatkan bahwa kurva solusi berada pada kuadran pertama yang tentunya adalah non negatif.

Pada dasarnya, meskipun hipotesis dalam Proposisi 2 tidak terpenuhi, masih memungkinkan solusi dari masalah nilai awal menjadi non negatif. Beberapa contoh berikut mengilustrasikan keadaan yang demikian.

Contoh 2. Dalam contoh, ini syarat awal dari masalah nilai awal yang diberikan adalah non negatif. Permasalahannya adalah sebagai berikut:

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = \sin(t), \qquad (11)$$

dengan syarat awal

$$y(0) = 2,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 3.$$

Dengan mengikuti proses (2) sampai (5), diperoleh sistem

$$\mathcal{X}' = \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{B}u, \qquad (12)$$

dimana

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

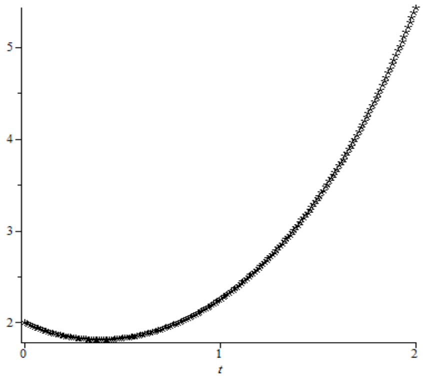
dan $u(t) = \sin(t)$. Karena matriks $\mathcal{A}$ memenuhi hipotesis Proposisi 1, maka $e^{\mathcal{A}t} \succcurlyeq \mathbf{0}$, $\forall t \in [0, \infty)$. Solusi untuk sistem (12) ini adalah

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^{t} + \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{2}{5}e^{-2t} + \frac{1}{10}\cos(t) - \frac{1}{5}\sin(t) \\ \frac{3}{4}e^{t} - \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{4}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}\cos(t) - \frac{1}{10}\sin(t) \\ \frac{3}{4}e^{t} + \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{8}{5}e^{-2t} - \frac{1}{10}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t) \end{pmatrix}$$

yang non negatif untuk setiap $t \in [0, \infty)$. Sehingga, solusi dari masalah nilai awal (11) adalah komponen pertama dari vektor $\mathcal{X}(t)$, yaitu

$$y(t) = \frac{3}{4}e^{t} + \frac{3}{4}e^{-t} + \frac{2}{5}e^{-2t} + \frac{1}{10}\cos(t) - \frac{1}{5}\sin(t),$$

untuk $t \in [0, \infty)$. Grafik dari solusi ini diperlihatkan dalam Gambar 2 berikut ini.



Gambar 2.

Grafik solusi memperlihatkan bahwa kurva solusi berada pada kuadran pertama meskipun syarat awal tidak non negatif. Tentu saja hal ini tetap benar meskipun hipotesis dari Proposisi 2 tidak dipenuhi.

Contoh 3. Dalam contoh ini, ada koefisien a_i dari persamaan diferensial yang tidak memenuhi hipotesis Proposisi 2, namun demikian solusi dari masalah nilai awal yang diberikan adalah non negatif. Permasalahannya adalah sebagai berikut:

$$y''' + 6y'' + 12y' + 8y = \cos(t), \qquad (13)$$

dengan syarat awal

$$y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 3.$$

Dengan mengikuti proses (2) sampai (5), diperoleh sistem

$$\mathcal{X}' = \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{B}u, \qquad (14)$$

dimana

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dan $u(t) = \cos(t)$. Dapat diperiksa bahwa matriks $\mathcal{A}$ tidak memenuhi hipotesis Proposisi 1, sehingga matriks $e^{\mathcal{A}t}$ tidak non negatif. Namun demikian solusi masih non negatif. Solusi untuk sistem (10) ini adalah

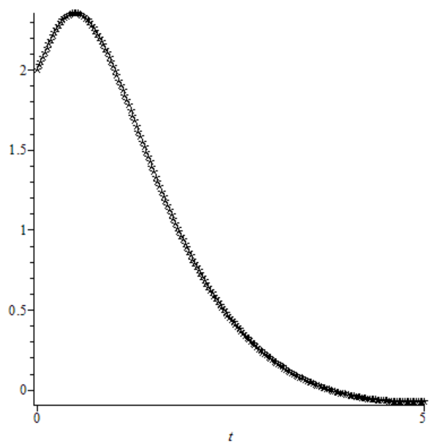
$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \frac{248}{125}e^{-2t} + \frac{122}{25}te^{-2t} + \frac{73}{10}t^2e^{-2t} \\ \frac{114}{125}e^{-2t} + \frac{121}{25}te^{-2t} - \frac{73}{5}t^2e^{-2t} \\ \frac{377}{125}e^{-2t} - \frac{972}{25}te^{-2t} + \frac{146}{5}t^2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{2}{125}\cos(t) - \frac{11}{125}\sin(t) \\ \frac{11}{125}\cos(t) - \frac{2}{125}\sin(t) \\ -\frac{2}{125}\cos(t) - \frac{11}{125}\sin(t) \end{pmatrix}$$

yang non negatif untuk setiap $t \in [0, \infty)$. Sehingga, solusi dari masalah nilai awal (13) adalah komponen pertama dari vektor $\mathcal{X}(t)$, yaitu

$$y(t) = \frac{248}{125}e^{-2t} + \frac{122}{25}te^{-2t} + \frac{73}{10}t^2e^{-2t}$$
$$+\frac{2}{125}\cos(t) - \frac{11}{125}\sin(t),$$

untuk $t \in [0, \infty)$. Grafik dari solusi ini diperlihatkan dalam Gambar 3 berikut ini.



Gambar. 3

Grafik solusi memperlihatkan bahwa kurva solusi juga berada pada kuadran pertama meskipun beberapa koefisien dari persamaan diferensial tidak negatif. Tentu saja hal ini tetap benar meskipun hipotesis dari Proposisi 2 tidak dipenuhi.

Contoh berikut mengilustrasikan hipotesis dari Proposisi 2 yang tidak terpenuhi, tetapi solusi masalah nilai awal adalah tidak non negatif, yaitu ada $t_0 \in [0, \infty)$ sedemikian sehingga $y(t_0) < 0$.

Contoh 4. Diberikan suatu masalah nilai awal

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = \cos(t), \qquad (15)$$

dengan syarat awal

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1, y''(0) = -1.$$

Dengan mengikuti proses (2) sampai (5), diperoleh sistem

$$\mathcal{X}' = \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{B}u, \qquad (16)$$

dimana

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{pmatrix},\ \mathcal{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

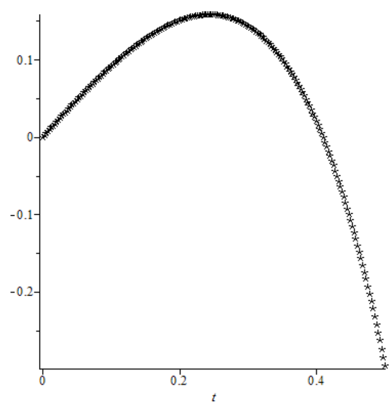
dan $u(t) = \cos(t)$. Dapat diperiksa bahwa matriks $\mathcal{A}$ tidak memenuhi hipotesis Proposisi 1, sehingga matriks $e^{\mathcal{A}t}$ tidak non negatif. Solusi untuk sistem (16) ini adalah

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \frac{2}{125}e^{2t} + \frac{22}{25}te^{2t} - \frac{23}{10}t^2e^{2t} \\ \frac{114}{125}e^{2t} - \frac{71}{25}te^{2t} - \frac{23}{5}t^2e^{2t} \\ -\frac{127}{125}e^{2t} - \frac{372}{25}te^{2t} - \frac{46}{5}t^2e^{-2t} \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} -\frac{2}{125}\cos(t) + \frac{11}{125}\sin(t) \\ \frac{11}{125}\cos(t) + \frac{2}{125}\sin(t) \\ \frac{2}{125}\cos(t) - \frac{11}{125}\sin(t) \end{pmatrix}$$

untuk setiap $t \in [0, \infty)$. Sehingga, solusi dari masalah nilai awal (15) adalah komponen pertama dari vektor $\mathcal{X}(t)$, yaitu

$$y(t) = \frac{2}{125}e^{2t} + \frac{22}{25}te^{2t} - \frac{23}{10}t^2e^{2t}$$
$$-\frac{2}{125}\cos(t) + \frac{11}{125}\sin(t).$$

Grafik dari solusi ini diperlihatkan dalam Gambar 4 berikut ini.



Gambar. 4

Grafik solusi memperlihatkan bahwa tidak seluruh kurva solusi berada pada kuadran pertama, dengan perkataan lain ada $t_0 \in [0,\infty)$ sedemikian sehingga $y(t) < 0$.

Contoh 5. Contoh ini mengilustrasikan suatu masalah nilai awal dari persamaan diferensial orde 4, yaitu:

$$y'''' - 6y'' + 12y' - 8y = t, \qquad (17)$$

dengan syarat awal

$$y(0) = y'(0) = 0, \; y''(0) = y'''(0) = 1.$$

Dengan mengikuti proses (2) sampai (5) seperti di atas, diperoleh sistem

$$\mathcal{X}' = \mathcal{A}\mathcal{X} + \mathcal{B}u, \qquad (18)$$

dimana

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dan $u(t) = t$. Dapat diperiksa bahwa matriks $\mathcal{A}$ tidak memenuhi hipotesis Proposisi 1, sehingga matriks $e^{\mathcal{A}t}$ tidak non negatif. Namun demikian solusi masih non negatif. Solusi untuk sistem (18) ini adalah

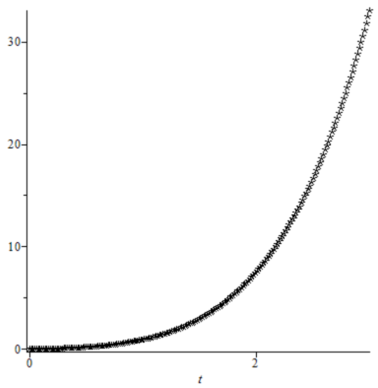
$$\mathcal{X}(t) = \begin{pmatrix} 0{,}61e^{1{,}24t} + 0.03e^{-3{,}24t} - 0{,}13t \\ 0{,}76e^{1{,}24t} - 0.08e^{-3{,}24t} - 0{,}13t \\ 0{,}94e^{1{,}24t} + 0.26e^{-3{,}24t} \\ 1{,}16e^{1{,}24t} - 0.86e^{-3{,}24t} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} -0{,}45e^t\cos(t) - 0{,}1e^t\sin(t) - 0{,}19 \\ -0{,}55e^t\cos(t) + 0{,}35e^t\sin(t) - 0{,}13 \\ -0{,}2e^t\cos(t) + 0{,}9e^t\sin(t) \\ 0{,}7e^t\cos(t) + 1{,}1e^t\sin(t) - 0{,}19 \end{pmatrix}$$

untuk setiap $t \in [0,\infty)$. Sehingga, solusi dari masalah nilai awal (17) adalah komponen pertama dari vektor $\mathcal{X}(t)$, yaitu

$$y(t) = 0{,}61e^{1{,}24t} + 0.03e^{-3{,}24t} - 0{,}13t$$
$$-0{,}45e^t\cos(t) - 0{,}1e^t\sin(t) - 0{,}19.$$

Grafik dari solusi ini diperlihatkan dalam Gambar 5 berikut ini.



Gambar. 5

Grafik solusi memperlihatkan bahwa kurva solusi juga berada pada kuadran pertama meskipun beberapa koefisien dari persamaan diferensial tidak negatif. Tentu saja hal ini tetap benar meskipun hipotesis dari Proposisi 2 tidak dipenuhi.

KESIMPULAN

Solusi masalah nilai awal (1) adalah nonnegatif jika berlaku syarat berikut:

(i). $u(t) \geq 0$

(ii). $y_{0i} \geq 0$ sedemikian sehingga
$x_{i+1}(0) \geq 0, \; i = 0,1,\ldots,n-1$

(iii). $a_i \leq 0, b_i \geq 0$ untuk $i = 2,\ldots,n$,
$b_0 \geq 0$ dan $b_1 \geq 0$.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada para kolega yang sudah ikut berkontribusi untuk meningkatkan kualitas dari artikel ini.

DAFTAR PUSTAKA

Berman, A. & Plemmons, B, (1994), Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, SIAM, Philadelphia

El Shahed, M., (2008), Positive Solutions of Boundary Value Problems for *n*th Order Ordinary Differential Equations, *Electronic Journal of Qualitative Differential Equations*, No. 1: 1-9.

Kaykobad, M., (1985), Positive Solutions of Positive Linear Systems, *Linear Algebra and Its Applications*, Vol. 64: 133-140.

Makino, T., (1984), On the Existence of Positive Solutions at Infinity for Ordinary Differential Equation of Emden Type, *Funkcialaj Ekvacioj*, Vol.27: 319-329.

Muhafzan & Stephane, I., (2013), On Stabilization of Positive Linear Systems, *Applied Mathematical Science,* Vol. 7, No. 37: 1819-1824.

Wang, H. & Erbe, L. H., (1994), On the Existence of Positive Solutions of Ordinary Differential Equations, *Proceedings of the Mathematical Society*, Vol 120, 3: 743-748.