MODEL MATEMATIKA MANGSA-PEMANGSA DENGAN SEBAGIAN MANGSA SAKIT

Mohammad Soleh[1], Siti Kholipah[2]
[1,2]Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru
1) Email: *msoleh1975@yahoo.co.id*
2) Email: *cityhamlah@yahoo.co.id*

ABSTRAK

Pada paper ini dijelaskan tentang model matematika mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit, dan dengan laju penularan penyakit menggunakan persamaan non-liniear $\frac{PXY}{Q+X}$. Model mangsa-pemangsa ini mengasumsikan adanya mangsa sehat, mangsa sakit, dan pemangsa hanya memangsa mangsa sakit. Hasil yang diperoleh bahwa titik endemik model mangsa-pemangsa ini stabil asimtotik apabila $2\frac{k-1+\alpha}{\alpha} < x^* < \frac{1}{2}$.

Kata Kunci : Model Mangsa-Pemangsa, Stabil Asimtotik, Titik kesetimbangan.

ABSTRACK

This paper discussed about A prey predator model with vulnerable infected prey where the incidence rate of susceptible prey use a non-liniear feedback $\frac{PXY}{Q+X}$. *This predator-prey model is assumed that there is suspectible prey, infected prey, and predator which predator is only ineract with infected prey. The result obtained that an endemic equlibrium is Asymptotic Stable when* $2\frac{k-1+\alpha}{\alpha} < x^* < \frac{1}{2}$.

Key word *: A prey predator model, Asymptotic Stable, Equilibrium Point.*

PENDAHULUAN

Pemodelan matematika merupakan salah satu cabang dari matematika terapan yang cukup penting dan bermanfaat. Salah satu bentuk pemodelan yang dapat diterapkan yaitu pada masalah ekologi, cabang biologi yang mempelajari tentang ekosistem. Dalam ekologi juga dikenal istilah rantai makanan.

Bagian paling sederhana dari suatu rantai makanan yakni interaksi, seperti interaksi antara mangsa dan pemangsa. Populasi mangsa mempunyai persediaan makanan yang tersedia cukup di dalam lingkungannya, sedangkan pada populasi pemangsa memiliki makanan yang bergantung pada jumlah mangsa. Apabila populasi mangsa terbatas maka untuk populasi pemangsa akan menurun sesuai dengan jumlah proporsi mangsanya.

Populasi mangsa pada umumnya dapat digolongkan lagi menjadi dua kelompok yakni mangsa sehat dan mangsa sakit. Mangsa yang sehat biasanya memiliki kemampuan untuk lolos ketika sedang di buru oleh pemangsa. Mangsa yang sakit tidak memiliki daya tahan tubuh yang kuat atau tidak dapat melakukan pelarian dengan kecepatan yang lebih besar dibanding mangsa yang sehat.

Model dasar tentang mangsa pemangsa pertama kali dirumuskan oleh *A. J Lotka* dan *Vito Volterra* (1920),), yang disebut model *Lotka Volterra*. Pada model *Lotka Volterra* populasi dibagi menjadi dua kelas yaitu kelas pemangsa dan kelas mangsa. Secara matematika kelas mangsa ditulis dengan $x(t)$ yaitu banyaknya mangsa pada saat t, dan kelas pemangsa $y(t)$ merupakan banyaknya pemangsa pada saat t, sedangkan t merupakan waktu. Model *Lotka Volterra* pada awalnya dikembangkan untuk mengetahui laju perkembangan dan kepunahan suatu populasi mangsa yang dimakan pemangsa. Populasi mangsa memiliki makanan yang tersedia setiap saat tetapi pada populasi pemangsa bisa bertahan hidup dengan memakan mangsa.

Beberapa penelitian tentang model matematika mangsa-pemangsa atau modifikasinya diantaranya adalah Jurnal *Persistence of predator in a two Predators-one prey model with model non priodic solution* oleh Jawdat Alebraheem dan Yahya

Abu-Hasan (2012) [1], pada jurnal ini dibahas tentang kesetabilan dari setiap model mangsa-pemangsa dengan tipe-II holling dan kolmogorov. Jurnal mangsa-pemangsa seterusnya yakni matematika yang berjudul *A Prey Predator Model with Vulnerable Infected Prey* oleh S.A Wuhaib dan Y. Abu Hasan (2012) [10]. Jurnal ini membahas tentang model mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit, dengan laju penularan penyakit menggunakan biliniear yaitu PXY.

Berdasarkan latar belakang di atas maka penulis tertarik untuk mengulas dan mengembangkan, dari jurnal S.A Wuhaib dan Y. Abu Hasan. Dengan menambahkan asumsi Q yang menyatakan parameter yang mengukur efek jenuh insidensi secara konstan, dengan laju Penularan penyakit menggunakan non-liniear yaitu $\frac{PXY}{Q+X}$.

METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur atau mempelajari literatur yang berhubungan dengan pemodelan matematika yaitu:

a) Membentuk asumsi-asumsi dan mendefinisikan parameter-parameter yang digunakan pada model matematika mangsa-pemangsa diantaranya kelahiran, kematian alami dan faktor interaksi mangsa-pemangsa [1,2, 10].

b) Membentuk model matematika, yaitu model mangsa-pemangsa berdasarkan asumsi pada point a [1, 2, 4,10].

c) Menyelesaikan sistem persamaan differensial [10].

d) Menentukan titik kesetimbangan (*equilibrium*) model mangsa-pemangsa yang telah ditentukan pada point b. Titik kesetimbangan yang akan dicari adalah titik kesetimbangan trivial (asal), titik kesetimbangan bebas mangsa sakit dan pemangsa, dan titik kesetimbangan endemik mangsa dan pemangsa [10].

e) Menganalisa sifat kesetabilan titik kesetimbangan dari model mangsa-pemangsa dari point d. Setelah titik kesetimbangan diperoleh, maka langkah selanjutnya adalah menyelidiki kesetabilan dari titik kesetimbangan yang akan dicari yaitu titik kesetimbangan trivial (asal), titik kesetimbangan bebas mangsa sakit dan pemangsa, dan titik kesetimbangan endemik mangsa dan pemangsa. Dalam melakukan penganalisaan sifat kesetabilan titik kesetimbangan maka digunakan metode liniearisasi pada sistem dengan menggunakan matriks Jacobian di titik kesetimbangan. Kemudian dengan menggunakan definisi polinomial karakteristik diperoleh nilai eigen-nilai eigen dari matriks Jacobian sehingga dapat di tentukan sifat kesetabilannya menurut teorema kestabilan dan kestimbangan. Salah satu alternatif di dalam menentukan nilai eigen-nilai eigan dari poliniomial karakteristik adalah dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz [8, 10]

f) Mensimulasikan model rantai makanan mangsa-pemangsa yang telah di bentuk dengan menggunakan program Maple 13.

PEMBAHASAN DAN HASIL

Pembentukan Model

Model matematika mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit ini adalah suatu model matematika yang dimodifikasi dengan menambahkan asumsi Q yang menyatakan parameter yang mengukur efek jenuh insidensi secara konstan, dengan laju Penularan penyakit menggunakan non-liniear yaitu $\frac{PXY}{Q+X}$.. Secara umum asumsi-asumsi yang digunakan dalam penyusunan model ini diantaranya sebagai berikut :

a). Dengan adanya kehadiran penyakit yang menyebar dengan laju P sehingga untuk populasi mangsa dibagi menjadi dua kelas yakni $X(t)$ menyatakan kelas mangsa yang rentan, $Y(t)$ menyatakan kelas populasi mangsa yang telah terinfeksi sedangkan t merupakan waktu [10].

b). Tanpa adanya penyakit dan pemangsa dengan pertumbuhan populasi mangsa r $(r > 0)$ mengikuti pertumbuhan logistik, dengan daya dukung lingkungan terhadap mangsa $(K > 0)$ [2].

c). Laju penularan penyakit dari mangsa yang sakit ke mangsa yang rentan terserang penyakit yang disebabkan oleh interaksi keduanya, yang berbentuk laju penularan adalah nonliniear yaitu $\frac{PXY}{Q+X}$, dengan PXY merupakan laju penularan penyakit dari mangsa rentan terhadap mangsa terinfeksi, $\frac{1}{Q+X}$ adalah efek jenuh insidensi dari mangsa rentan secara konstan [4, 5, 10].

d). Penyebaran penyakit dengan laju P hanya terjadi diantara mangsa saja dan bukan penyakit turunan, populasi yang terinfeksi tidak akan sembuh [2, 4].

e). Pemangsaan setiap individu yang terinfeksi penyakit mempunyai proporsi yang lebih besar dari pada mangsa yang rentan, karena mangsa yang terinfeksi lebih mudah akibat dari pergerakannya yang lebih lambat.

f). Para pemangsa tumbuh dengan subur pada saat mangsanya sangat banyak, akan tetapi pada akhirnya persediaan makanan pemangsa akan menurun. Ketika populasi pemangsa menurun, maka populasi mangsa akan meningkat lagi. Keadaan ini akan terus berputar (tumbuh dan turun).

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, dapat didefinisikan untuk parameter modelnya adalah sebagai berikut:

r menyatakan bahwa laju pertumbuhan/kelahiran murni pada populasi mangsa [10]

K menyatakan bahwa daya dukung lingkungan (*carrying capacity*) terhadap mangsa

P menyatakan bahwa laju penularan penyakit

γ menyatakan bahwa laju total penyerangan pemangsa

β menyatakan bahwa laju penanganan pemangsa

Q menyatakan parameter yang mengukur efek jenuh insidensi secara konstan [4, 2 ,5].

ε menyatakan bahwa laju perubahan ketangkasan lolos untuk mangsa

d menyatakan bahwa laju kematian pada pemangsa

Dengan adanya asumsi, variabel dan parameter di atas, maka akan di bentuk kedalam model matematika yaitu:

$$\dot{X} = rX\left(1-\frac{X}{K}\right) - \frac{PXY}{Q+X}, X > 0,$$
$(4.1.a)$
$$\dot{Y} = \frac{PXY}{Q+X} - \frac{\gamma YZ}{Z+\gamma\beta Y}, Y > 0,$$
$(4.1.b)$
$$\dot{Z} = \frac{\varepsilon\gamma YZ}{Z+\gamma\beta Y} - dZ, Z > 0,$$
$(4.1.c)$

Untuk mempermudah dalam menyelesaikan sistem persamaan (4.1) di atas, maka diperlukan penyederhanaan atau mengurangi parameter sebagai berikut:
di misalkan untuk variabael-variabel X, Y, Z adalah:

$$x = \frac{X}{K},\quad y = \frac{Y}{K},\quad z = \frac{Z}{\gamma\beta K},\quad t = r\tau$$
(4.2)

dan diandaikan lagi untuk parameter-parameter:

$$k = \frac{PK}{rQ},\quad b = \frac{\gamma}{r},\quad c = \frac{\varepsilon}{r\beta},\quad a = \frac{d}{r}, \alpha = \frac{K}{Q}$$
(4.3)

Sehingga di peroleh sistem baru seperti berikut:

$$\dot{x} = x(1-x) - \frac{kxy}{1+\alpha x}$$
$(4.4.a)$
$$\dot{y} = \frac{kxy}{1+\alpha x} - b\frac{yz}{z+y}$$
$(4.4.b)$
$$\dot{z} = c\frac{yz}{z+y} - az$$
$(4.4.c)$

Titik Kestimbangan

Titik kesetimbangan dari sistem (4.2) dapat di peroleh dengan menjadikan ruas kanan masing-masing persamaan sama dengan nol, atau $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, $\frac{dz}{dt} = 0$. Titik kestimbangan yang di peroleh ada tiga macam yaitu:

a). Titik kestimbangan trivial atau asal.
Titik kesetimbangan asal adalah dimana keberadaan untuk populasi itu masih di katakan musnah atau mati. sehingga dapat ditulis $E_0^* = (0,0,0)$.

b). Titik kesetimbangan bebas mangsa sakit dan pemangsa.
Titik kesetimbangan bebas mangsa sakit dan pemangsa berarti di dalam populasi, hanya terdapat mangsa sehat namun tidak

ada satu pun mangsa sakit dan pemangsa jadi untuk $x^*=1, y^*=0, z^*=0$, sehingga dapat di tulis kembali sebagai berikut $E_1^*=(1,0,0)$.

c). Titik kesetimbangan endemik mangsa dan pemangsa

Titik kesetimbangan endemik mangsa dan pemangsa artinya di dalam populasi selalu terdapat mangsa sehat, mangsa yang sakit, sehingga adanya interaksi mangsa-pemangsa.

Untuk mendapatkan titik kesetimbangan endemik mangsa-pemangsa maka Pertamakali didefinisikan untuk $x(1-x)=\frac{kxy}{1+\alpha x}=b\frac{yz}{z+y}$ dan $\frac{yz}{z+y}=\frac{a}{c}z$, setelah itu sistem persamaan (4.4) disamadengankan dengan nol.

a). Dari persamaan $(4.4.a)$ diperoleh titik ekulibrium y yang dinotasikan pada $y^*=\frac{(1-x^*)(1+\alpha x^*)}{k}$.

b). Dari persamaan $(4.4.c)$ diperoleh titik ekulibrium z yang dinotasikan pada $z^*=\left(\frac{c}{a}-1\right)y^*$.

c). Dari persamaan $(4.4.b)$ diperoleh titik ekulibrium x yang dinotasikan pada $x^*=\frac{b}{k-\alpha}-\frac{ba}{c(k-\alpha)}$.

Jadi diperoleh untuk Titik kesetimbangan endemik mangsa dan pemangsa adalah $E_2^*=\left(\frac{b}{k-\alpha}-\frac{ba}{c(k-\alpha)},\frac{(1-x^*)(1+\alpha x^*)}{k},\left(\frac{c}{a}-1\right)y^*\right)$.

Kestabialn Titik Kesetimbangan

Setelah diperoleh titik kesetimbangan dari model, maka akan diselidiki kestabilan titik kesetimbangan pada model tersebut. Sifat kestabilan ini berguna untuk mengetahui kecenderungan apakah dalam populasi akan terbebas dari mangsa-pemangsa yang dibicarakan ataukah justru akan terjadi endemik mangsa-pemangsa. Metode yang digunakan untuk menguji kestabian titik ekuilibrium pada makalah ini adalah kriteria nilai eigen.

Misalkan

$$f(x,y,z)=x(1-x)-\frac{kxy}{1+\alpha x}=x-x^2-\frac{kxy}{1+\alpha x}$$

$$g(x,y,z)=\frac{kxy}{1+\alpha x}-b\frac{yz}{z+y}$$

$$h(x,y,z)=c\frac{yz}{z+y}-az$$

Masing-masing fungsi persamaan diatas diturunkan secara parsial terhadap variabel pada fungsi tersebut Sehingga diperoleh matrik jacobinya adalah sebagai berikut:

$$Jf(x,y,z)=\begin{bmatrix}1-2x-\frac{ky}{(1+\alpha x)^2} & -\frac{kx}{1+\alpha x} & 0\\ \frac{ky}{(1+\alpha x)^2} & \frac{kx}{1+\alpha x}-b\frac{z^2}{(z+y)^2} & -b\frac{y^2}{(z+y)^2}\\ 0 & c\frac{z^2}{(z+y)^2} & c\frac{y^2}{(z+y)^2}-a\end{bmatrix}$$

Untuk mengetahui sifat titik kesetimbangan dimasa yang akan mendatang, maka titik kesetabilan harus di uji kesetabilannya terlebih dahulu melalui liniearisasi nilai eigen-nilai eigen. Hal ini dapat dilakukan dengan cara mensubtitusikan setiap titik kesetimbangan $E_0^*\ (0,0,0)$, $E_1^*\ (1,0,0)$ dan $E_2^*\left(x^*=\frac{b}{k-\alpha}-\frac{ba}{c(k-\alpha)},y^*=\frac{(1-x^*)(1+\alpha x^*)}{k},z^*=\left(\frac{c}{a}-1\right)y^*\right)$ terhadap matriks Jakobian (4.5) di atas sebagai berikut:

a). Kestabilan Titik Kestimbangan Trivial atau E_0^*

Dengan cara mensubtitusikan titik kesetimbangan $E_0^*\ (0,0,0)$, pada matrik dii atas maka diproleh persamaan karakteristiknya yaitu $(\lambda-1)(\lambda)(\lambda+a)=0$. Sehingga dapat ditentukan untuk nilai eigen-nilai eigen dari persamaan karakteristiknya adalah $\lambda_1>1$, $\lambda_2=0$, dan $\lambda_3<-a$, maka berdasarkan teorema (2.1) maka titik kestimbangan $E_0^*\ (0,0,0)$ adalah tidak stabil. Hal ini berarti di dalam waktu yang cukup lama tidak ada populasi mangsa sehat dan sakit yang akan bertahan hidup, sehingga akan terjadi untuk semua populasi pemangsa juga akan mati.

b). Kestabilan Titik Kestimbangan Bebas Mangsa Sakit dan Pemangsa atau E_1^*

Dengan cara mensubtitusikan titik kesetimbangan $E_1^*=(1,0,0)$ pada matrik dii atas maka akan di peroleh untuk persamaan karakteristiknya adalah $(\lambda+1)\left(\lambda-\frac{k}{1+\alpha}\right)(\lambda+a)=0$. Jadi dapat ditentukan untuk nilai eigen-nilai eigen dari persamaan karakteristiknya yaitu $\lambda_1=-1<0$, $\lambda_2=\frac{k}{1+\alpha}>0$, dan $\lambda_3=-a<0$, sehingga untuk titik kestimbangan $E_1^*=(1,0,0)$ tidak stabil. Hal ini dapat di simpulkan bahwa untuk waktu yang sangat lama ketika populasi mangsa sehat bisa bertahan hidup dan mangsa sakit tidak bisa bertahan hidup, sehingga akan terjadi bahwa untuk populasi pemangsa juga tidak akan bisa bertahan hidup.

c). Kestabilan Titik Kestimbangan Endemik Mangsa dan Pemangsa atau E_2^*

Teorema (4.1): Jika $\frac{2(k+\alpha-1)}{\alpha} < x^* < \frac{1}{2}$ maka titik kestimbangan endemik mangsa dan pemangsa atau E_2^* adalah stabil asimtotik.

Bukti:

Dengan cara mensubtitusikan titik kesetimbangan

$$E_2^* = \left(x^* = \frac{b}{k-\alpha} - \frac{b\alpha}{c(k-\alpha)}, y^* = \frac{(1-x^*)(1+\alpha x^*)}{k}, z^* = \left(\frac{c}{\alpha} - 1\right) y^*\right)$$

pada matrik dii atas maka akan diperoleh matrik di atas berubah menjadi sebagai berikut:

$$f(x^*,y^*,z^*) = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha x^* - 2\alpha x^{*2} - x^*}{(1+x^*)} & -\dfrac{k x^*}{(1+\alpha x^*)} & 0 \\ \dfrac{(1-x^*)}{(1+\alpha x^*)} & \dfrac{k x^*}{(1+\alpha x^*)} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\alpha x^*-2\alpha x^{*2}-x^*}{(1+x^*)} & -\frac{kx^*}{(1+\alpha x^*)} & 0 \\ \frac{(1-x^*)}{(1+\alpha x^*)} & \frac{kx^*}{(1+\alpha x^*)} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda - \frac{\alpha x^*-2\alpha x^{*2}-x^*}{(1+x^*)} & \frac{kx^*}{(1+\alpha x^*)} & 0 \\ -\frac{(1-x^*)}{(1+\alpha x^*)} & \lambda - \frac{kx^*}{(1+\alpha x^*)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+\alpha \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda - \frac{\alpha x^*-2\alpha x^{*2}-x^*}{(1+x^*)}\right)\left(\lambda - \frac{kx^*}{(1+\alpha x^*)}\right)(\lambda+\alpha) + \left(\frac{kx^*}{(1+\alpha x^*)}\right)(0)(0) + (0)\left(-\frac{(1-x^*)}{(1+\alpha x^*)}\right)(0) - \left(\frac{kx^*}{(1+\alpha x^*)}\right)\left(-\frac{(1-x^*)}{(1+\alpha x^*)}\right)(\lambda+\alpha) - \left(\lambda - \frac{\alpha x^*-2\alpha x^{*2}-x^*}{(1+x^*)}\right)(0)(0) - (0)\left(\lambda - \frac{kx^*}{(1+\alpha x^*)}\right)(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+\alpha)\left[\left(\lambda - \frac{\alpha x^*-2\alpha x^{*2}-x^*}{(1+x^*)}\right)\left(\lambda - \frac{kx^*}{(1+\alpha x^*)}\right) - \left(\frac{kx^*}{(1+\alpha x^*)}\right)\left(-\frac{(1-x^*)}{(1+\alpha x^*)}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+\alpha)\left[\left(\lambda^2 - \frac{\lambda k x^*}{1+\alpha x^*} - \frac{\lambda \alpha x^*}{1+\alpha x^*} + \frac{\lambda x^*}{1+\alpha x^*} + \frac{\lambda 2\alpha x^{*2}}{1+\alpha x^*} + \frac{\alpha x^{*2}k}{(1+\alpha x^*)^2} - \frac{2\alpha x^{*3}k}{(1+\alpha x^*)^2} - \frac{x^{*2}k}{(1+\alpha x^*)^2}\right) - \left(-\frac{kx^*}{(1+\alpha x^*)^2} + \frac{kx^{*2}}{(1+\alpha x^*)^2}\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+\alpha)\left[\lambda^2 + \lambda\left(\frac{2\alpha x^{*2}}{1+\alpha x^*} - \frac{kx^*}{1+\alpha x^*} - \frac{\alpha x^*}{1+\alpha x^*} + \frac{x^*}{1+\alpha x^*}\right) + \left(\frac{\alpha x^{*2}k}{(1+\alpha x^*)^2} - \frac{2\alpha x^{*3}k}{(1+\alpha x^*)^2} - \frac{x^{*2}k}{(1+\alpha x^*)^2} + \frac{kx^*}{(1+\alpha x^*)^2} - \frac{kx^{*2}}{(1+\alpha x^*)^2}\right)\right]$$

dari penyelesaian matrik $Jf(x^*,y^*,z^*)$ di atas maka akan diperoleh nilai eigen salah satu nilai eigen dari matriks $Jf(x^*,y^*,z^*)$ diatas adalah $\lambda = -\alpha$, sedangkan untuk nilai-nilai eigen yang lainnya merupakan akar-akar dari polinomial adalah sebagai berikut:

$$(\lambda+\alpha) + \lambda^2 + \lambda A + B = 0$$

Dari akar-akar polinomial (4.9) maka untuk setiap nilai-nilai eigen A dan B adalah:

$$A = \frac{2\alpha x^{*2} - kx^* - \alpha x^* + x^*}{1+\alpha x^*}$$

$$A = \frac{x^*}{1+\alpha x^*}(2\alpha x^* - k - \alpha + 1)$$

$$A > 0$$

$\Leftrightarrow \frac{x^*}{1+\alpha x^*}(2\alpha x^* - k - \alpha + 1) > 0,$ karena $\left(\frac{x^*}{1+\alpha x^*}\right) > 0$ maka

$$2\alpha x^* - k - \alpha + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(2x^* - 1) - k + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(2x^* - 1) > k - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^* - 1 > \frac{k-1}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 2x^* > \frac{k-1}{\alpha} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^* > \frac{k-1+\alpha}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x^* > 2\frac{k-1+\alpha}{\alpha}$$

(5.0)

jadi untuk $A > 0$ jika $x^* > 2\frac{k-1+\alpha}{\alpha}$.

$$B = \frac{\alpha x^{*2}k - 2\alpha x^{*3}k - 2x^{*2}k + kx^*}{(1+\alpha x^*)^2}$$

$$B > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^* k}{(1+\alpha x^*)^2}(\alpha x^* - 2\alpha x^{*2} - 2x^* + 1) > 0$$

karena $\left(\frac{x^* k}{1+\alpha x^*}\right) > 0$ maka

$$\alpha x^* - 2\alpha x^{*2} - 2x^* + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow -2\alpha x^{*2} + (\alpha - 2)x^* + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha x^{*2} - (\alpha - 2)x^* - 1 < 0$$

(5.1)

untuk menentukan akar-akar $x^*_{1,2}$ dari persamaan (5.1) maka:

$$x^*_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^*_{1,2} = \frac{--(\alpha-2) \pm \sqrt{(\alpha-2)^2 - 4.2\alpha.-1}}{2.2\alpha}$$

$$x^*_{1,2} = \frac{(\alpha-2) \pm \sqrt{(\alpha-2)^2 + 8\alpha}}{4\alpha}$$

$$x^*_{1,2} = \frac{(\alpha-2) \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4 + 8\alpha}}{4\alpha}$$

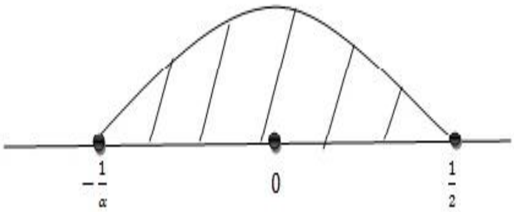
$$x^*_{1,2} = \frac{(\alpha-2) \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha + 4}}{4\alpha}$$

$$x^*_{1,2} = \frac{(\alpha-2) \pm \sqrt{(\alpha+2)^2}}{4\alpha}$$

$$x^*_1 = \frac{(\alpha-2)+(\alpha+2)}{4\alpha} = \frac{2\alpha}{4\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$x^*_2 = \frac{(\alpha-2)-(\alpha+2)}{4\alpha} = \frac{-4}{4\alpha} = -\frac{1}{\alpha}$$

Jadi untuk x^* yang memenuhi $B > 0$ adalah $-\frac{1}{\alpha} < x^* < \frac{1}{2}$



Gambar: 4.1 Nilai Batas

Dari penyelesaian untuk nilai eigen-nilai eigen A dan B di atas di peroleh bahwa:

$A > 0$ jika $x^* > 2\frac{k-1+\alpha}{\alpha}$, dan

$B > 0$ jika $-\frac{1}{\alpha} < x^* < \frac{1}{2}$ atau

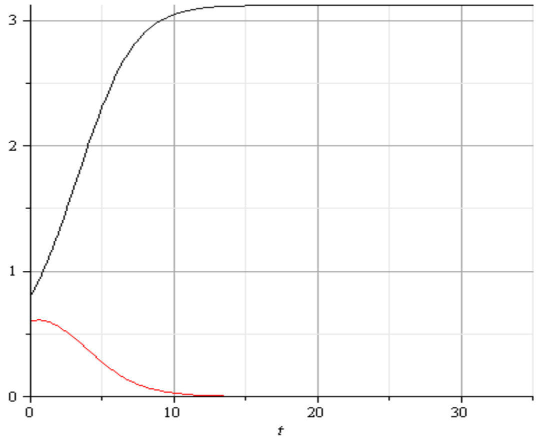
$A, B > 0$ jika $-\frac{1}{\alpha} < 2\frac{k-1+\alpha}{\alpha} < x^* < \frac{1}{2}$, sehingga

$A, B > 0$ jika $2\frac{k-1+\alpha}{\alpha} < x^* < \frac{1}{2}$.

Dari uraian di atas terbukti jika $2\frac{k-1+\alpha}{\alpha} < x^* < \frac{1}{2}$ maka $A > 0$ dan $B > 0$ sehingga untuk model mangsa–pemangsa dengan sebagian mangsa sakit adalah stabil asimtotik. Hal ini berarti untuk waktu yang sangat lama maka pada pertumbuhan populasi mangsa dapat bertahan hidup dan terdapat populasi mangsa sakit sehingga untuk populasi pemangsa juga bisa bertahan hidup sesuai dengan proporsi mangsanya.

Simulasi

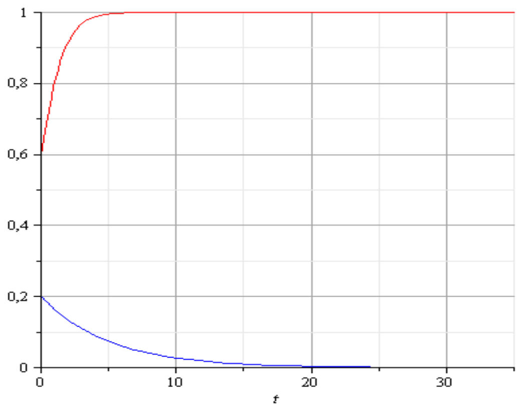
Di misalkan untuk nilai parameter-parameternya yaitu $k = 0.5, b = 0.9, c = 0.4, a = 0.2$ dan $\alpha = 0.3$ dengan nilai awalnya $x(0) = 0.6, y(0) = 0.8$ dan $z(0) = 0$. Dengan menggunakan program Maple akan di peroleh sebagai berikut:



Gambar 4.2 Interaksi Mangsa Sehat dengan Mangsa Sakit

Dari gambar (4.2) di atas dapat di simpulkan bahwa populasi mangsa sakit bergerak naik dan dalam waktu yang lama mangsa sakit akan bergerak konstan. Sedangkan untuk populasi mangsa sehat dalam waktu yang sangat lama akan musnah.

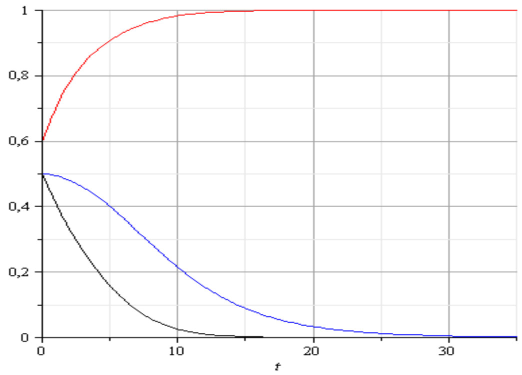
Dengan merubah nilai awalnya $x(0) = 0.6, y(0) = 0$ dan $z(0) = 0.2$. Maka akan diperoleh sebagai berikut:



Gambar 4.3 Interaksi Mangsa Sehat dengan Pemangsa

Pada gambar (4.3) di atas dapat di ketahui bahwa pada awalnya naik namun pada waktu yang sangat lama mangsa sehat bergerak konstan sedangkan untuk mangsa sakit menurun, hingga dalam waktu yang sangat lama mangsa sakit bergerak konstan menuju nol atau musnah.

Sedangkan untuk nilai awalnya $x(0) = 0{,}6, y(0) = 0{,}5$ dan $z(0) = 0{,}5$. Maka akan diperoleh sebagai berikut:



Gambar 4.4 Interaksi Mangsa Sehat, Mangsa Sakit dan Pemangsa

Dari gambar (4.4) di atas dapat di simpulkan bahwa untuk populasi mangsa sehat pada awalnya naik, kemudian dalam waktu yang lama populasi mangsa sehat akan bergerak konstan. Sedangkan untuk populasi pemangsa menurun, sebanding dengan proporsi mangsa sakit.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Berdasarkan perhitungan dan pembahasan yang telah di lakukan pada bab 4, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit menggunakan sistem persamaan non-liniear adalah:

$$\dot{X} = rX\left(1-\frac{X}{K}\right) - \frac{PXY}{Q+X}, x > 0$$

$$\dot{Y} = \frac{PXY}{Q+X} - \frac{\gamma YZ}{Z+\gamma\beta Y}, y > 0$$

$$\dot{Z} = \frac{\varepsilon\gamma YZ}{Z+\gamma\beta Y} - dZ, z > 0$$

Dan disederhanakan lagi menjadi:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x) - \frac{kxy}{1+\alpha x} \\ \dot{y} = \frac{kxy}{1+\alpha x} - b\frac{yz}{z+y} \\ \dot{z} = c\frac{yz}{z+y} - az \end{cases}$$

Di mana $\dot{x}$ adalah mangsa sehat, $\dot{y}$ adalah mangsa sakit, $\dot{z}$ merupakan pemangsa

2. Titik kesetimbangan yang di peroleh terdiri atas tiga yaitu: titik kesetimbangan trivial atau asal $E_0^*(x^*,y^*,z^*) = (0,0,0)$, titik kesetimbangan bebas mangsa sakit dan pemangsa $E_1^*(x^*,y^*,z^*) = (1,0,0)$, dan titik kesetimbangan endemik mangsa dan pemangsa $E_2^*(x^*,y^*,z^*) = \left(\frac{b}{k-\alpha} - \frac{b\alpha}{c(k-\alpha)}, \frac{(1-x^*)(1+\alpha x^*)}{k}, \left(\frac{c}{a}-1\right)y^*\right)$.
3. Titik kesetimbangan trivial $E_0^*(x^*,y^*,z^*) = (0,0,0)$ merupakan titik kesetimabangan tidak stabil. Hal ini berarti di dalam waktu yang cukup lama tidak ada populasi mangsa sehat dan sakit yang akan bertahan hidup, sehingga akan terjadi untuk semua populasi pemangsa juga akan mati.
4. Titik kesetimabangan $E_1^*(x^*,y^*,z^*) = (1,0,0)$ merupakan titik kesetimbangan tidak stabil, maka dapat disimpulkan bahwa untuk waktu yang sangat lama ketika populasi mangsa sehat bisa bertahan hidup dan mangsa sakit tidak bisa bertahan hidup, sehingga akan terjadi bahwa untuk populasi pemangsa juga tidak akan bisa bertahan hidup.
5. $E_3^*(x^*,y^*,z^*) = \left(\frac{b}{k-\alpha} - \frac{b\alpha}{c(k-\alpha)}, \frac{(1-x^*)(1+\alpha x^*)}{k}, \left(\frac{c}{a}-1\right)y^*\right)$ merupakan titik kesetimbangan stabil ketika untuk $A, B > 0$ jika $2\frac{k-1+\alpha}{\alpha} < x^* < \frac{1}{2}$. Hal ini berarti untuk waktu yang sangat lama maka pada pertumbuhan populasi mangsa sehat dapat bertahan hidup dan terdapat populasi mangsa sakit sehingga untuk populasi pemangsa juga bisa bertahan hidup sesuai dengan proporsi mangsanya.

REFERENSI

[1] Alebraheem, J. Dan Abu Hasan, Y. Persistence Of Predators In A Two Predators-One Prey Model With Non-Priodic Solution. *School of mathematical Sciences USM*, vol. 6, No. 19, 943-956.

[2] Das, K.P. Mathematical A Study Of A Predator-Prey Dynamics With Diseases In Predator, *Department Of Mathematis*, India.

[3] Hale, J. K. dan Kocak, H. *Dynamic and Bifurcation*, Springer-verlag, New York. 1991.

[4] Kamel, Naji, R. Dkk, The Dynamics Of A Prey-Predator Model With The Existence Of Diseases And Pollution, *University Of Sulalimania*, Iraq, Vol.2013, hal. 1, 94-123, 2013.

[5] Lenzimi, Ph. dan Rebaza, J., Non-Constant Predator Harvesting on Ratio-Dependent Predator-Prey Model, *Departement of Mathematics*, Vol. 4, No. 16, hal 791-803.
[6] Meiss, J. D. *Differential Dynamical Systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, USA. 2007.
[7] Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-verlag, New York. 1991.
[8] Rahma, Siti, Model Seir Penyakit Campak dengan Vaksinasi dan Migrasi, *Tugas Akhir Mahasiswi Uin Suska Riau*, Pekanbaru. 2009.
[9] Widodo, *Pengantar Model Matematika*, FMIPA UGM, Yogyakarta. 2007.
[10] Wuhaib, S. A. dan Abu Hasan, Y., *A Prey Predator Model With Vulnerable Infected Prey*, Applied Mathematical Sciences, Vol.6, 107, 5333-5348, 2012.