

MODEL *PREDATOR-PREY* DENGAN ADANYA INFEKSI DAN PENGOBATAN PADA POPULASI MANGSA

Khozin Mu'tamar¹, Zulkarnain²

^{1,2} Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Riau

¹Email: khozin.mutamar@unri.ac.id, ²zulkarnain@unri.ac.id

ABSTRAK

Model *predator-prey* adalah salah satu model yang diperkenalkan dalam perkuliahan matematika. Model ini digunakan untuk menggambarkan interaksi antara dua populasi yang bersifat mangsa dan pemangsa. Namun, pada model *predator-prey* yang dasar selalu diasumsikan bahwa kedua populasi dalam kondisi sehat. Padahal, kondisi pada lingkungan menunjukkan bahwasanya terdapat mangsa dan pemangsa dengan kondisi sakit yang mempengaruhi perilaku untuk bertahan dan berburu makanan. Pada artikel ini, akan dimodelkan sistem yang menunjukkan perilaku *predator-prey* dengan kondisi adanya infeksi penyakit pada populasi mangsa. Selain itu, dipertimbangkan adanya pengobatan yang diberikan pada mangsa untuk mengurangi jumlah infeksi pada populasi mangsa. Analisis kualitatif tentang kestabilan model dilakukan secara lokal dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Pada akhir artikel, diberikan simulasi untuk melihat perilaku model di sekitar titik ekuilibrium dan perbandingan dengan perilaku model nonlinearnya.

Kata Kunci: Predator-prey model, kestabilan Routh-Hurwitz, mangsa terinfeksi, *treatment model*

ABSTRACT

Predator-prey model is basic model that is given in mathematic class. This model is used to describe behaviour two population; that is predator and their prey. This basic model assume that the populations are healthy. However, in real life, some prey may be in ill condition because of some infectious that conduct their behaviour. In this paper, we present an approach to describe behaviour of predator and prey with infectious in prey population. Besides, this model considering about treatment to reduce infected population. Stability analysis of this model is done locally using Routh-Hurwitz criterion. In the end of this paper, some simulation are given to show behaviour model around equilibrium point and compare with nonlinear behaviour.

Keywords: *Predator-prey model, Routh-Hurwitz criterion, infected prey, treatment model*

Corresponding Author:

Khozin Mu'tamar,

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Riau

Email: khozin.mutamar@unri.ac.id

Pendahuluan

Hubungan antar individu adalah fenomena yang tidak terelakkan di dunia nyata. Beberapa individu berinteraksi untuk menunjang hidup, dengan menjalin relasi dengan individu lain. Interaksi yang seperti ini biasanya bersifat saling menguntungkan. Namun, tidak seluruh antar individu melakukan interaksi yang bersifat seperti ini. Beberapa individu membutuhkan individu lainnya sebagai penunjang hidup. Interaksi yang dilakukan individu seperti ini dilakukan mendukung kelangsungan hidup mereka.

Wujud interaksi yang sifatnya untuk kelangsungan hidup biasanya dilakukan oleh populasi yang sifatnya pemangsa bagi populasi lain. Contoh yang sering ditemui

di lingkungan adalah perilaku serigala dan kelinci. Serigala yang merupakan hewan karnivora membutuhkan daging untuk bertahan hidup. Oleh karena itu, serigala akan memburu kelinci sebagai sumber makanan untuk bertahan hidup.

Interaksi antar populasi dapat dianalisis dengan menggunakan matematika. Objek yang diamati adalah jumlah kedua populasi yang berkembang setiap waktu. Dalam matematika, telah dikenal dengan model *predator-prey* yang diperkenalkan oleh Lotka dan Voltera pada tahun 1926 [2]. Model ini menganalisis populasi pemangsa dan mangsa di suatu wilayah dengan mempertimbangkan bahwasanya mangsa adalah sumber makanan satu - satunya penunjang kehidupan pemangsa. Interaksi antara mangsa dan pemangsa akan

mempengaruhi perkembangan kedua populasi. Model matematika yang digunakan adalah sistem persamaan diferensial biasa, yang berfungsi mengamati perubahan jumlah individu di masing-masing populasi setiap waktunya.

Model *predator-prey* yang dibentuk oleh Lotka dan Volterra mengasumsikan kedua populasi dalam kondisi sehat. Oleh karena kedua populasi dalam kondisi sehat, tidak ada kendala yang menghalangi pemangsa untuk berburu dan mangsa untuk menghindari buruan. Namun, kondisi di lingkungan menunjukkan bahwa adanya populasi yang sakit. Kondisi pemangsa yang sakit akan membuat kemampuan berburu menurun sedangkan bagi mangsa membuat kemampuan menghindar berkurang.

Penelitian mengenai model *predator-prey* dengan melibatkan populasi mangsa yang terinfeksi telah banyak dilakukan sebelumnya. Arino et.al [1] meneliti model *predator-prey* dengan infeksi berupa rasio dengan populasi total dan mengasumsikan hanya populasi sehat yang dapat bereproduksi sedangkan mangsa yang sehat tidak bereproduksi dan tidak bisa sembuh. Hetchcote et.al [3] meneliti model *predator-prey* dengan pertumbuhan logistik dan menggabungkan infeksi dengan pola model SIR (*susceptible, infectible, Recovered*). Kumar et.al [4] meneliti model *predator-prey* dengan studi kasus pada penyebaran *worm, trojan horse* dan antivirus di komputer. Worm yang diasumsikan sebagai pemangsa menginfeksi komputer dengan bantuan interaksi perangkat komputer lainnya yang telah terinfeksi. Rahman dan Chakravarty [5] meneliti model dengan infeksi yang hanya menyebar di populasi mangsa secara bilinear dan mangsa yang terinfeksi tidak mampu untuk sembuh lalu mati. Sani et.al [6] meneliti model penyebaran infeksi pada populasi mangsa dengan pola SIS (*susceptible, infectible, susceptible*) dan mengkaji kestabilannya dengan *next generation matrix (NGM)*. Sinha et.al [7] memodelkan *predator-prey* dengan pertumbuhan logistik pada mangsa dan infeksi pada mangsa dipengaruhi dari lingkungan dengan pola SIS. Sujatha dan Gunasekaran [8] meneliti model *predator-prey* dengan infeksi pola SIS dan mengikutsertakan pemanenan untuk populasi mangsa serta menganalisis kestabilan dengan NGM. Wang dan Ma [9] meneliti model dengan kondisi infeksi dengan tipe fungsi Holling III. Wuhaib dan Hasan [10] meneliti model dengan infeksi pada mangsa yang melibatkan pemanenan. Populasi mangsa yang terinfeksi mampu untuk sembuh dan menjadi populasi sehat yang dapat terinfeksi kembali. Zhou [11] meneliti model *predator-prey* dengan memberikan modifikasi berupa fungsi respon berupa Leslie-Gower atau Holling tanner.

Berdasarkan penjabaran kondisi di atas, pada artikel ini akan dikaji tentang model *predator-prey* dengan infeksi pada populasi mangsa. Kemudian, populasi mangsa akan diberikan pengobatan untuk mengurangi jumlah populasi yang sakit. Pada saat populasi diberi

pengobatan, populasi ini dihindarkan dari populasi pemangsa. Pengobatan yang dilakukan di wilayah khusus dengan kepadatan tertentu dan populasi yang telah berhasil diobati tidak kembali dilepas ke lingkungan.

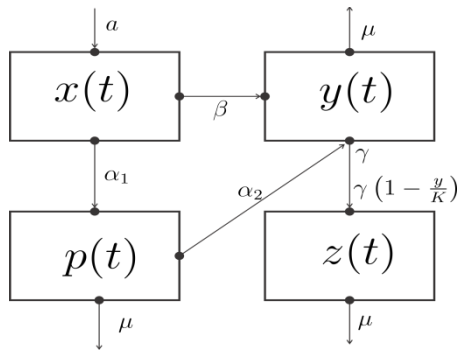
Selanjutnya, artikel ini disusun berdasarkan sistematika berikut ini. Perumusan model diberikan setelah bab ini. Analisis kualitatif kestabilan model secara lokal di sekitar titik ekuilibrium dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz diberikan pada bagian tiga. Simulasi numerik diberikan pada bagian empat. Akhirnya, kesimpulan dari paper ini diberikan pada bagian akhir artikel ini.

Modelling Predator-Prey dengan Infeksi dan Pengobatan

Misalkan didefinisikan $x(t), y(t), z(t)$ adalah populasi mangsa pada suatu habitat pada waktu t yang terdiri atas mangsa sehat, mangsa terinfeksi dan mangsa terinfeksi yang masuk daerah treatment. Selanjutnya, didefinisikan $p(t)$ sebagai populasi pemangsa pada habitat yang sama dengan populasi mangsa pada waktu t . Hubungan antara mangsa dan pemangsa pada suatu habitat ini diberikan pada Gambar (1).

Asumsi yang digunakan dalam model ini adalah

1. Hanya mangsa sehat yang dapat tumbuh. Tanpa adanya pemangsa, mangsa sehat tumbuh secara proporsional sebesar a .
2. Infeksi antar mangsa terjadi akibat interaksi, jumlahnya sebanding dengan hasil kali jumlah kedua populasi dengan konstanta β . Infeksi akan menyebabkan kematian pada populasi terinfeksi secara proporsional sebesar μ .
3. Mangsa yang ditreatment tidak bisa dimangsa oleh pemangsa.
4. Mangsa terinfeksi ditreatment dengan laju proporsional sedangkan populasi infeksi treatment tumbuh secara logistik dengan carrying capacity K . Kegagalan treatment akan mengakibatkan kematian bagi mangsa secara proporsional sebesar b .
5. Mangsa adalah satu-satunya sumber makanan bagi pemangsa sebagai penunjang kehidupan sehingga tidak adanya mangsa akan mengakibatkan kematian pemangsa sebesar μ sedangkan adanya mangsa mengakibatkan pertumbuhan sebanding dengan jumlah populasi keduanya sebesar α_1 .
6. Pemangsa yang memangsa mangsa terinfeksi akan mengalami kematian, sebanding dengan jumlah kedua populasi dengan konstanta α_2



Gambar 1. Skema relasi antar populasi mangsa dan pemangsa dalam model

Berdasarkan skema dan asumsi yang digunakan, diperoleh model yang menggambarkan perilaku pemangsa dan mangsa dengan infeksi pada mangsa yaitu

$$\begin{aligned} x' &= ax - \beta xy - \alpha_1 xp \\ y' &= \beta xy - \alpha_2 yp - \gamma y - \mu y \\ z' &= \gamma y \left(1 - \frac{y}{K}\right) - \mu z \\ p' &= -\mu p + \alpha_1 xp - \alpha_2 yp \end{aligned} \quad (1)$$

dengan $x(0) \geq 0, y(0) \geq 0, z(0) \geq 0, p(0) \geq 0$ dan $a, b, \alpha_i, \beta, \theta_i, \gamma, \mu \in \mathbb{R}^+$.

Analisis Kualitatif Kestabilan Lokal Model

Analisis kestabilan lokal dilakukan di sekitar titik ekuilibrium dari persamaan (1). Ada tiga (3) kondisi yang nantinya menarik untuk diamati, yaitu tidak ada populasi, tidak adanya infeksi pada mangsa dan tidak ada populasi pemangsa. Selanjutnya, titik ekuilibrium dari persamaan (1) diberikan oleh (p, x, y, z)

$$\begin{aligned} E_0 &= \{0, 0, 0, 0\}, \\ E_1 &= \left\{ \frac{a}{\alpha_1}, \frac{\mu}{\alpha_1}, 0, 0 \right\} \\ E_2 &= \left\{ 0, \frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{a}{\beta}, \frac{(K\beta - a)\gamma a}{\beta^2 Kc} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

Titik ekuilibrium E_0 merupakan titik ekuilibrium bebas populasi, E_1 adalah titik ekuilibrium bebas infeksi dan E_2 adalah titik ekuilibrium bebas pemangsa. Kestabilan dari masing titik ekuilibrium ini akan diamati secara lokal menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Proposisi 1. *Titik ekuilibrium bebas populasi E_0 adalah titik ekuilibrium tidak stabil.*

Bukti. Matriks Jacobian dari persamaan (1) diberikan oleh

$$A = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4) \quad (3)$$

Dengan masing masing komponen $a_i, i = 1, 2, 3, 4$ diberikan oleh

$$\begin{aligned} a_1 &= (-\beta y - p\alpha_1 + a \ \beta y \ 0 \ p\alpha_1)^T \\ a_2 &= \left(-\beta x \ \beta x - p\alpha_2 - \gamma - \mu \ -\frac{\gamma y}{K} + \left(1 - \frac{y}{K}\right)\gamma \ -p\alpha_2 \right)^T \\ a_3 &= (0 \ 0 \ -c \ 0)^T \\ a_4 &= (-\alpha_1 x \ -\alpha_2 y \ 0 \ \alpha_1 x - \alpha_2 y - \mu)^T \end{aligned}$$

Jika disubstitusikan nilai E_0 pada persamaan (3) akan diperoleh matriks Jacobian untuk titik ekuilibrium E_0 yaitu

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

dengan persamaan karakteristik dari A_0 adalah $(\lambda + \mu)^2(a - \lambda)(\lambda + \gamma + \mu) = 0$

Solusi dari persamaan karakteristik adalah

$$\lambda_0 = \begin{pmatrix} -\mu \\ -\mu \\ a \\ -\gamma - \mu \end{pmatrix}$$

Oleh karena terdapat nilai eigen positif; $a > 0$, maka titik ekuilibrium E_0 adalah titik ekuilibrium tidak stabil.

Proposisi 2. *Titik ekuilibrium bebas penyakit E_1 adalah titik ekuilibrium yang stabil jika $R_0 < 1$ dengan R_0 didefinisikan dalam bentuk*

$$R_0 = \frac{\beta\mu - \mu\alpha_1 - \gamma\alpha_1}{a\alpha_2}$$

Bukti. Jika disubstitusikan nilai E_1 pada persamaan (2) pada persamaan (3) lalu ditentukan persamaan karakteristiknya, akan diperoleh

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \frac{(a\alpha_2 - \beta\mu + c\alpha_1 + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1)\lambda^3}{\alpha_1} \\ & + \frac{(aca_2 + a\mu\alpha_1 - \beta c\mu + c\gamma\alpha_1 + c\mu\alpha_1)\lambda^2}{\alpha_1} \\ & + \frac{a\mu(a\alpha_2 - \beta\mu + c\alpha_1 + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1)\lambda}{\alpha_1} \\ & + \frac{ca\mu(a\alpha_2 - \beta\mu + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1)}{\alpha_1} = 0 \end{aligned}$$

Solusi dari persamaan karakteristik dipenuhi oleh

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} -\mu \\ \sqrt{-a\mu} \\ -\sqrt{-a\mu} \\ -\frac{a\alpha_2 - \beta\mu + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1}{\alpha_1} \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa kestabilan dari E_1 hanya bergantung kepada $\lambda_{1,4}$ karena nilai ini yang belum bisa dipastikan positif atau negatif. Selanjutnya, jika diinginkan sistem stabil maka dari $\lambda_{1,4}$ haruslah memenuhi kondisi

$$\frac{a\alpha_2 - \beta\mu + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1}{\alpha_1} > 0 \quad (4)$$

Berdasarkan nilai R_0 yang telah didefinisikan, persamaan (4) dapat dituliskan kembali dalam bentuk

$$\frac{a\alpha_2 - R_0 a\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{a\alpha_2}{\alpha_1} (1 - R_0) > 0 \quad (5)$$

Jelas persamaan (5) akan terpenuhi oleh $R_0 < 1$. Jika kondisi pada persamaan (5) telah terpenuhi maka $Re(\lambda_i) \leq 0, i = 1, 2, 3, 4$ sehingga dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium E_1 stabil dengan $R_0 < 1$. Sistem ini tidak mungkin stabil asimtotik pada titik ini dikarenakan terdapat nilai eigen kompleks yaitu pada titik $\lambda_{2,3}^1 = \pm i\sqrt{a\mu}$.

Proposisi 3. Titik ekuilibrium bebas pemangsa E_2 stabil lokal untuk sebarang nilai R_0 .

Bukti. Substitusikan nilai E_2 pada persamaan (3) akan diperoleh nilai eigen

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} -\mu \\ \sqrt{-a(\gamma + \mu)} \\ -\sqrt{-a(\gamma + \mu)} \\ \frac{-a\alpha_2 - \beta\mu + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1}{\beta} \end{pmatrix}$$

Kestabilan sistem di sekitar E_2 hanya dipengaruhi oleh nilai eigen keempat $\lambda_{2,4} = \frac{-a\alpha_2 - \beta\mu + \gamma\alpha_1 + \mu\alpha_1}{\beta}$, yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\lambda_{2,4} = \frac{-a\alpha_2}{\beta} (1 + R_0),$$

yang nilainya akan selalu negatif untuk berapapun nilai R_0 .

Simulasi Model

Pada bagian ini, akan dilakukan simulasi dengan mengambil beberapa nilai parameter yang diperlukan dalam model. Pada Tabel 1 diberikan dua nilai parameter untuk digunakan dalam simulasi dimana salah satu bagian nilai parameter akan menghasilkan nilai $R_0 < 1$ sedangkan nilai parameter lainnya akan menghasilkan nilai $R_0 > 1$.

Tabel 1. Nilai parameter untuk simulasi

Parameter	Nilai jenis 1	Nilai jenis 2
a	4	2
b	1	2
α_1	3	1
α_2	3	1
β	1	4
γ	2	2
μ	1	2
K	50	50

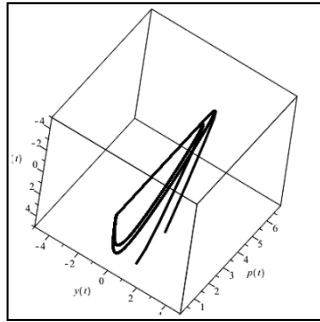
Berdasarkan parameter yang dipilih pada jenis pertama, diperoleh titik ekuilibrium yaitu

$$\begin{aligned} E_0 &= \{p = 0, x = 0, 0y =, z = 0\}, \\ E_1 &= \{p = 1.3, x = 0.3, y = 0, z = 0\}, \\ E_2 &= \{p = 0, x = 3, y = 4, z = 7.4\}, \end{aligned}$$

dan berdasarkan parameter jenis kedua diperoleh titik ekuilibrium

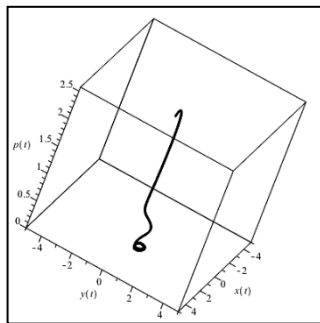
$$\begin{aligned} E_0 &= \{p = 0, x = 0, 0y =, z = 0\}, \\ E_1 &= \{p = 2, x = 2, y = 0, z = 0\}, \\ E_2 &= \{p = 0, x = 1, y = 0.5, z = 0.5\}. \end{aligned}$$

Nilai dari parameter jenis pertama pada Tabel 1 akan mengakibatkan nilai $R_0 = -\frac{2}{3} < 1$ sehingga akan menghasilkan sistem yang stabil di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit dan bebas pemangsa. Sedangkan, untuk nilai parameter jenis kedua akan menghasilkan nilai $R_0 = 2 > 1$ yang berarti bahwa sistem tidak stabil di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit dan stabil di sekitar titik ekuilibrium bebas pemangsa.



Gambar 2. Ruang fase model persamaan (1) dengan parameter pada Tabel 1 jenis pertama dengan beberapa nilai awal dengan $t \in [0,100]$

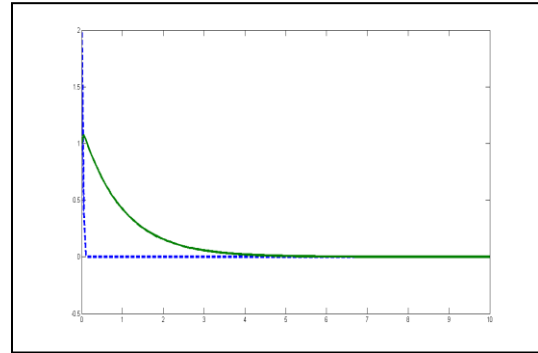
Gambar 2 menunjukkan bahwa populasi dengan nilai awal yang berbeda terus bergerak mengelilingi titik ekuilibrium bebas penyakit. Kurva tidak menyentuh titik ekuilibrium bebas penyakit E_1 , hanya bergerak mengelilingi dikarenakan nilai eigen yang imajiner murni. Kurva juga selalu menjauhi titik ekuilibrium bebas populasi E_0 sepanjang waktu t .



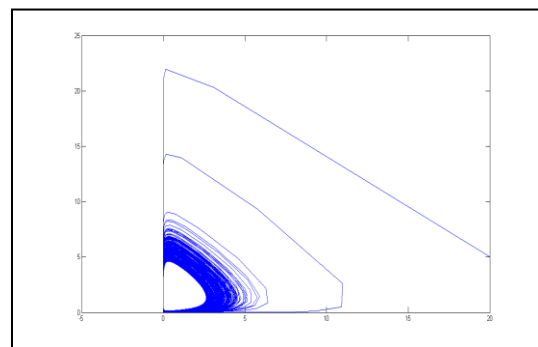
Gambar 3. Ruang fase model persamaan (1) dengan parameter pada Tabel 1 jenis kedua dengan $t \in [0,1.000]$ dengan nilai awal di sekitar E_1

Berdasarkan proposisi 2 dan proposisi 3, untuk $R > 1$ maka sistem tidak stabil di titik E_1 dan stabil pada titik E_2 . Gambar 3 dihasilkan dengan nilai awal di sekitar E_1 . Terlihat bahwa perilaku sistem menjauhi nilai awal dan E_1 dan bergerak menuju titik ekuilibrium E_2 dan berputar terus menerus di sekitarnya.

Terakhir, akan dilakukan simulasi dengan menyelesaikan sistem pada persamaan (1) secara numerik dengan menggunakan nilai parameter jenis pertama. Metode yang digunakan dengan metode Euler dengan mengambil nilai awal jauh dari semua titik ekuilibrium. Tujuan yang ingin dicapai adalah melihat bagaimana perilaku solusi numerik terhadap titik ekuilibrium yang ada.



Gambar 4. Perilaku $y(t), z(t)$ untuk $t \in [0,10]$ yang diselesaikan secara numerik.



Gambar 5. Perilaku $x(t), p(t)$ untuk $t \in [0,10.000]$ yang diselesaikan secara numerik.

Hasil simulasi numerik untuk $y(t), z = (t)$ terhadap t ditunjukkan pada Gambar 4. Gambar 4 menunjukkan bahwa untuk t yang sangat singkat diperoleh bahwa $y(t) = z(t) = 0$, yang bersesuaian dengan E_1 . Selanjutnya, Gambar 5 menunjukkan bahwa sistem bergerak secara kontinu di suatu titik, yang jika disesuaikan dengan penjelasan dari Gambar 4, dapat diprediksi bahwa sistem stabil di sekitar titik E_1 .

Kesimpulan

Model *predator-prey* dengan infeksi dan *treatment* pada populasi mangsa telah dikaji dalam paper ini. Secara kualitatif, paper ini mengkaji perilaku sistem di sekitar titik ekuilibrium bebas populasi, bebas penyakit dan bebas pemangsa. Titik ekuilibrium bebas populasi senantiasa tidak stabil, titik ekuilibrium bebas pemangsa senantiasa stabil tanpa syarat di sekitar titik ekuilibriumnya, dan titik ekuilibrium bebas penyakit stabil jika $R_0 < 1$. Jika dibandingkan dengan model *predator-prey* yang standar, model dalam paper ini memiliki dinamika yang lebih beragam. Pada model ini juga dimungkinkan populasi mangsa yang sakit untuk hilang karena akibat adanya kegiatan *treatment*. Simulasi yang telah dilakukan secara lokal di sekitar titik ekuilibrium dan yang dilakukan secara numerik menunjukkan keselarasan. Dari berbagai nilai awal yang

diambil dalam simulasi, pada waktu tertentu, sistem akan bergerak di sekitar titik ekuilibrium.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada LPPM Universitas Riau atas bantuannya sehingga penelitian ini dapat terlaksana dan kepada para Reviewer atas masukan yang berharga dalam penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

- [1]. O. Arino, A El abdlouai, J Mikram and J Chattopadhyay, *Infection in prey population may act as a biological control in ratio-dependent predator-prey models*, Nonlinearity 17 (2004) 1101–1116
- [2]. W.E. Boyce dan R.C. Dippa, *Elementary differential equations and boundary value problems 10th edition*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2012.
- [3]. H.W. Hethcote, W. Wang, L. Han, Zhien Ma, *A predator-prey model with infected prey*, Theoretical Population Biology 66 (2004) 259 – 268
- [4]. M. Kumar, Bimal Kumar Mishra and T. C. Panda, *Predator-Prey Models on Interaction between Computer Worms, Trojan Horse and Antivirus Software Inside a Computer System*, International Journal of Security and Its Applications, Vol. 10, No. 1 (2016), pp.1 73-1 90
- [5]. Md. S. Rahman, Santabrata Chakravarty, *A predator-prey model with disease in prey*, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2013, Vol. 18, No. 2, 191–209
- [6]. A. Sani, E. Cahyono, Mukhsar, G.A. Rahman, Y.T. Hewindati, F.A.A. Faeldog, F.A. Abdullah, *Dynamics of Disease Spread in a Predator-Prey System*, Advanced Studies in Biology, vol. 6, 2014, no. 4, 169 – 179
- [7]. S. Sinha, O.P. Misra a, J. Dhar, *Modelling a predator-prey system with infected prey in polluted environment*, Applied Mathematical Modelling, 34 (2010) 1861–1872
- [8]. K. Sujatha, M. Gunasekaran, *Dynamics in a Harvested Prey-Predator Model with Susceptible-Infected-Susceptible (SIS) Epidemic Disease in the Prey*, Advances in Applied Mathematical Biosciences. ISSN 2248-9983 Volume 7, Number 1 (2016), pp. 23-31
- [9]. S. Wang, Zhihui Ma, *Analysis of an Ecoepidemiological model with prey refuges*, Journal of applied mathematics vol. 2012.
- [10]. S.A. Wuhaib, Y. Abu Hasan, *A predator-infected prey model with harvesting of infected prey*, ScienceAsia 39S (2013): 37–41
- [11]. X. Zhou, Jingan Cui, Xiangyun Shi, Xinyu Song, *A modified Leslie-Gower predator-prey model with prey infection*, J Appl Math Comput (2010) 33: 471–487