Jurnal Sains, Teknologi dan Industri, Vol. 13, No.1, Desember 2015, pp.108-114
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Karakterisasi Matriks Leslie Ordo Empat

Corry Corazon Marzuki[1], Oktomi Malko[2]
[1,2]Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Suska Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
E-mail: corry@uin-suska.ac.id

(Received: 18 Januari 2016; Revised: 19 Februari 2016; Accepted: 29 Januari 2016)

ABSTRAK

Matriks Leslie dapat digunakan untuk menghitung jumlah populasi perempuan untuk masing-masing kelas umur pada waktu yang akan datang, jika diketahui jumlah populasi perempuan untuk masing-masing kelas umur awal dari populasi tersebut. Untuk mempermudah mendapatkan jumlah populasi untuk p tahun berikutnya, perlu didapatkan karakterisasi matriks Leslie**.** Pada matriks Leslie ordo tiga, jika tingkat kesuburan betina pada kelas umur pertama dan kedua sama dengan nol, dan hasil perkalian dari tingkat kesuburan pada kelas umur ketiga terhadap tingkat ketahanan hidup betina pada kelas umur pertama dan kedua sama dengan 1, maka $L^{3k} = I, L^{3k+1} = L, L^{3k+2} = L^2, L^{3k+3} = I$ untuk $k \geq 1$**.** Oleh karena itu, perlu didapatkan karakterisasi matriks Leslie untuk ordo yang lebih besar, seperti matriks Leslie ordo empat. Pengaplikasian serta pengembangan beberapa lemma dan teorema menghasilkan bahwa jika tingkat kesuburan betina pada kelas umur pertama, kedua dan ketiga sama dengan nol, dan hasil perkalian dari tingkat kesuburan pada kelas umur keempat terhadap tingkat ketahanan hidup betina pada kelas umur pertama, kedua dan ketiga sama dengan 1, maka didapat $L^{4k} = I, L^{4k+1} = L, L^{4k+2} = L^2, L^{4k+3} = L^3, L^{4k+4} = I$ untuk $k \geq 1$.

Katakunci: *karakterisasi matriks Leslie ordo tiga, karakterisasi matriks Leslie ordo empat, matriks Leslie, pertumbuhan populasi*

ABSTRACT

Leslie matrix can use to determine amount of female population for every age class in the future, if we know amount of female population for every initial age class. To simplify to determine amount of population for the next p years, need to be found characterization of Leslie matrix. In the Leslie matrix of order 3, if female fertility rate in the first and second age classes equal to zero, and the product of the fertility rate in the third age class and the female survival rate in the first and second age classes equal to 1, then $L^{3k} = I, L^{3k+1} = L, L^{3k+2} = L^2, L^{3k+3} = I$ for $k \geq 1$. Because of that, we need to find characterization of Leslie matrix for the larger orders, such as Leslie matrix of order 4. Application and development of some lemma and theorems produce that if female fertility rates in the first, second and third age classes equal to zero, and the product of female fertility rate at the fourth age class and female survival rate in the first, second, and third age classes equal to 1, then obtained $L^{4k} = I, L^{4k+1} = L, L^{4k+2} = L^2, L^{4k+3} = L^3, L^{4k+4} = I$ for $k \geq 1$.

Keywords: *Leslie matrix, population growth, characterization of the order three matrices Leslie, Leslie matrix characterization of the order of four.*

Corresponding Author:
Corry Corazon Marzuki
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi,
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Email: corry@uin-suska.ac.id

Jurnal Sains, Teknologi dan Industri, Vol. 13, No.1, Desember 2015, pp.108-114
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

Pendahuluan

Matriks Leslie dapat memberikan gambaran umum tentang dinamika proses pertumbuhan suatu populasi, antara lain: mengenai pertumbuhan populasi pada jangka panjang, pendistribusian populasi dalam kelompok umur untuk jangka panjang, serta penerapannya pada suatu kebijaksanaan pemanenan untuk suatu populasi yang telah berkembang.

Dengan menentukan karakterisasi matriks Leslie, maka dengan mudah akan didapatkan jumlah populasi untuk p tahun berikutnya. Apabila $L^k = I$, maka pada saat $t + nk\,; n \in \mathbb{N}$, jumlah populasi kembali sama dengan jumlah populasi awal.

Karakterisasi matriks Leslie telah diteliti sebelumnya oleh Mudin Simanihuruk dan Hartanto (2005) dengan judul "*Karakterisasi Matriks Leslie Ordo Tiga*". Pada karakterisasi matriks Leslie ordo tiga, kita akan memulai dengan cara membuktikan bahwa jika karakterisasi matriks Leslie ordo tiga adalah matriks diagonal positif maka tingkat kesuburan betina pada kelas umur ketiga harus bernilai positif. Kemudian, kita akan membuktikan bahwa jika karakterisasi matriks Leslie ordo tiga adalah matriks diagonal positif maka tingkat kesuburan betina pada kelas umur pertama, kedua dan ketiga harus bernilai nol. Selanjutnya akan ditunjukkan entri karakterisasi matriks Leslie ordo tiga pada periode ketiga adalah diagonal utama dari tingkat kesuburan betina pada kelas umur ketiga serta tingkat ketahanan hidup betina pada kelas umur pertama dan kedua. Selanjutnya akan dapat dijelaskan bahwa matriks Leslie ordo tiga adalah matriks diagonal positif. Dan pada akhirnya akan didapat karakterisasi matriks Leslie ordo tiga, yakni $L^{3k} = I, L^{3k+1} = L, L^{3k+2} = L^2, L^{3k+3} = I.$ Pada makalah ini akan dibahas bagaimana karakterisasi matriks Leslie ordo empat.

Matriks Leslie merupakan suatu matriks yang digunakan untuk memprediksi jumlah dan laju pertumbuhan suatu populasi. Beberapa faktor yang berpengaruh dalam pertumbuhan populasi adalah tingkat kesuburan, tingkat ketahanan hidup dan rentang umur dari populasi. Didefinisikan a_i sebagai tingkat kesuburan betina pada kelas umur ke-i yaitu rata-rata jumlah anak betina yang lahir dari kelompok umur i saat waktu ke t per jumlah betina pada kelas umur ke-i. Didefenisikan b_i sebagai tingkat ketahanan hidup betina pada kelas umur ke-i yaitu peluang betina yang dapat bertahan hidup dari kelas umur ke i sampai $i + 1$ saat waktu ke t. Berikut adalah bentuk umum dari matriks Leslie

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_i \geq 0 \text{ untuk } i = 1,2, \dots, n$$
$$0 < b_i \leq 1 \text{ untuk } i = 1,2, \dots, n-1$$

Berdasarkan batasan masalah diketahui bahwa paling sedikit satu kelas umur dari $a_i > 0$, karena jika $a_i = 0, \forall i$, maka pada kelas tersebut tidak ada kelahiran yang terjadi. Kelas umur yang memiliki nilai $a_i > 0$, disebut kelas umur kesuburan. Diketahui $b_i \neq 0$, karena jika $b_i = 0$ maka tidak ada betina yang dapat bertahan hidup kekelas berikutnya.

Jika terdapat batas umur hidup dari betina pada suatu populasi adalah A tahun, dan populasi dibagi menjadi i kelas umur, maka masing-masing kelas umur memiliki rentang umur A/i tahun. Sebagai contoh dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Penentuan kelas umur

Kelas Umur	Rentang Umur
1	$\left[0, \frac{A}{i}\right)$
2	$\left[\frac{A}{i}, \frac{2A}{i}\right)$
3	$\left[\frac{2A}{i}, \frac{3A}{i}\right)$
$\vdots$	$\vdots$
$i-1$	$\left[\frac{(i-2)A}{i}, \frac{(i-1)A}{i}\right)$
i	$\left[\frac{(i-1)A}{i}, A\right]$

Diketahui jumlah populasi betina pada masing-masing kelas umur pada saat $t = 0$, dan dimisalkan $n_1(t)$ adalah jumlah betina di kelas umur pertama, $n_2(t)$ adalah jumlah betina di kelas umur kedua, dan seterusnya sampai $n_i(t)$ adalah jumlah betina dikelas umur i, maka jumlah keseluruhan populasi betina adalah

$$n(t) = n_1(t) + n_2(t) + n_3(t) + \cdots + n_i(t)$$

Jumlah betina pada masing-masing kelas umur saat t dapat ditulis

$$n(t) = \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_i(t) \end{bmatrix}$$

Vektor $n(t)$ dinamakan *vektor distribusi umur awal*.

Untuk waktu $t + 1$ dengan $n_1(t + 1)$ adalah jumlah betina di kelas umur pertama, $n_2(t + 1)$ adalah jumlah betina di kelas umur kedua, dan seterusnya sampai $n_i(t + 1)$ adalah jumlah betina di kelas umur ke i, maka jumlah keseluruhan populasi betina adalah

$$n(t+1) = n_1(t+1) + n_2(t+1) + n_3(t+1) + \cdots + n_i(t+1)$$

Vektor distribusi umur n saat waktu $t + 1$ dapat ditulis

Jurnal Sains, Teknologi dan Industri, Vol. 13, No.1, Desember 2015, pp.108-114
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

$$n(t+1)=\begin{bmatrix}n_1(t+1)\\ n_2(t+1)\\ n_3(t+1)\\ \vdots\\ n_i(t+1)\end{bmatrix}$$

Didefinisikan pada waktu $t+1$, populasi pada kelas umur ke 1 adalah

$$n_1(t+1)=a_1n_1(t)+a_2n_2(t)+\cdots+a_in_i(t) \qquad (1)$$

Jika jumlah populasi betina pada saat ke t untuk setiap kelas umurnya mencapai tahun ke $t+1$, maka untuk kelas umur pertama pada populasi saat $t+1$ adalah semua jumlah populasi betina yang dilahirkan dan berada saat ke t.

Didefinisikan jumlah betina pada kelas umur ke $i+t$ dengan $i=1,2,\dots,n-1$ saat waktu $t+1$ adalah rata-rata jumlah betina pada kelas umur ke i pada waktu ke t yang bertahan hidup saat waktu $t+1$. Sehingga dapat ditulis:

$$n_{i+1}(t+1)=b_in_i(t) \qquad (2)$$

dimana $i=1,2,\dots,i-1$

Atau dapat dibentuk model pertumbuhan populasi sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix}n_1(t+1)\\ n_2(t+1)\\ n_3(t+1)\\ \vdots\\ n_i(t+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n\\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & b_2 & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_1(t)\\ n_2(t)\\ n_3(t)\\ \vdots\\ n_i(t)\end{bmatrix}$$

Atau model pertumbuhan populasi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$n(t+1)=Ln(t) \qquad (3)$$

dengan $n(t+1)$ merupakan vektor populasi betina yang berisi prediksi jumlah populasi betina pada kelas umur saat $t+1$. L merupakan sebuah matriks Leslie berukuran $n\times n$, dan $n(t)$ merupakan vektor populasi yang berisi jumlah populasi betina pada kelas umur saat t.

Model pertumbuhan populasi pada Persamaan (3) digunakan untuk memprediksi jumlah populasi 1 periode berikutnya. Untuk mengetahui prediksi jumlah pertumbuhan populasi hingga p periode berikutnya dilakukan beberapa pengembangan. Dari Persamaan (3) diperoleh

$$\begin{aligned}n(t+1)&=Ln(t)\\ n(t+2)&=Ln(t+1)\\ &=LLn(t)\\ &=L^2n(t)\\ n(t+3)&=Ln(t+2)\\ &=LL^2n(t)\\ &=L^3n(t)\\ &\ \vdots\\ n(t+p)&=Ln\big(t+(p-1)\big)\\ &=LL^{p-1}n(t)\\ &=L^pn(t)\end{aligned}$$

Sehingga untuk p tahun berikutnya, model pertumbuhan populasi menjadi

$$n(t+p)=L^pn(t) \qquad (4)$$

Pembahasan dan Hasil

Lemma berikut akan menunjukkan bahwa entri dari matriks Leslie L ordo empat adalah bilangan positif.

Lemma 1:

Misalkan $L=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_3 & 0\end{bmatrix}$, dimana : $a_1\ge 0, a_2\ge 0, a_3\ge 0, a_4\ge 0, 0<b_1\le 1, 0<b_2\le 1$ dan $0<b_3\le 1$. Jika $L^p, p\ge 2$, adalah matriks diagonal positif, maka $a_4>0$.

Bukti:

Andaikan $a_4=0$ maka $L=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & 0\\ b_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_3 & 0\end{bmatrix}$.

Diberikan sebarang matriks ordo empat $L^{p-1}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34}\\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44}\end{bmatrix}, p\ge 2$. Akan ditunjukkan bahwa L^p bukan matriks diagonal positif, jika $a_4=0$.

$$L^p=L^{p-1}L$$

$$L^p=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34}\\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & 0\\ b_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_3 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}b_{11}a_1+b_{12}b_1 & b_{11}a_2+b_{13}b_2 & b_{11}a_3+b_{14}b_3 & 0\\ b_{21}a_1+b_{22}b_1 & b_{21}a_2+b_{23}b_2 & b_{21}a_3+b_{24}b_3 & 0\\ b_{31}a_1+b_{32}b_1 & b_{31}a_2+b_{33}b_2 & b_{31}a_3+b_{34}b_3 & 0\\ b_{41}a_1+b_{42}b_1 & b_{41}a_2+b_{43}b_2 & b_{41}a_3+b_{44}b_3 & 0\end{bmatrix}$$

Karena $(L^p)_{44}=0$, maka L^p bukan matriks diagonal positif, kontradiksi dengan hipotesis dari Lemma. Oleh karena itu, $a_4>0$. ■

Lemma :

Misalkan $L=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_3 & 0\end{bmatrix}$, dimana : $a_1\ge 0, a_2\ge 0, a_3\ge 0, a_4>0, 0<b_1\le 1, 0<b_2\le 1$ dan $0<b_3\le 1$. Jika $a_1>0$ atau $a_2>0$ atau $a_3>0$ maka ada dua entri positif pada baris pertama dari $L^p, p\ge 2$.

Bukti:

Lemma akan dibuktikan dengan induksi pada p.

Basis Induksi: Perhatikanlah bahwa baris pertama dari L^2 yang dinyatakan dengan B_1^2 sama dengan

$$B_1^2=[a_1\quad a_2\quad a_3\quad a_4]\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_3 & 0\end{bmatrix}$$

Jurnal Sains, Teknologi dan Industri, Vol. 13, No.1, Desember 2015, pp.108-114
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

$= [a_1{}^2 + a_2b_1 \quad a_1a_2 + a_3b_2 \quad a_1a_3 + a_4b_3 \quad a_1a_4]$

Perhatikanlah bahwa $a_4b_3 > 0$. Jika $a_1 > 0$, maka $a_1a_4 > 0$. Jadi ada dua entri positif dari L^2 pada baris pertama, yaitu $a_1{}^2 + a_2b_1$ dan a_1a_4. Dan jika $a_2 > 0$ maka ada dua entri positif dari L^2 pada baris pertama, adalah $a_1{}^2 + a_2b_1$ dan $a_1a_3 + a_4b_3$. Kemudian, jika $a_3 > 0$ maka ada dua entri positif dari L^2 pada baris pertama, adalah $a_1a_2 + a_3b_2$ dan $a_1a_3 + a_4b_3$.

Hipotesa Induksi : Misalkan ada dua entri positif pada baris pertama dari L^{p-1}.

Langkah Induksi : Akan ditunjukkan ada dua entri positif pada baris pertama dari L^p.

Misalkan $B_1^{p-1} = [w \quad x \quad y \quad z]$, adalah baris pertama L^{p-1}. Berdasarkan induksi hipotesa diperoleh :

i. $w > 0$ dan $x > 0$
ii. $w > 0$ dan $y > 0$
iii. $w > 0$ dan $z > 0$
iv. $x > 0$ dan $y > 0$
v. $x > 0$ dan $z > 0$
vi. $y > 0$ dan $z > 0$

Perhatikanlah bahwa B_1^p dari L^p adalah

$$B_1^p = [w \quad x \quad y \quad z]\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [a_1w + xb_1 \quad a_2w + yb_2 \quad a_3w + zb_3 \quad a_4w]$$

i. Jika $w > 0$ dan $x > 0$ maka $a_1w + xb_1 > 0$ dan $a_4w > 0$. Jadi, ada dua entri positif pada baris pertama dari L^p.
ii. Jika $w > 0$ dan $y > 0$ maka $a_2w + yb_2$ dan $a_4w > 0$. Jadi, ada dua entri positif pada baris pertama dari L^p.
iii. Jika $w > 0$ dan $z > 0$ maka $a_3w + zb_3$ dan $a_4w > 0$. Jadi, ada dua entri positif pada baris pertama dari L^p.
iv. Jika $x > 0$ dan $y > 0$ maka $a_1w + xb_1 > 0$ dan $a_2w + yb_2$. Jadi, ada dua entri positif pada baris pertama dari L^p.
v. Jika $x > 0$ dan $z > 0$ maka $a_1w + xb_1 > 0$ dan $a_3w + zb_3$. Jadi, ada dua entri positif pada baris pertama dari L^p.
vi. Jika $y > 0$ dan $z > 0$ maka $a_2w + yb_2 > 0$ dan $a_3w + zb_3$. Jadi, ada dua entri positif pada baris pertama dari L^p.

■

Lemma :

Misalkan $L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}$, adalah matriks Leslie, dimana : $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 \geq 0, a_4 \geq 0, 0 < b_1 \leq 1, 0 < b_2 \leq 1$ dan $0 < b_3 \leq 1$. Jika L^p adalah matriks diagonal postitif, maka $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ dan $a_3 = 0$.

Bukti:

Karena L^p adalah matriks diagonal positif, maka L^p memenuhi kondisi Lemma 1. Oleh karena itu, kita simpulkan $a_4 > 0$. Selanjutnya, misalkan $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ atau $a_3 > 0$. Kita akan menunjukkan bahwa pemisalan ini akan menimbulkan kontradiksi seperti berikut. Karena $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ atau $a_3 > 0$, maka dengan menggunakan Lemma 2, kita peroleh bahwa L^p mempunyai dua entri positif pada baris pertamanya. Sehingga L^p bukan matriks diagonal yang dengan sendirinya bukan matriks diagonal positif, kontradiksi dengan hipothesis dari Lemma. Oleh karena itu, pemisalan $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ atau $a_3 > 0$ adalah salah. Sehingga $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ dan $a_3 = 0$.

Selanjutnya akan kita buktikan bahwa syarat perlu dan cukup agar matriks Leslie L ordo empat memiliki sifat $L^{4k} = I$, untuk bilangan bulat $k \geq 1$. Teorema berikut menunjukkan bahwa

$L^{4k} = diag$
$((a_4b_1b_2b_3)^k, (a_4b_1b_2b_3)^k, (a_4b_1b_2b_3)^k, (a_4b_1b_2b_3)^k)$

bila L adalah matriks ordo empat dimana entri pada baris pertama kolom pertama dan kolom kedua sama dengan nol. ■

Teorema : Misalkan $L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}$, dimana $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 \geq 0, a_4 > 0, 0 < b_1 \leq 1, 0 < b_2 \leq 1$ dan $0 < b_3 \leq 1$. Jika untuk setiap entri pada $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ dan $a_3 = 0$, maka

$L^{4k} = diag$
$((a_4b_1b_2b_3)^k, (a_4b_1b_2b_3)^k, (a_4b_1b_2b_3)^k, (a_4b_1b_2b_3)^k)$

untuk $k \geq 1$ dimana $k \in \mathbb{Z}$.

Bukti:

Lemma akan dibuktikan dengan induksi pada k.

Basis Induksi: dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_4b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4b_1 \\ b_1b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2b_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L^3 = L^2L$$

$$L^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_4b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4b_1 \\ b_1b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2b_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Jurnal Sains, Teknologi dan Industri, Vol. 13, No.1, Desember 2015, pp.108-114
ISSN 1693-2390 print/ISSN 2407-0939 online

$$L^3 = \begin{bmatrix} 0 & a_4b_2b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4b_1b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4b_1b_2 \\ b_1b_2b_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L^4 = L^3 L$$

$$L^4 = \begin{bmatrix} 0 & a_4b_2b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4b_1b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4b_1b_2 \\ b_1b_2b_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L^4 = \begin{bmatrix} a_4b_1b_2b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4b_1b_2b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4b_1b_2b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4b_1b_2b_3 \end{bmatrix}$$

Jadi, teorema di atas benar untuk $k = 1$.

Hipotesa Induksi : Misalkan teorema di atas benar untuk $k-1$ yaitu $L^{4(k-1)} = diag((a_4b_1b_2b_3)^{k-1}, (a_4b_1b_2b_3)^{k-1}, (a_4b_1b_2b_3)^{k-1}, (a_4b_1b_2b_3)^{k-1})$.

Setelah kita menentukan hipothesa induksi, selanjutnya akan kita teruskan dengan menyelesaikan Langkah Induksi, yakni : Akan ditunjukkan bahwa

$$L^{4k} = diag((a_4b_1b_2b_3)^k, (a_4b_1b_2b_3)^k, (a_4b_1b_2b_3)^k, (a_4b_1b_2b_3)^k)$$

Perhatikanlah bahwa

$$L^{4k} = L^{4(k-1)+4}$$
$$= L^{4(k-1)+1+1+1+1}$$

Maka :

1. Untuk $L^{4(k-1)+1}$

$$L^{4(k-1)+1} = \begin{bmatrix} (a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a_4b_1b_2b_3)^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L^{4(k-1)+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} \\ b_1(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 \end{bmatrix}$$

2. Untuk $L^{4(k-1)+1+1}$

$$L^{4(k-1)+1+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} \\ b_1(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L^{4(k-1)+1+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_4b_3(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4b_1(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} \\ b_1b_2(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2b_3(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Untuk $L^{4(k-1)+1+1+1}$

$$L^{4(k-1)+1+1+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_4b_3(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4b_1(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} \\ b_1b_2(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2b_3(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L^{4(k-1)+1+1+1} = \begin{bmatrix} 0 & a_4b_2b_3(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4b_1b_3(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4b_1b_2(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} \\ b_1b_2b_3(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Untuk $L^{4(k-1)+1+1+1+1}$

$$L^{4(k-1)+1+1+1+1} = \begin{bmatrix} 0 & a_4b_2b_3(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4b_1b_3(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4b_1b_2(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} \\ b_1b_2b_3(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L^{4(k-1)+1+1+1+1} = \begin{bmatrix} a_4b_1b_2b_3(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4b_1b_2b_3(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4b_1b_2b_3(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4b_1b_2b_3(a_4b_1b_2b_3)^{k-1} \end{bmatrix}$$

■

Selanjutnya teorema berikut menjelaskan syarat perlu dan cukup bagi matriks Leslie L agar L^{4k} adalah matriks diagonal positif.

Teorema :

Misalkan $L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}$, adalah matriks Leslie, dimana $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 \geq 0, a_4 > 0, 0 < b_1 \leq 1, 0 < b_2 \leq 1$ dan $0 < b_3 \leq 1$. Matriks L^{4k} adalah matriks diagonal positif jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ dan $a_4 > 0$.

Bukti:

Andaikan L^{4k} adalah matriks diagonal positif. Dengan menggunakan Lemma 1 terhadap L^{4k} diperoleh $a_4 > 0$. Selanjutnya aplikasikan Lemma 4 terhadap L^{4k} diperoleh $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Sebaliknya misalkan $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ dan $a_4 > 0$. Dengan mengaplikasikan Teorema 1 pada Teorema 2, sehingga akan dapat kita peroleh bahwa $L^{4k} = diag\ ((a_4b_1b_2b_3)^k, (a_4b_1b_2b_3)^k, (a_4b_1b_2b_3)^k, (a_4b_1b_2b_3)^k)$. Karena, jika $a_4 > 0$ maka $a_4b_1b_2b_3 > 0$. Oleh karena itu L^{4k} adalah matriks diagonal positif. ■

Akhirnya kita sampai pada karakterisasi dari matriks L sehingga $L^{4k} = I$ sebagaimana dinyatakan oleh teorema berikut.

Teorema :

Misalkan $L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks Leslie dimana $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 \geq 0, a_4 \geq 0, 0 < b_1 \leq 1, 0 < b_2 \leq 1$ dan $0 < b_3 \leq 1$. Matriks $L^{4k} = I$ jika dan hanya jika $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ dan $a_4b_1b_2b_3 = 1$.

Bukti:

Andaikan $L^{4k} = I$. Karena semua entri pada diagonal utama sama dengan 1, maka jelas L^{4k} adalah matriks diagonal positif. Berdasarkan Lemma 3, kita peroleh $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Selanjutnya berdasarkan Teorema 1 kita peroleh $L^{4k} = diag\ ((a_4b_1b_2b_3)^k, (a_4b_1b_2b_3)^k, (a_4b_1b_2b_3)^k, (a_4b_1b_2b_3)^k)$. Karena $L^{4k} = I$, maka$(a_4b_1b_2b_3)^k = 1$. Akibatnya $a_4b_1b_2b_3 = 1$.

Sebaliknya misalkan $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ dan $a_4b_1b_2b_3 = 1$. Karena $a_4b_1b_2b_3 = 1$ maka jelas $a_4 > 0$. Perhatikan kondisi Teorema 2 yaitu $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ dan $a_4 > 0$ terpenuhi. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 2 kita peroleh bahwa L^{4k} adalah matriks diagonal positif. Dengan menggunakan Teorema 1 kita peroleh $L^{4k} = diag\ ((a_4b_1b_2b_3)^k, (a_4b_1b_2b_3)^k, (a_4b_1b_2b_3)^k, (a_4b_1b_2b_3)^k)$. Karena $a_4b_1b_2b_3 = 1$ maka $L^{4k} = I$.

Pada Teorema 3 kita lihat apabila $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ dan $a_4b_1b_2b_3 = 1$ maka $L^{4k} = I, L^{4k+1} = L, L^{4k+2} = L^2, L^{4k+3} = L^3, L^{4k+4} = I$ untuk $k \geq 1$. ■

Contoh Soal :

Misalkan terdapat populasi bebek dengan data sebagai berikut. ■

Tabel 2. Data jumlah bebek betina Ny Asmi

Kelas Umur (i)	Umur (bulan)	Tingkat kesuburan (a_i)	Tingkat ketahanan (b_i)
1	$0-12$	0	1,345
2	$12-24$	0	1,123
3	$24-36$	0	0,98
4	$36-48$	0,6756	

Karena data tersebut memenuhi syarat yang ada pada Teorema 2, yaitu $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ dan $a_4 b_1 b_2 b_3 = 1$, maka $L^{4k} = I$.

Kesimpulan

Penelitian ini telah berhasil mendapatkan karakterisasi matriks Leslie ordo empat. Dibutuhkan 3 lemma dan 3 teorema untuk mendapatkan karakterisasi matriks Leslie ordo empat. Sehingga didapat karakterisasi matriks Leslie ordo empat, seperti dilihat pada Teorema 3, dimisalkan $L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks Leslie dimana $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 \geq 0, a_4 \geq 0, 0 < b_1 \leq 1, 0 < b_2 \leq 1$ dan $0 < b_3 \leq 1$. Apabila $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ dan $a_4 b_1 b_2 b_3 = 1$ maka $L^{4k} = I, L^{4k+1} = L, L^{4k+2} = L^2, L^{4k+3} = L^3, L^{4k+4} = I$ untuk $k \geq 1$.

Daftar Pustaka

[1] Anton dan Rorres. 2004. *Aljabar Linear Elementer versi aplikasi.* 8th ed. Jakarta: Erlangga.

[2] Munir, Rinaldi. 2005. *Matematika Diskrit Edisi Ketiga.* Bandung: Informatika.

[3] Pratama, Prihandono dan Kusumastuti. 2013. *Aplikasi Matriks Leslie untuk Memprediksi Jumlah dan Laju Pertumbuhan Suatu Populasi.* Jurnal Jurusan Matematika FMIPA UNTAN.

[4] Priyono, Kurnelius. 1990. *Matriks leslie dari pertumbuhan populasi.* Skripsi FMIPA UNDIP.

[5] Schaum's. 2004. *Aljabar Linear*. Jakarta: Erlangga.

[6] Simanihuruk Mudin dan Hartanto. 2005. *Karakterisasi Matriks Leslie Ordo Tiga.* Jurnal Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu.

[7] Wiwaha, Arjoena. 2012. *Matematika Matriks.* Skripsi Prodi Matematika STKIP PGRI Tulung agung.

[8] Yuliani, Selvia. 2012. *Penerapan Diagonalisasi Matriks dan Matriks Leslie dalam Memproyeksikan Jumlah Populasi Perempuan.* Skripsi Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang.