*Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 13*
*Fakultas sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau*
*Pekanbaru, 18 November 2021*
*ISSN (Printed) : 2579-7271*
*ISSN (Online ) : 2579-5406*

# *Trace* Matriks Simetris Berbentuk Khusus $4 \times 4$ Berpangkat Bilangan Bulat

**Fitri Aryani[1], Hartina[2], Yuslenita Muda[3], Zukrianto[4]**
Program Studi Matematika, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155, Simpang Baru, Panam Pekanbaru, 28293
email: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id , hartinabedang@gmail.com

**Abstrak**

*Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan bentuk umum perpangkatan matriks simetris berbentuk khusus 4 x 4 berpangkat bilangan bulat dan trace matriksnya. Mendapatkan rumus umum trace dari matriks simetris tersebut maka dilakukan perpangkatan matriks dari pangkat dua sampai pangkat 10. Selanjutnya diduga bentuk umum perpangkatan matriksnya untuk pangkat n, untuk n bilangan bulat positif dan dibuktikan menggunakan aturan induksi matematika. Hal yang sama berlaku juga untuk perpangkatan bilangan bulat negatif. Dimulai dari pangkat negatif dua sampai negatif sepuluh, kemudian dapat dugaan untuk perpangkatan n, dengan n bilangan bulat hegatif, dan membuktikannya dengan menggunakan aturan invers. Untuk trace dari matriks simetris tersebut diperoleh dengan menggunakan definisi trace. Selanjutnya diaplikasikan dengan contoh-contoh soal.*

**Kata kunci:** *Induksi matematika, Invers matriks, Matriks simetris, Perpangkatan matriks, Trace matriks.*

**Abstract**

*This study aims to obtain the general form of a special shaped symmetric matrix of 4 x 4 to the power of integers and a special shaped symmetrical trace matrix of 4 x 4 to the power of integers. To obtain the general form of the trace of the matrix, the exponent of the matrix is performed from the power of two to the power of 10. Next, the general form of the exponent of the matrix is assumed to be to the power of n with n positive integers and proved using mathematical induction. The same is true for exponents of negative integers. Starting from the negative power of two to negative ten, then you can guess for the power of n with n negative integers, and prove it using the inverse rule. For the trace of the symmetric matrix is obtained by using the definition of trace. It is then applied with examples of questions.*

.

***Keywords: M****atrix, Matrix multiplication, Trace, Inverse, Mathematical induction.*

## 1. Pendahuluan

Sebuah matriks apabila ditranspose hasilnya matriks itu sendiri disebut matriks simetris. Matriks simetris merupakan salah satu dari jenis-jenis matriks. Terdapat beberapa macam operasi dari matriks yaitu perkalian matriks, determinan matriks, invers matriks, dan *trace* matriks juga *trace* matriks berpangkat. Menentukan *trace* suatu matriks cukup menjumlahkan elemen-elemen diagonal utamanya saja, dengan syarat matriks harus berbentuk bujursangkar. Namun bagaimana menentukan *trace* dari matriks berpangkat?. Maka matriks harus terlebih dahulu dipangkatkan sebanyak pangkat yang diinginkan. Setelah diperoleh hasil perpangkatan matrisknya maka barulah dapat ditentukan *trace* dari matriks berpangkatnya. Artinya menentukan nilai trace dari matriks yang berpangkat cukup lumayan lama, kecuali telah diperoleh bentuk umum perpangkatan matriksnya. Sehingga peneliti tertarik untuk membahas mengenai *trace* matriks berpangkat.

Menurut [6] pada tahun 2012, *trace* dari matriks berpangkat sering dibahas pada beberapa bidang matematika, seperti Analisis Jaringan, Teori Bilangan, Sistem Dinamik, Teori Matriks dan Persamaan Diferensial. Pembahasan mengenai *trace* matriks berpangkat telah dibahas oleh [8], penelitian tersebut membahas mengenai *trace* matriks real sebarang orde 2 x 2 berpangkat bilangan bulat positif dengan bentuk matriks sebagai berikut:
$A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Adapun hasil yang diperoleh adalah mendapatkan rumus umum *trace* matriks orde 2 x 2 berpangkat bilangan bulat positif yaitu :

 ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online ) : 2579-5406

$$tr(A_2^{\,n}) = \sum_{r=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]...[\text{n - (r} + (r-1))](\det(\text{A}))^{\text{r}} (tr(A))^{n-2r}, \quad n \text{ ganjil.}$$
$$tr(A_2^{\,n}) = \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]...[\text{n - (r} + (r-1))](\det(\text{A}))^{\text{r}} (tr(A))^{n-2r}, \; n \text{ genap.} \tag{1}$$

Selanjutnya [2] meneliti mengenai *trace* matriks berpangkat pada matriks real berbentuk khusus 2 x 2 berpangkat bilangan bulat negatif dengan bentuk matriksnya adalah: $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \forall a, b, \in R$ . Pada bentuk matriks ini untuk menentukan *trace* matriks berpangkatnya cukup mensubstitusi entri-entri matriksnya ke Persamaan (1), maka diperolehlah nilai *trace*nya. Tetapi untuk memudahkan pembaca, jika diberikan bentuk matriks seperti pada [2], maka pembaca akan langsung dapat menggunakan hasil penelitian tersebut. Hasil penelitian tersebut mendapatkan rumus umum *trace* matriks berbentuk khusus 2 x 2 berpangkat bilangan bulat negatif, yaitu :

$$tr\left(A_2^{\,-n}\right) = \begin{cases} 0 & , n \text{ ganjil} \\ \dfrac{2}{(ab)^{\frac{n}{2}}} & , \; n \text{ genap} \end{cases}$$

Pembahasan mengenai *trace* matriks berpangkat telah dibahas oleh juga [5]. Pembahasannya mengenai rumus umum *trace* matriks kompleks orde 3 x3 berpangkat bilangan bulat dengan bentuk matriksnya adalah : $A_3 = \begin{bmatrix} a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \\ a+bi & a-bi & a+bi \end{bmatrix}, \forall\ a, b\ R\ dan\ i = imajiner,$ Adapun hasil yang diperoleh pada penelitian tersebut yaitu : $tr(A_3)^n = (3a+bi)^n$ .

Masih tentang *trace* matriks berpangkat, selanjutnya [3] melakukan penelitian dengan menggunakan matriks segitiga berbentuk khusus. Bentuk matriksnya adalah:

$A_4 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dan $B_4 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ d & c & b & a \end{bmatrix} \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Adapun hasil yang diperoleh dari penelitian tersebut ada dua rumus umum, pertama *trace* dari matriks segitiga atas dan bawah dengan pangkat bilangan bulat positif yaitu: $tr(A_4^{\,n}) = tr(B_4^{\,n}) = 4(a^n)$ , dan kedua *trace* dari matriks segitiga atas dan bawah dengan pangkat bilangan bulat negatif yaitu: $tr(A_4^{\,-n}) = tr(B_4^{\,-n}) = 4\left(\frac{1}{a^n}\right)$

Selanjutnya [4] juga membahas rumus umum *trace* dari matriks segitiga dengan pangkat bilangan bulat. Pada penelitian [4] ini menggunakan matriks yang sama dengan matriks pada penelitian [6], hanya ukuran matriks yang diperbesar dengan ukuran 5 x 5. Adapun hasil yang diperoleh dari penelitian tersebut yaitu : $tr(A_5^{-n}) = tr(B_5^{-n}) = 5\left(\frac{1}{a^n}\right)$.

Berdasarkan uraian yang telah dipaparkan di atas, maka pada artikel akan dibahas mengenai *trace* matriks berpangkat dengan bentuk matriks yang berbeda dari penelitian-penelitian sebelumnya. Penelitian ini menggunakan matriks simetris yang berbentuk khusus seperti berikut:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b \\ b & 0 & b & b \\ b & b & 0 & b \\ b & b & b & 0 \end{bmatrix} \text{dengan } b \in R, b \neq 0. \tag{2}$$

*ISSN (Printed) : 2579-7271*
*ISSN (Online ) : 2579-5406*

Dari bentuk Persamaan (5) tersebut maka akan ditentukan *trace* matriksnya berpangkat bilangan bulat.

## 2. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur. Untuk mendapatkan rumus umum *trace* dari matriks simetris bentuk khusus 5 x 5 berpangkat bilangan bulat, berikut diberilkan langkah- langkahnya.

1) Diberikan matriks simetris yang berbentuk:
$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b \\ b & 0 & b & b \\ b & b & 0 & b \\ b & b & b & 0 \end{bmatrix} \text{ dengan } b \in R, b \neq 0.$$
2) Menentukan perpangkatan matriks $(A_4)^2$ sampai $(A_4)^{10}$.
3) Pendugaan rumus umum perpangkatan matriks $(A_4)^n$ dengan $n$ bilangan bulat positif.
4) Pembuktian rumus umum matriks simetris $(A_4)^n$ dengan $n$ bilangan bulat positif menggunakan aturan induksi matematika.
5) Mendapatkan $tr(A_4{}^n)$, dengan $n$ bilangan bulat positif.
6) Mendapatkan invers dari matriks $A_4$ menggunakan metode adjoin.
7) Melakukan perpangkatan matriks $(A_4)^{-2}$ sampai $(A_4)^{-10}$ .
8) Pendugaan rumus umum perpangkatan matriks $(A_4)^n$ dengan $n$ bilangan bulat negatif.
9) Pembuktian rumus umum $(A_4)^n$, dengan $n$ bilangan bulat negatif menggunakan aturan invers yaitu $A_4{}^{-n}A_4{}^n = A_4{}^n A_4{}^{-n} = I$.
10) Mendapatkan rumus umum $tr(A_4)^n$ , $n$ bilangan bulat negatif.
11) Aplikasikan rumus umum $tr(A^n)$, dengan $n$ bilangan bulat dalam contoh soal.

Sebelum melanjutkan ke langkah-langkah metode penelitian yang dijelaskan di atas, berikut diberikan beberapa landasan teori yang digunakan dalam penelitian ini.

### 2.1. Matriks Simetris dan Perkalian Matriks

**Definisi 2.1**[1] Suatu matriks bujursangkar *A* adalah ***simetris*** (symmetris) jika $A = A^t$ .

**Definisi 2.2** [1] Jika $A$ adalah matriks $m \times r$ dan $B$ adalah matriks $r \times n$ , maka hasil kali $AB$ adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan. Untuk mencari entri dalam baris $i$ dan kolom $j$ dari $AB$ , pisahkan baris $i$ dari matriks $A$ dan kolom $j$ dari matriks $B$ . Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil kali yang didapatkan.

**Definisi 2.3** [1] Jika $A$ adalah matriks bujursangkar, maka defenisi dari pangkat bilangan bulat tak negatif dari $A$ adalah :
$$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AA \ldots A}_{n\,faktor} \quad (n > 0).$$
Selanjutnya, jika $A$ dapat dibalik maka defenisi dari pangkat bilangan bulat negatif dari $A$ adalah:
$$A^{-n} = (A^{-1})^n, \qquad A^{-n} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}}_{n\,faktor}.$$

### 2.2. Invers Matriks

**Definisi 2.4** [1] Jika $A$ adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks $B$ yang ukurannya sama demikian rupa sehingga $AB = BA = I$ , maka $A$ disebut dapat dibalik

*ISSN (Printed) : 2579-7271*
*ISSN (Online ) : 2579-5406*

(*invertible*) dan $B$ disebut sebagai ***invers*** (*inverse*) dari $A$. Jika matriks $B$ tidak dapat didefinisikan, maka $A$ dinyatakan sebagai ***matriks singular.***

**Teorema 2.1** [1] Jika $A$ adalah Matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

### 2.3. *Trace* Matriks

**Definisi 2.5** [1] Jika $A$ adalah sebuah matriks bujursangkar, maka trace dari $A$ yang dinyatakan sebagai $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama $A$. Trace dari $A$ tidak dapat didefinisikan jika $A$ bukan matriks bujur sangkar.

### 2.4. Induksi Matematika

**Definisi 2.6** [7] Merupakan teknik pembuktian yang baku di dalam matematika.
Prinsip induksi sederhana sebagai berikut:

(1) $p(1)$ benar

(2) Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$ hingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif $n$.

## 3. Hasil Dan Pembahasan

Hasil penelitian diperoleh setelah mengikuti langkah-langkah yang telah dijelaskan pada metode penilitian diatas. Berikut dipaparkan hasil yang diperoleh.

### 3.1. *Trace* Matriks Simetris Berbentuk Khusus $4 \times 4$ Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Diperoleh hasil pada bagian ini berdasarkan langkah-langkah metode penelitian di atas. Sehingga akan dibuktikan hasil penelitian tersebut dalam teorema-teorema di bagian ini dengan aturan pembuktiannya.Terdapat dua teorema, teorema pertama mengenai rumus umum perpangkatan matriks simetris berbentuk khusus 4 x 4 berpangkat bilangan bulat positif dan teorema kedua tentang *trace* dari matriksnya**.**

**Teorema 3. 1** Diberikan matriks simetris berbentuk khusus 4 x 4, yaitu:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b \\ b & 0 & b & b \\ b & b & 0 & b \\ b & b & b & 0 \end{bmatrix}$$ $b \in R, b \neq 0,$ maka diperoleh

$$A_4{}^n = \begin{bmatrix} \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n \\ \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n \\ \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n \\ \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n \end{bmatrix}$$ atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$A_4{}^n = \left[a_{ij}\right] = \begin{cases} \left(\frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n\right)_{ij}, & i=j \\ \left(\frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n\right)_{ij}, & i\neq j \end{cases}$$

**Bukti :** Pembuktian teorema menggunakan induksi matematika

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online ) : 2579-5406

Misalkan

$$p(n): A_4{}^n = \begin{bmatrix} \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n \\ \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n \\ \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n \\ \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n \end{bmatrix}$$

1) Akan ditunjukkan $\boldsymbol{p(1)}$ benar, yaitu:

$$p(1): A_4{}^1 = \begin{bmatrix} \frac{3^1-(-1)^{1+1}3}{4}b^1 & \frac{3^1+(-1)^{1+1}}{4}b^1 & \frac{3^1+(-1)^{1+1}}{4}b^1 & \frac{3^1+(-1)^{1+1}}{4}b^1 \\ \frac{3^1+(-1)^{1+1}}{4}b^1 & \frac{3^1-(-1)^{1+1}3}{4}b^1 & \frac{3^1+(-1)^{1+1}}{4}b^1 & \frac{3^1+(-1)^{1+1}}{4}b^1 \\ \frac{3^1+(-1)^{1+1}}{4}b^1 & \frac{3^1+(-1)^{1+1}}{4}b^1 & \frac{3^1-(-1)^{1+1}3}{4}b^1 & \frac{3^1+(-1)^{1+1}}{4}b^1 \\ \frac{3^1+(-1)^{1+1}}{4}b^1 & \frac{3^1+(-1)^{1+1}}{4}b^1 & \frac{3^1+(-1)^{1+1}}{4}b^1 & \frac{3^1-(-1)^{1+1}3}{4}b^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b \\ b & 0 & b & b \\ b & b & 0 & b \\ b & b & b & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan melihat Persamaan (2) maka $p(1)$ benar.

2) Asumsikan untuk $p(k)$ benar, yaitu :

$$p(k): A_4{}^k = \begin{bmatrix} \frac{3^k-(-1)^{k+1}3}{4}b^k & \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k & \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k & \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k \\ \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k & \frac{3^k-(-1)^{k+1}3}{4}b^k & \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k & \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k \\ \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k & \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k & \frac{3^k-(-1)^{k+1}3}{4}b^k & \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k \\ \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k & \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k & \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k & \frac{3^k-(-1)^{k+1}3}{4}b^k \end{bmatrix}$$

Maka akan dibuktikan untuk $p(k+1)$ juga benar, yaitu :

$$p(k+1): A_4{}^{(k+1)} == \begin{bmatrix} \frac{3^{k+1}-(-1)^{k+2}3}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} \\ \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}-(-1)^{k+2}3}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} \\ \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}-(-1)^{k+2}3}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} \\ \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}-(-1)^{k+2}3}{4}b^{k+1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Pembuktian dimulai dari :

$$A_4{}^{k+1} = A_4{}^k A_4$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3^k-(-1)^{k+1}3}{4}b^k & \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k & \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k & \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k \\ \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k & \frac{3^k-(-1)^{k+1}3}{4}b^k & \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k & \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k \\ \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k & \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k & \frac{3^k-(-1)^{k+1}3}{4}b^k & \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k \\ \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k & \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k & \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k & \frac{3^k-(-1)^{k+1}3}{4}b^k \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & b & b & b \\ b & 0 & b & b \\ b & b & 0 & b \\ b & b & b & 0 \end{bmatrix}$$

Hasil perkalian matriks tersebut adalah

Untuk $i = j$ yaitu :

$$a_{11} = \frac{3^k-(-1)^{k+1}3}{4}b^k(0) + \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k(b^1) + \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k(b^1) + \frac{3^k+(-1)^{k+1}}{4}b^k(b^1) = \left[\frac{3^{k+1}-(-1)^{k+2}3}{4}\right]b^{k+1}$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online ) : 2579-5406

dengan cara yang sama diperoleh juga untuk entri yang lain.

Selanjutnya untuk $i \neq j$ yaitu:

$$a_{12} = \frac{3^k - (-1)^{k+1}3}{4} b^k (b^1) + \frac{3^k + (-1)^{k+1}}{4} b^k (0) + \frac{3^k + (-1)^{k+1}}{4} b^k (b^1) + \frac{3^k + (-1)^{k+1}}{4} b^k (b^1) = \frac{3^{k+1} + (-1)^{k+2}}{4} b^{k+1}.$$

dengan cara yang sama diperoleh juga untuk entri yang lain. Sehingga diperoleh:

$$A_4^{\ n} = \left[a_{ij}\right] = \begin{cases} \left(\frac{3^n - (-1)^{n+1}3}{4} b^n\right)_{ij}, & i = j \\ \left(\frac{3^n + (-1)^{n+1}}{4} b^n\right)_{ij}, & i \neq j \end{cases}$$

atau dapat ditulis dalam matriks sebagai berikut:

$$A_4^{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{3^{k+1}-(-1)^{k+2}3}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} \\ \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}-(-1)^{k+2}3}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} \\ \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}-(-1)^{k+2}3}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} \\ \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}+(-1)^{k+2}}{4}b^{k+1} & \frac{3^{k+1}-(-1)^{k+2}3}{4}b^{k+1} \end{bmatrix},$$

Dengan memperhatikan Persamaan (3) terbukti $p(k+1)$ benar dan Teorema 3.1 terbukti ▪

**Teorema 3.2** Diberikan matriks simetris berbentuk khusus 4 x 4, yaitu:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b \\ b & 0 & b & b \\ b & b & 0 & b \\ b & b & b & 0 \end{bmatrix} \quad b \in R, b \neq 0,$$

maka $tr(A_4^{\ n}) = \left(3^n - (-1)^{n+1}3\right)b^n$.

**Bukti :** Pembuktian teorema di atas dengan menggunakan definisi *trace* matriks.
Berdasarkan Teorema 3. 1,

$$A_4^{\ n} = \begin{bmatrix} \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n \\ \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n \\ \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n \\ \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n \end{bmatrix}$$

dapat diperoleh

$$tr(A_4^{\ n}) = \frac{3^n - (-1)^{n+1}3}{4} b^n + \frac{3^n - (-1)^{n+1}3}{4} b^{n^n} + \frac{3^n - (-1)^{n+1}3}{4} b^n + \frac{3^n - (-1)^{n+1}3}{4} b^n = 4\left(\frac{3^n - (-1)^{n+1}3}{4}\right) b^n$$

$= \left(3^n - (-1)^{n+1}3\right)b^n$ sehingga Teorema 3.2 terbukti ▪

### 3.2. *Trace* Matriks Simetris 4 x 4 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif

Setelah mendapatkan bentuk umum perpangkatan matriks simetris berbentuk khusus 4x4 berpangkat bilangan bulat positif dan *trace* matriksny pada Bagian 3.1, maka pada bagian ini akan dibuktikan hasil penelitiannya dengan pangkat bilangan bulat negatif di dalam teorema-teorema berikut.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online ) : 2579-5406

**Teorema 3.3** Diberikan matriks simetris berbentuk khusus 4 x 4, yaitu:

$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b \\ b & 0 & b & b \\ b & b & 0 & b \\ b & b & b & 0 \end{bmatrix}$ $b \in R, b \neq 0,$ maka diperoleh:

$$A_4^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} \end{bmatrix}$$

**Bukti :** Pembuktian Teorema di atas menggunakan aturan invers yaitu : $A_4^n A_4^{-n} = A_4^{-n} A_4^n = I$

a. Akan ditunjukkan bahwa $A_4^n A_4^{-n} = I$ yaitu :

$A_4^n A_4^{-n} = [b_{ij}]$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n \\ \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n \\ \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n \\ \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} \end{bmatrix}$$

Hasil perkalian matriksnya adalah: untuk $i = j$ , diperoleh:

$$b_{11} = \left(\frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}\right)b^n.\left(\frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n}\right) + \left(\frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}\right)b^n.\left(\frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n}\right) +$$

$$\left(\frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}\right)b^n.\left(\frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n}\right) + \left(\frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}\right)b^n.\left(\frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n}\right)$$

$$= \left(\frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}\right)b^n.\left(\frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n}\right) + 3\left(\frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}\right)b^n.\left(\frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n}\right)$$

$$= \left(\frac{(-1)^n 3^{2n+1} + 3^n - (-1)^{2n+1}3^{n+2}) - (-1)^{n+1}3 + (-1)^{n+1}3^{2n+1} + 3^{n+1} + (-1)^{2n+2}3^{n+1} + (-1)^{n+1}.3)}{4^2.3^n}\right)$$

untuk $n$ genap

$$= \left(\frac{3^{2n+1} + 3^n + 3^{n+2} + 3 - 3^{2n+1} + 3^{n+1} + 3^{n+1} - 3)}{4^2.3^n}\right) = \left(\frac{3^n\left[1+3^2+3+3\right]}{4^2.3^n}\right) = \frac{16}{16} = 1$$

untuk $n$ ganjil

$$= \left(\frac{-3^{2n+1} + 3^n + 3^{n+2} - 3 + 3^{2n+1} + 3^{n+1} + 3^{n+1} + 3)}{4^2.3^n}\right) = \left(\frac{3^n\left[1+3^2+3+3\right]}{4^2.3^n}\right) = \frac{16}{16} = 1,$$

dengan cara yang sama diperoleh juga untuk entri yang lain.
Selanjutnya untuk $i \neq j$ yaitu:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online ) : 2579-5406

$$b_{12} = \left(\frac{3^n - (-1)^{n+1}3}{4}\right)b^n.\left(\frac{(-1)^{n+1}3^n + 1}{4.3^n b^n}\right) + \left(\frac{3^n + (-1)^{n+1}}{4}\right)b^n.\left(\frac{(-1)^n 3^{n+1} + 1}{4.3^n b^n}\right) +$$
$$\left(\frac{3^n + (-1)^{n+1}}{4}\right)b^n.\left(\frac{(-1)^{n+1}3^n + 1}{4.3^n b^n}\right) + \left(\frac{3^n + (-1)^{n+1}}{4}\right)b^n.\left(\frac{(-1)^{n+1}3^n + 1}{4.3^n b^n}\right)$$
$$= \left(\frac{\begin{array}{l}(-1)^{n+1}3^{2n} + 3^n - (-1)^{2n+2}3^{n+1} - (-1)^{n+1}3 + (-1)^n 3^{2n+1} + 3^n + (-1)^{2n+1}3^{n+1} + \\ (-1)^{n+1}.1 + (-1)^{n+1}2.3^{2n} + 2.3^n + (-1)^{2n+2}2.3^n + (-1)^{n+1}2)\end{array}}{4^2.3^n}\right)$$

untuk $n$ genap

$$= \left(\frac{-(3^n.3^n) + 3^n - 3^{n+1} + (3^n.3^n.3) + 3^n - 3^{n+1} - (2.3^n.3^n) + 2.3^n + 2.3^n}{4^2.3^n}\right)$$
$$= \left(\frac{3^n\left[-(1.1) + 1 - 3 + (1.1.3) + 1 - 3 - (2.1.1) + (2.1) + (2.1)\right]}{4^2.3^n}\right) = \frac{0}{16} = 0$$

untuk $n$ ganjil

$$= \left(\frac{(3^n.3^n) + 3^n - 3^{n+1} - (3^n.3^n.3) + 3^n - 3^{n+1} + (2.3^n.3^n) + 2.3^n + 2.3^n}{4^2.3^n}\right)$$
$$= \left(\frac{3^n\left[(1.1) + 1 - 3 - (1.1.3) + 1 - 3 + (2.1.1) + (2.1) + (2.1)\right]}{4^2.3^n}\right) = \frac{0}{16} = 0$$
,

dengan cara yang sama diperoleh juga untuk entri yang lain. Sehingga didapat matriks indentitas , yaitu:

$A_3^n A_3^{-n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$ Hasil yang sama di peroleh untuk $A_4^{-n} A_4^{\;n} = I$. Sehingga Teorema 3.3

terbukti. ▪

**Teorema 3.4** Diberikan matriks simetris berbentuk khusus 4 x 4, yaitu:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b \\ b & 0 & b & b \\ b & b & 0 & b \\ b & b & b & 0 \end{bmatrix} \; b \in R, b \neq 0.$$

maka diperoleh: $tr(A_4^{\;-n}) = \left((-1)^n 3^{n+1} + 1\right) 3^{-n} b^{-n}.$

**Bukti :** Pembuktian teorema di atas dengan menggunakan definisi *trace* matriks.
Berdasarkan Teorema 3.3,

$$A_4^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} \end{bmatrix}$$

maka dapat diperoleh.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online ) : 2579-5406

$$tr(A_4^{-n}) = \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} + \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} + \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} + \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n}$$
$$= 4\left(\frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4} 3^{-n} b^{-n}\right) = \left((-1)^n 3^{n+1}+1\right)3^{-n} b^{-n}.$$

Sehingga Teorema 3.4 terbukti. ▪

### 3.3. Aplikasi Bentuk Umum $tr(A_4^{\,n})$ $dan$ $tr(A_4^{-n})$

Diberikan beberapa contoh soal yang merupakan aplikasi dari teorema-teorema yang sudah didapatkan di atas.

**Contoh 1.** Diberikan matriks simetris $4 \times 4$ sebagai berikut : $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Tentukan $A_4^{\,5}$ dan $tr(A_4^{\,5})$ !

**Penyelesaian:**

Berdasarkan Teorema 3.1 dapat diperoleh :

$$A_4^{\,5} = \begin{bmatrix} \frac{3^5-(-1)^{5+1}3}{4}3^5 & \frac{3^5+(-1)^{5+1}}{4}3^5 & \frac{3^5+(-1)^{5+1}}{4}3^5 & \frac{3^5+(-1)^{5+1}}{4}3^5 \\ \frac{3^5+(-1)^{5+1}}{4}3^5 & \frac{3^5-(-1)^{5+1}3}{4}3^5 & \frac{3^5+(-1)^{5+1}}{4}3^5 & \frac{3^5+(-1)^{5+1}}{4}3^5 \\ \frac{3^5+(-1)^{5+1}}{4}3^5 & \frac{3^5+(-1)^{5+1}}{4}3^5 & \frac{3^5-(-1)^{5+1}3}{4}3^5 & \frac{3^5+(-1)^{5+1}}{4}3^5 \\ \frac{3^5+(-1)^{5+1}}{4}3^5 & \frac{3^5+(-1)^{5+1}}{4}3^5 & \frac{3^5+(-1)^{5+1}}{4}3^5 & \frac{3^5-(-1)^{5+1}3}{4}3^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14580 & 14823 & 14823 & 14823 \\ 14823 & 14580 & 14823 & 14823 \\ 14823 & 14823 & 14580 & 14823 \\ 14823 & 14823 & 14823 & 14580 \end{bmatrix}$$

Dan menurut Teorema 3.2 diperoleh :

$$tr\left(A_4^{\,5}\right) = (3^5 - (-1)^{5+1}3)3^5 = (243 - 3)243 = 58320.$$

**Contoh 2.** Diberikan matriks simetris sebagai berikut :

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{12}{7} & \frac{12}{7} & \frac{12}{7} \\ \frac{12}{7} & 0 & \frac{12}{7} & \frac{12}{7} \\ \frac{12}{7} & \frac{12}{7} & 0 & \frac{12}{7} \\ \frac{12}{7} & \frac{12}{7} & \frac{12}{7} & 0 \end{bmatrix}.$$

Tentukan $A_4^{-2}$ dan $tr(A_4^{-2})$ !

**Penyelesaian:**

Berdasarkan Teorema 3.3 maka diperoleh :

$$A_4^{-2} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^2 3^{2+1}+1}{4.3^2 \frac{12}{7}^2} & \frac{(-1)^{2+1}3^2+1}{4.3^2 \frac{12}{7}^2} & \frac{(-1)^{2+1}3^2+1}{4.3^2 \frac{12}{7}^2} & \frac{(-1)^{2+1}3^2+1}{4.3^2 \frac{12}{7}^2} \\ \frac{(-1)^{2+1}3^2+1}{4.3^2 \frac{12}{7}^2} & \frac{(-1)^2 3^{2+1}+1}{4.3^2 \frac{12}{7}^2} & \frac{(-1)^{2+1}3^2+1}{4.3^2 \frac{12}{7}^2} & \frac{(-1)^{2+1}3^2+1}{4.3^2 \frac{12}{7}^2} \\ \frac{(-1)^{2+1}3^2+1}{4.3^2 \frac{12}{7}^2} & \frac{(-1)^{2+1}3^2+1}{4.3^2 \frac{12}{7}^2} & \frac{(-1)^2 3^{2+1}+1}{4.3^2 \frac{12}{7}^2} & \frac{(-1)^{2+1}3^2+1}{4.3^2 \frac{12}{7}^2} \\ \frac{(-1)^{2+1}3^2+1}{4.3^2 \frac{12}{7}^2} & \frac{(-1)^{2+1}3^2+1}{4.3^2 \frac{12}{7}^2} & \frac{(-1)^{2+1}3^2+1}{4.3^2 \frac{12}{7}^2} & \frac{(-1)^2 3^{2+1}+1}{4.3^2 \frac{12}{7}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2646 & -0{,}0756 & -0{,}0756 & -0{,}0756 \\ -0{,}0756 & 0{,}2646 & -0{,}0756 & -0{,}0756 \\ -0{,}0756 & -0{,}0756 & 0{,}2646 & -0{,}0756 \\ -0{,}0756 & -0{,}0756 & -0{,}0756 & 0{,}2646 \end{bmatrix}$$

Menurut Teorema 3.4 diperoleh :

$$tr\left(A_4{}^{-2}\right) = \frac{(-1)^2\, 3^{2+1}+1}{3^2\, \frac{12}{7}^{2}} = \frac{28}{26{,}4489} = 1{,}0586\,.$$

## 4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan diatas, Maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

Jika diberikan matriks simetris $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & b & b & b \\ b & 0 & b & b \\ b & b & 0 & b \\ b & b & b & 0 \end{bmatrix}$ dengan $b \in R\,, b \neq 0,$ Maka diperoleh rumus umum perpangkatan matriks simetris berbentuk khusus 4 x 4 berpangkat bilangan bulat positif, yaitu:

$$A_4{}^n = \begin{bmatrix} \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n \\ \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n \\ \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n \\ \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n & \frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n \end{bmatrix}$$

atau $$A_4{}^n = \left[a_{ij}\right] = \begin{cases} \left(\frac{3^n-(-1)^{n+1}3}{4}b^n\right)_{ij}, & i=j \\ \left(\frac{3^n+(-1)^{n+1}}{4}b^n\right)_{ij}, & i \neq j \end{cases}$$

Selanjutnya untuk pangkat bilangan bulat negatif, yaitu

$$A_4{}^{-n} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n} & \frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n} \end{bmatrix}$$

atau $$A_4{}^{-n} = \left[b_{ij}\right] = \begin{cases} \left(\frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4.3^n b^n}\right)_{ij}, & i=j \\ \left(\frac{(-1)^{n+1}3^n+1}{4.3^n b^n}\right)_{ij}, & i \neq j \end{cases}$$

Rumus umum *trace* matriks simetris berbentuk khusus 4 x 4 berpangkat bilangan bulat adalah:

$$tr(A_4{}^n) = \left(3^n-(-3)^{n+1}\right)b^n,$$ untuk bilangan bulat positif.

dan

$$tr(A_4{}^{-n}) = \left((-1)^n 3^{n+1}+1\right)3^{-n}\, b^{-n},$$ untuk bilangan bulat negatif .

**Daftar Pustaka**

[1] Anton H, Chris C. Dasar-Dasar Aljabar inear Versi Aplikasi. Edisi Ketujuh. Jakarta. Erlangga. 2004.

[2] Aryani F, Yulianis. Trace Matriks Berbentuk Khusus $2 \times 2$ Berpangkat Bilangan Bulat Negatif, *Jurnal Sains Matematika dan Statistik.2018;* 4(2): 2018.

[3] Aryani F, Muda Y. *Trace Matriks Segitiga 4 × 4 Berpangkat Bilangan Bulat*. SNTIKI 12. Pekanbaru. 2020: 12

*ISSN (Printed) : 2579-7271*
*ISSN (Online ) : 2579-5406*

[4] Aryani F, Muda Y. *Trace Matriks Segitiga 5 × 5 Berpangkat Bilangan Bulat*. SNTIKI 12. Pekanbaru. 2020: 12.
[5] Aryani F, Anam C, Marzuki CC. Trace Matriks Kompleks Berbentuk Khusus 3 X 3 Berpangkat Bilangan Bulat. *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*. 2020: 6(1).
[6] Brezinski C, Fika P, Mitrouli M. Estimations of the Trace of Power of Positive by Extrapolation of the Moment. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*. 2012; 39: 144-155.
[7] Munir R. *Matematika Diskrit*. Penerbit Informatika. 2005.
[8] Pahade J, Jha M, Trace of Positive Integer Power of Real $2 \times 2$ matrices. *Advancesin Linear Algebra & Matrix Theory*.2015; 5: 150-155.