Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 11
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Pekanbaru,12 November 2019
ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Kestabilan Model *Sird* Penyebaran Penyakit Ebola Dengan Pengaruh Adanya Migrasi

I.Suryani[1], Wartono[2], Aprijon[3], Ridho.P[4]
Prodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. H.R. Soebrantas No. 155 Pekanbaru
e-mail: Irma.suryani@uin-suska.ac.id , ridhoprasetyo76@gmail.com

Abstrak

Ebola adalah salah satu penyakit menular yang disebabkan oleh virus penyebab kematian pada manusia. Penyakit Ebola dimodelkan dengan model matematika SIRD . Lebih lanjut, model matematika SIRD penyebaran penyakit ebola ditambah dengan pengaruh adanya migrasi untuk melihat seberapa besar pengaruh yang diberikan terhadap model yang telah diberikan. Pada model ini dibagi menjadi empat subpopulasi yaitu Susceptible (S), populasi Infected (I), populasi Recovery (R) dan populasi Death (D). Hasil yang diperoleh dari analisa model yaitu terdapat dua titik ekuilibrium antara titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit pada penyakit ebola. Kemudian, analisa kestabilan titik ekuibrium digunakan kriteria Routh-Hurwitz. Jika syarat terpenuhi, maka titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik penyakit akan stabil asimtotik.

Kata kunci: *Kriteria Routh-Hurwitz, Model SIRD Penyakit Ebola, Stabil asymptotic, Titik Ekuilibrium*

Abstract

Ebola is a contagious disease caused by a virus that causes death in humans. Ebola disease is modeled by the SIRD mathematical model. Furthermore, the SIRD mathematical model of the spread of ebola disease is added with the effect of migration. This model divides the populastion into four subpopulations, susceptible populations (S), infected populations (I), recovery populations (R) and death populations (D). The results obtained from the analysis of models, there are two points of equilibrium, that is disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point. Then, analysis stability with Routh-Hurwitz criteria. If the condition are complete, then disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point will be asymptotically stable.

Keywords*: Asymptotically Stable, Equilibrium Points, Routh-Hurwitz Criteria, SIRD Model Ebola Disease*

1. Pendahuluan

Penyakit menular dapat didefinisikan sebagai suatu penyakit yang dapat ditularkan (berpindah dari satu orang ke orang lain, baik secara langsung maupun perantara). Penyakit menular ini ditandai dengan adanya agen atau penyebab penyakit yang hidup dan menyerang inang (penderita). Salah satu penyakit menular yang berbahaya adalah penyakit ebola.

Ebola adalah sejenis virus dari *genus Ebolavirus*, *familia Filoviridae*. Ebola juga dijadikan nama penyakit yang disebabkan oleh virus tersebut. Virus ebola dapat menyebabkan demam hemoroik (*Ebola hemorrhagic fever*) yang hebat pada manusia. Menurut *World Health Organization (WHO)*, virus ini umumnya berkembang di desa-desa terpencil di afrika tengah dan barat. Berdasarkan data WHO sejak ditemukan tahun 1976, telah tercatat 1.850 kasus dan lebih dari 1.200 kematian yang disebabkan oleh penyakit ini.

Hingga sekarang masih belum ditemukan obat untuk penyakit ini. Pasien yang terinfeksi penyakit hanya dapat dirawat melalui terapi dan beberapa perawatan intensif seperti menyeimbangkan cairan pasien, menjaga tekanan darah dan kadar oksigen, serta menjaga mereka dari hal yang dapat menimbulkan infeksi.

Apabila interaksi ini berjalan terus menerus tanpa suatu upaya pengendalian yang serius dan disamping itu juga belum ditemukannya obat atau vaksin untuk penyakit ini maka penyakit yang sangat menular ini akan menjadi ancaman yang sangat serius dalam rentang waktu yang cukup lama.

Beberapa Peneliti terdahulu telah banyak mengembangkan dan mengkaji tentang pemodelan epidemik matematika penyakit ebola, diantaranya yaitu Zach Yarus (2012), yang membahas model matematika *SIRD* penyebaran virus ebola dengan memberikan model SIR yang kemudian memodifikasinya menjadi model *SIRD* penyebaran virus ebola. Abdon A. dan Emile F. D. G. (2014), mengkaji tentang model matematika *SIRD* penyebaran penyakit ebola atau dikenal dengan virus ebola dengan memberikan titik ekuilibrium bebas penyakit dan analisa kestabilan titiknya serta mengasumsikan dengan kematian alami dan kematian lain (selain oleh virus ebola) terjadi pada populasi total.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Pada penelitian-penelitian yang mengkaji tentang penyakit ebola sebelumnya, penelitian hanya mengasumsikan bahwa total populasi bernilai konstan, yang artinya kelahiran bernilai sama dengan kematian dan tidak adanya pengaruh dari migrasi masuk dan keluar. Dengan demikian, penulis melakukan pengembangan model untuk penyebaran penyakit ebola dengan mengasumsikan adanya migrasi pada popoulasi total dengan mengkaji ulang model *SIRD* dari jurnal Abdon A. dan Emile F. D. G.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini akan dilakukan dengan metode studi literature. Langkah – langkah yang digunakan adalah sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi parameter dan variabel yang digunakan dalam model.
2. Membuat asumsi-asumsi yang melibatkan variabel dan parameter, dalam penelitian ini penulis mengasumsikan bahwa:
   a. Faktor kelahiran dan kematian diperhatikan.
   b. Dalam populasi terjadi proses migrasi.
   c. Kontak langsung antara individu sehat dengan yang terinfeksi menyebabkan individu yang sehat terinfeksi.
   d. Individu yang sembuh dari penyakit ebola tidak akan kebal dari penyakit (rentan kembali sakit).
   e. Penyakit dapat menyebabkan kematian (fatal).
3. Menentukan model matematika dari parameter yang telah dibuat dan asumsi-asumsi yang telah diberikan.
4. Menentukan titik kesetimbangan (*equilibrium*) dari model yang dibuat.
5. Menganalisa kestabilan dari titik ekuilibrium yang telah didapat.
6. Membuat simulasi numerik dengan menggunakan *sofware maple.*

Selanjutnya akan disimpulkan hasil yang diperoleh secara keseluruhan.

3. Analisis dan Hasil

Berikut akan diberikan teorema yang berkaitan untuk mendapatkan kestabilan dari titik ekuilibrium yang diperoleh dari model.

Kestabilan titik ekuilibrium $\boldsymbol{x}^*$ dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai-nilai eigen, yaitu $\lambda_i, i = 1,2,\dots,n$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik.

Teorema 1 (Subiono, 2010) Diberikan persamaan diferensial $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax}$ dengan a adalah matriks berukuran nxn memiliki k nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ dengan $k \leq n$.

a. Titik ekuilibrium $\boldsymbol{x}^*$ dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika $Re\,\lambda_i < 0$ untuk setiap $= 1,2,\dots,k$
b. Titik ekuilibrium $\boldsymbol{x}^*$ dikatakan stabil jika dan hanya jika $Re\,\lambda_i \leq 0$ untuk setiap $= 1,2,\dots,k$.
c. Titik ekuilibrium $\boldsymbol{x}^*$ dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika $Re\,\lambda_i > 0$ untuk beberapa $= 1,2,\dots,k$.

Teorema 2 Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz untuk k = 2,3,4, disebutkan bahwa titik ekuilibrium stabil jika dan hanya jika:

$$k = 2 \qquad a_1 > 0, a_2 > 0,$$
$$k = 3 \qquad a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3,$$
$$k = 4 \qquad a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_1 a_2 a_3 > {a_3}^2 + {a_1}^2 a_4.$$

Jika kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi, maka titik ekuilibrium stabil asimtotik lokal.

3.1 Pembentukan Model

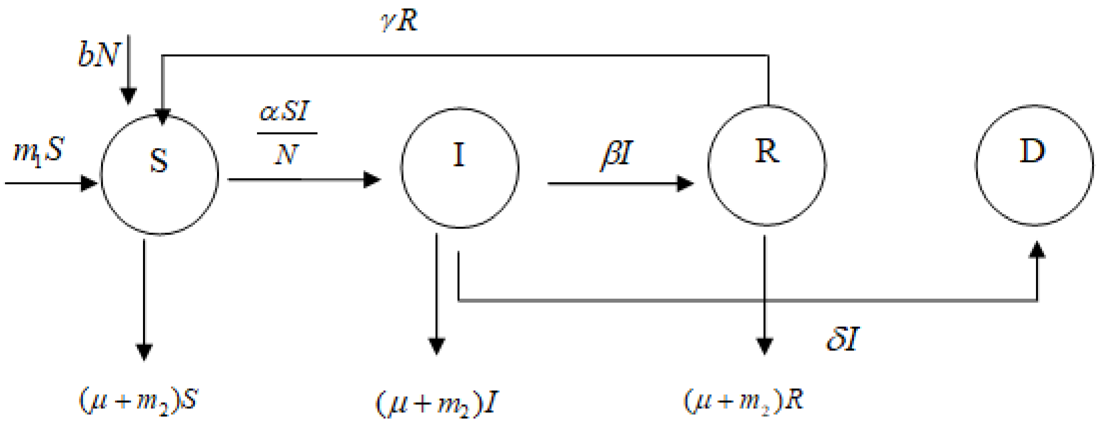
Populasi dibagi menjadi 4 subpopulasi, yaitu *Susceptible (S)* yaitu jumlah individu yang sehat dan rentan terhadap peyakit ebola, *Infectible (I)* yaitu jumlah individu yang terinfeksi dan menularkan penyakit ebola, *Recovery (R)* yaitu jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit ebola dan *Death (D),* yaitu jumlah individu yang telah mati akibat dari penyakit ebola dan kematian alami.

Adapun asumsi-asumsi yang digunakan pada model matematika ini adalah sebagai berikut:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

a) Faktor kelahiran dan kematian diperhatikan. Individu yang lahir akan masuk ke kelas *Susceptible (S)* karena individu yang lahir diasumsikan sehat tetapi rentan terhadap penyakit ebola.
b) Dalam populasi terjadi proses migrasi**.** Imigrasi diasumsikan terjadi di kelas *Susceptible (S)* dan imigran yang masuk ke populasi dipastikan individu yang tidak terinfeksi penyakit ebola. Sedangkan emigrasi terjadi di semua subpopulasi kecuali pada subpopulasi *D (Death).*
c) Kontak langsung antara individu sehat dengan yang terinfeksi akan mengakibatkan individu yang sehat ikut terinfeksi dan berdampak terhadap berkurangnya jumlah populasi.
d) Individu yang telah sembuh dari penyakit ebola tidak akan kebal dari penyakit sehingga akan rentan kembali terserang penyakit ebola maka akan masuk kembali ke populasi *S (Susceptible)*.
e) Penyakit dapat menyebabkan kematian (fatal). Individu yang mati akibat penyakit akan dipisahkan ke populasi *D (Death)* dan setelahnya diasumsikan tidak ada laju kontak yang mengakibatkan tertularnya penyakit.

Berdasarkan asumsi penyebaran penyakit ebola dengan pengaruh adanya migrasi di atas, maka dapat dibentuk diagram transfer sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram Transfer Model Matematika Penyebaran Penyakit Ebola dengan Pengaruh Adanya Migrasi

Berdasarkan diagram tarnsferi penyebaran penyakit ebola diatas, dibentuk model matematika penyebaran penyakit ebola dengan pengaruh adanya migrasi yang disebut Sistem (1) yaitu sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = bN + m_1 S + \gamma R - \frac{\alpha SI}{N} - m_2 S - \mu S \tag{1.a}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\alpha SI}{N} - \beta I - \delta I - m_2 I - \mu I \tag{1.b}$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I - \gamma R - m_2 R - \mu R \tag{1.c}$$

$$\frac{dD}{dt} = \delta I \tag{1.d}$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

dengan $N = S + I + R + D$ merupakan jumlah populasi keseluruhan.
Perhatikan bahwa, pada Sistem (1) variabel D tidak muncul pada persamaaan, hal ini menunjukkan bahwa jumlah individu pada kelas D tidak mempengaruhi laju perubahan jumlah individu pada kelas S , I maupun R . Dengan demikian, nilai D dapat diabaikan dan Sistem (1) dapat dibentuk menjadi Sistem (2) yaitu sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = bN + m_1 S + \gamma R - \frac{\alpha SI}{N} - m_2 S - \mu S \tag{2.a}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\alpha SI}{N} - \beta I - \delta I - m_2 I - \mu I \tag{2.b}$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I - \gamma R - m_2 R - \mu R \tag{2.c}$$

dengan $N \leq S + I + R$.

3.2. Titik Ekuilibrium

Titik Ekuilibrium merupakan titik yang tidak mengalami perubahan sepanjang waktu (konstan). Titik ekuilibrium dari Sistem (2) di atas diperoleh dengan menjadikan ruas kanan masing-masing persamaan sama dengan nol,

atau $\frac{dS}{dt} = 0,\ \frac{dI}{dt} = 0,\ \frac{dR}{dt} = 0$.

Dalam model matematika penyebaran penyakit ebola ini, terdapat dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik.

3.2.1. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Titik ekuilibrium bebas penyakit adalah suatu kondisi pada populasi tidak ada lagi penyakit, dengan kata lain pada populasi terjadi bebas penyakit jika $I = 0$. Maka untuk titik ekuilibrium bebas penyakit ebola dinotasikan dengan $\hat{E} = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$ dimana $\hat{I} = 0$. Maka, titik ekuilibrium untuk bebas penyakit ebola $(\hat{E})$ diperoleh sebagai berikut:

$$(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) = \left(\frac{bN}{m_2 + \mu - m_1}, 0, 0 \right)$$

3.2.2. Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit Ebola

Titik ekuilibrium endemik penyakit ebola adalah suatu keadaan di dalam populasi selalu ada penyakit ebola, dimana $I \neq 0$. Maka untuk titik ekuilibrium endemik penyakit ebola dinotasikan dengan $E^* = (S^*, I^*, R^*)$ dimana $I^* \neq 0$. Dengan demikian, titik ekuilibrium endemik penyakit ebola dengan masing-masing titiknya diperoleh sebagai berikut:

$$S^* = \frac{(\beta + \delta + m_2 + \mu)N}{\alpha}$$

$$I^* = \frac{(\alpha bN + N(m_1 - m_2 - \mu)(\beta + \delta + m_2 + \mu))(\gamma + m_2 + \mu)}{(\alpha)((\gamma + m_2 + \mu)(\beta + \delta + m_2 + \mu) - \gamma\beta)}$$

$$R^* = \frac{(\beta)(\alpha bN + N(m_1 - m_2 - \mu)(\beta + \delta + m_2 + \mu))}{((\alpha)((\gamma + m_2 + \mu)(\beta + \delta + m_2 + \mu) - \gamma\beta))}$$

dengan $E^* = (S^*, I^*, R^*)$.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

3.3. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Kestabilan titik ekuilibrium Sistem (2) dapat didekati dengan melakukan linearisasi menggunakan matrik Jacobian,

$$J=\begin{bmatrix} m_1-m_2-\frac{\alpha I}{N}-\mu & \frac{-\alpha S}{N} & \gamma \\ \frac{\alpha I}{N} & \frac{\alpha S}{N}-\beta-m_2-\delta-\mu & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma-m_2-\mu \end{bmatrix} \tag{9}$$

3.3.1. Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit Ebola

Teorema 3 Jika $m_1 < m_2+\mu$ dan $\frac{\alpha b}{m_2+\mu-m_1} < \beta+m_2+\delta+\mu$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit ebola stabil asimtotik lokal.

Bukti:

Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit ebola dapat diselidiki dengan cara mensubstitusikan titik ekuilibrium bebas penyakit ebola yang telah didapat yaitu $\hat{E}(\hat{S},\hat{I},\hat{R})=\left(\frac{bN}{m_2+\mu-m_1},0,0\right)$ ke dalam matriks Jacobian (9),sehingga diperoleh:

$$J(\hat{E})=\begin{bmatrix} m_1-m_2-\mu & \left(\frac{-\alpha b}{m_2+\mu-m_1}\right) & \gamma \\ 0 & \left(\frac{\alpha b}{m_2+\mu-m_1}\right)-\beta-m_2-\delta-\mu & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma-m_2-\mu \end{bmatrix} \tag{10}$$

Kemudian akan dicari nilai eigen dari matriks Jacobian untuk keadaan bebas penyakit $J(\hat{E})$ yang telah didapat yaitu dengan $\det(J(\hat{E})-\lambda I)=0$. Dengan menggunakan metode Sarrus, maka akan diperoleh:

$$\det\begin{bmatrix} m_1-m_2-\mu-\lambda & \left(\frac{-\alpha b}{m_2+\mu-m_1}\right) & \gamma \\ 0 & \left(\frac{\alpha b}{m_2+\mu-m_1}\right)-\beta-m_2-\delta-\mu-\lambda & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma-m_2-\mu-\lambda \end{bmatrix}=0$$

$$(m_1-m_2-\mu-\lambda)\left(\left(\frac{\alpha b}{m_2+\mu-m_1}\right)-\beta-m_2-\delta-\mu-\lambda\right)(-\gamma-m_2-\mu-\lambda)=0$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

maka:

$\lambda_1 = m_1 - m_2 - \mu$, $\lambda_2 = \dfrac{\alpha b}{m_2 + \mu - m_1} - \beta - m_2 - \delta - \mu$, $\lambda_3 = -(\gamma + m_2 + \mu)$

Untuk titik ekuilibrium bebas penyakit ebola yang stabil asimtotik, maka nilai eigen $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ dan $\lambda_3 < 0$. Diketahui nilai eigen λ_3 bernilai negatif, kemudian akan ditunjukkan bahwa $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$.

a) Akan dibuktikan $\lambda_1 < 0$

$$\lambda_1 = m_1 - m_2 - \mu$$
$$\lambda_1 = m_1 - (m_2 + \mu)$$

Akan ditunjukkan bahwa $m_1 - (m_2 + \mu) < 0$.

Apabila $m_1 - (m_2 + \mu) < 0$ maka berlaku $m_1 < (m_2 + \mu)$ sehingga terbukti bahwa $m_1 - (m_2 + \mu) < 0$. jadi $\lambda_1 < 0$.

b) Akan dibuktikan $\lambda_2 < 0$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha b}{m_2 + \mu - m_1} - (\beta + m_2 + \delta + \mu)$$

Akan ditunjukkan bahwa:

$$\frac{\alpha b}{m_2 + \mu - m_1} - (\beta + m_2 + \delta + \mu) < 0.$$

Jika $\dfrac{\alpha b}{m_2 + \mu - m_1} - (\beta + m_2 + \delta + \mu) < 0$

maka berlaku

$$\frac{\alpha b}{m_2 + \mu - m_1} < (\beta + m_2 + \delta + \mu)$$

dengan demikian, diperoleh $\dfrac{\alpha b}{m_2 + \mu - m_1} - (\beta + m_2 + \delta + \mu) < 0$

Jadi, terbukti bahwa $\lambda_2 < 0$.

Karena $\lambda_i < 0$ untuk $i = 1,2,3$, maka berdasarkan Teorema 2 dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium untuk bebas penyakit ebola adalah stabil asimtotik lokal yang berarti untuk jangka waktu yang lama populasi akan terbebas dari penyakit ebola

3.3.2. Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit Ebola

Teorema 4 Jika :

a) $m_1 > m_2 + \mu$

b) $(\gamma + m_2 + \mu)(\beta + \delta + m_2 + \mu) > \gamma\beta$

c) $-m_1 m_2 \mu\gamma < m_2^{2} \mu\gamma$
$$+ m_2 \alpha\mu\gamma \left(\frac{(\alpha b + (m_1 - m_2 - \mu)(\beta + \delta + m_2 + \mu))(\gamma + m_2 + \mu)}{((\gamma + m_2 + \mu)(\beta + \delta + m_2 + \mu) - \gamma\beta)} \right)$$

d) $a_1 a_2 > a_3$ dengan

 ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$a_1 = -m_1 m_2 \mu\gamma + m_2{}^2 \mu\gamma + m_2 \alpha\mu\gamma \left(\frac{(\alpha b + (m_1 - m_2 - \mu)(\beta + \delta + m_2 + \mu))(\gamma + m_2 + \mu)}{((\gamma + m_2 + \mu)(\beta + \delta + m_2 + \mu) - \gamma\beta)} \right) + m_2 \mu^2 \gamma$$

$$a_2 = m_2 \beta\delta\mu\lambda\alpha \left(\frac{(\alpha b + (m_1 - m_2 - \mu)(\beta + \delta + m_2 + \mu))(\gamma + m_2 + \mu)}{((\gamma + m_2 + \mu)(\beta + \delta + m_2 + \mu) - \gamma\beta)} \right)$$

$$a_3 = \left(\beta\gamma + m_2 \beta\delta\mu\gamma + m_2{}^2 \beta\delta\mu + m_2 \beta\delta\mu^2\right) \left(\frac{(\alpha b + (m_1 - m_2 - \mu)(\beta + \delta + m_2 + \mu))(\gamma + m_2 + \mu)}{((\gamma + m_2 + \mu)(\beta + \delta + m_2 + \mu) - \gamma\beta)} \right)$$

maka titik ekuilibrium endemik penyakit ebola stabil asimtotik lokal.

Bukti:

Kestabilan titik ekuilibrium endemik penyakit ebola dapat dilihat dengan cara mensubtitusikan titik ekuilibrium endemik penyakit ebola $E^* = (S^*, I^*, R^*)$ ke dalam matriks jacobian pada Persamaan berikut :

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} m_1 - m_2 - \frac{\alpha I^*}{N} - \mu & -(\beta + \delta + m_2 + \mu) & \gamma \\ \frac{\alpha I^*}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma - m_2 - \mu \end{bmatrix} \quad (11)$$

Kemudian akan dicari nilai eigen dari matriks di atas dengan cara $\det(J(E^*) - \lambda I) = 0$, dengan menggunakan metode sarrus, maka akan diperoleh :

$$\det\left(\begin{bmatrix} m_1 - m_2 - \frac{\alpha I^*}{N} - \mu - \lambda & -(\beta + \delta + m_2 + \mu) & \gamma \\ \frac{\alpha I^*}{N} & -\lambda & 0 \\ 0 & \beta & -\gamma - m_2 - \mu - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(m_1 - m_2 - \frac{\alpha I^*}{N} - \mu - \lambda \right)(-\lambda)(-\gamma - m_2 - \mu - \lambda) + (\gamma)\left(\frac{\alpha I^*}{N} \right)(\beta) \right)$$
$$- \left(0 + 0 + (-\gamma - m_2 - \mu - \lambda)\left(\frac{\alpha I^*}{N} \right)(-\beta - m_2 - \delta - \mu) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3 (m_2 \mu\gamma) +$$
$$\lambda^2 \left(-m_1 m_2 \mu\gamma + m_2{}^2 \mu\gamma + m_2 \alpha\mu\gamma \left(\frac{(\alpha b + (m_1 - m_2 - \mu)(\beta + \delta + m_1 + \mu))(\gamma + m_1 + \mu)}{((\gamma + m_1 + \mu)(\beta + \delta + m_1 + \mu) - \gamma\beta)} \right) + m_2 \mu^2 \gamma \right) \quad (12)$$
$$+ \lambda \left(m_2 \beta\delta\mu\alpha \left(\frac{(\alpha b + (m_1 - m_2 - \mu)(\beta + \delta + m_1 + \mu))(\gamma + m_1 + \mu)}{((\gamma + m_1 + \mu)(\beta + \delta + m_1 + \mu) - \gamma\beta)} \right) \right)$$
$$+ \left(\beta\gamma + m_2 \beta\delta\mu\gamma + m_2{}^2 \beta\delta\mu + m_2 \beta\delta\mu^2\right) \left(\frac{(\alpha b + (m_1 - m_2 - \mu)(\beta + \delta + m_1 + \mu))(\gamma + m_1 + \mu)}{((\gamma + m_1 + \mu)(\beta + \delta + m_1 + \mu) - \gamma\beta)} \right) = 0$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Kemudian, substitusikan nilai titik ekuilibrium I^* pada Persamaan (7) ke dalam Persamaan (12), sehingga diperoleh:

$$\Leftrightarrow \lambda^3(m_2\mu\gamma)+$$
$$\lambda^2\left(-m_1m_2\mu\gamma+m_2{}^2\mu\gamma+m_2\alpha\mu\gamma\left(\frac{(\alpha b+(m_1-m_2-\mu)(\beta+\delta+m_1+\mu))(\gamma+m_1+\mu)}{((\gamma+m_1+\mu)(\beta+\delta+m_1+\mu)-\gamma\beta)}\right)+m_2\mu^2\gamma\right)$$
$$+\lambda\left(m_2\beta\delta\mu\alpha\left(\frac{(\alpha b+(m_1-m_2-\mu)(\beta+\delta+m_1+\mu))(\gamma+m_1+\mu)}{((\gamma+m_1+\mu)(\beta+\delta+m_1+\mu)-\gamma\beta)}\right)\right)$$
$$+\left(\beta\gamma+m_2\beta\delta\mu\gamma+m_2{}^2\beta\delta\mu+m_2\beta\delta\mu^2\right)\left(\frac{(\alpha b+(m_1-m_2-\mu)(\beta+\delta+m_1+\mu))(\gamma+m_1+\mu)}{((\gamma+m_1+\mu)(\beta+\delta+m_1+\mu)-\gamma\beta)}\right)=0$$

Selanjutnya, Persamaan (10) diatas dapat diubah kedalam persamaan kharakteristik yaitu sebagai berikut :

$$P(\lambda)=a_0\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0$$

dimana:

$$a_0=m_2\mu\gamma$$
$$a_1=-m_1m_2\mu\gamma+m_2{}^2\mu\gamma+m_2\alpha\mu\gamma\left(\frac{(\alpha b+(m_1-m_2-\mu)(\beta+\delta+m_2+\mu))(\gamma+m_2+\mu)}{((\gamma+m_2+\mu)(\beta+\delta+m_2+\mu)-\gamma\beta)}\right)$$
$$+m_2\mu^2\gamma$$
$$a_2=m_2\beta\delta\mu\lambda\alpha\left(\frac{(\alpha b+(m_1-m_2-\mu)(\beta+\delta+m_2+\mu))(\gamma+m_2+\mu)}{((\gamma+m_2+\mu)(\beta+\delta+m_2+\mu)-\gamma\beta)}\right)$$
$$a_3=\left(\beta\gamma+m_2\beta\delta\mu\gamma+m_2{}^2\beta\delta\mu+m_2\beta\delta\mu^2\right)\left(\frac{(\alpha b+(m_1-m_2-\mu)(\beta+\delta+m_2+\mu))(\gamma+m_2+\mu)}{((\gamma+m_2+\mu)(\beta+\delta+m_2+\mu)-\gamma\beta)}\right)$$

Berdasarkan Teorema 3 (kriteria Routh Hurwitz), titik ekuilibrium endemik (S^*,I^*,R^*) stabil asimtotik lokal jika $a_1>0$, $a_3>0$ dan $a_1a_2>a_3$.

Maka, setelah ditunjukkan dan telah terbukti bahwa $a_1>0$ dan $a_3>0$ lebih lanjut lagi $a_2>0$ maka syarat untuk $a_1a_2>a_3$ telah terpenuhi. Dengan demikian, telah terbukti bahwa penyakit ebola dengan pengaruh adanya migrasi stabil asimtotik lokal yaitu yang artinya bahwa dalam jangka waktu yang cukup lama akan selalu terdapat penyakit ebola didalam populasi. $\blacksquare$

3.4. Simulasi

3.4.1. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit Ebola

Pada simulasi titik ekuilibrium bebas penyakit ebola dengan pengaruh adanya migrasi ini, akan digunakan nilai parameter sebagai berikut:

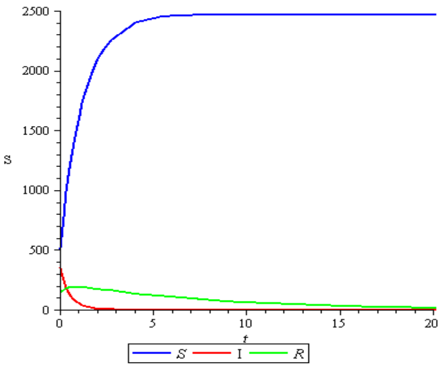
Tabel 1 Nilai Parameter Untuk Bebas Penyakit Ebola

Parameter	Nilai	Sumber
N	1000	Abdon A. Dan Emile F. D. G
B	2	Asumsi
m_1	0.1	Asumsi
m_2	0.9	Asumsi
μ	0.01	Abdon A. Dan Emile F. D. G
α	0.01	Abdon A. Dan Emile F. D. G

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

β	0.4	Abdon A. Dan Emile F. D. G
δ	0.6	Abdon A. Dan Emile F. D. G
γ	0.02	Abdon A. Dan Emile F. D. G

Berdasarkan nilai-nilai parameter yang diberikan, maka dari titik ekuilibrium dari Sistem (2) akan diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit ebola, yaitu $(\hat{S},\hat{I},\hat{R})=(2469.136;0;0)$, dengan nilai awal $S(0)$ = 500, $I(0)$ = 350, $R(0)$ = 150 dinamika populasi bebas penyakit ebola dapat dilihat pada Gambar 2 berikut ini:



Gambar 2 Simulasi Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit Ebola.

Pada Gambar 2 terlihat bahwa individu yang terinfeksi penyakit ebola akan semakin menurun menuju nol. Artinya, tidak adalagi individu yang terinfeksi ebola. Sedangkan individu yang rentan naik secara signifikan menuju suatu titik dan kontinu di titik tersebut. Artinya, individu yang rentan untuk waktu yang cukup lama akan semakin bertambah secara signifikan.

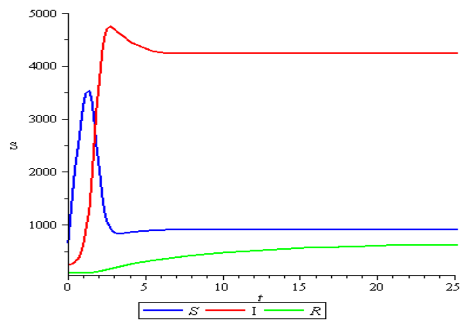
3.4.2. Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit Ebola

Pada simulasi titik ekuilibrium endemik penyakit yaitu pada model matematika penyakit ebola dengan pengaruh adanya migrasi ini, akan digunakan nilai parameter sebagai berikut:

Tabel 2 Nilai Parameter Untuk Endemik Penyakit Ebola

Parameter	Nilai	Sumber
N	1000	Abdon A. Dan Emile F. D. G
B	3	Asumsi
m_1	0.2	Asumsi
m_2	0.1	Asumsi
μ	0.01	Abdon A. Dan Emile F. D. G
α	0.8	Asumsi
β	0.02	Asumsi
δ	0.6	Abdon A. Dan Emile F. D. G
γ	0.02	Abdon A. Dan Emile F. D. G

Dari nilai-nilai parameter yang diberikan, maka dari titik ekuilibrium dan Sistem (2) akan diperoleh titik ekuilibrium endemik penyakit ebola, yaitu $(S^*,I^*,R^*)=(912{,}5;4239.9603;652.301)$, dengan nilai awal $S(0)$= 650, $I(0)$ = 250, $R(0)$ = 100, sehingga dinamika populasi endemik penyakit ebola dapat dilihat pada Gambar 3 berikut ini:



Gambar 3 Simulasi Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit Ebola

Pada Gambar 3 terlihat bahwa individu yang rentan terhadap penyakit ebola pada awalnya akan meningkat seiring dengan meningkatnya individu yang terinfeksi penyakit ebola. Akan tetapi, individu yang rentan untuk waktu tertentu menurun secara signifikan dan kontinu menuju titik tertentu. Begitu juga untuk individu yang terinfeksi, kurva menunjukkan kenaikan secara signifikan dan tetap pada titik tertentu tidak mengalami penurunan. Artinya, masih terdapat individu yang terinfeksi penyakit ebola pada populasi tersebut yang dapat menyebarkan ke individu rentan maupun ke individu yang sembuh

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, maka dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Model SIRd Penyebaran Penyakit Eboleh dengan adanya pengaruh Migrasi pada Persamaan (1) dapat dituliskan kembali

$$\frac{dS}{dt} = bN + m_1 S + \gamma R - \frac{\alpha SI}{N} - m_2 S - \mu S$$
$$\frac{dI}{dt} = \frac{\alpha SI}{N} - \beta I - \delta I - m_2 I - \mu I$$
$$\frac{dR}{dt} = \beta I - \gamma R - m_2 R - \mu R$$
$$\frac{dD}{dt} = \delta I$$

dengan $N = S + I + R + D$ merupakan jumlah populasi keseluruhan.

2. Ada dua titik ekuilibrium yang diperoleh yaitu,

   a. Titik ekuilibrium bebas penyakit, $\left(\hat{E}\right) = \left(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}\right) = \left(\frac{bN}{m_2 + \mu - m_1}, 0, 0\right)$

   b. Titik ekuilibrium endemik penyakit, $E^* = \left(S^*, I^*, R^*\right)$ dengan,

$$S^* = \frac{(\beta + \delta + m_2 + \mu)N}{\alpha}$$
$$I^* = \frac{(\alpha bN + N(m_1 - m_2 - \mu)(\beta + \delta + m_2 + \mu))(\gamma + m_2 + \mu)}{(\alpha)((\gamma + m_2 + \mu)(\beta + \delta + m_2 + \mu) - \gamma\beta)}$$
$$R^* = \frac{(\beta)(\alpha bN + N(m_1 - m_2 - \mu)(\beta + \delta + m_2 + \mu))}{((\alpha)((\gamma + m_2 + \mu)(\beta + \delta + m_2 + \mu) - \gamma\beta))}$$

Daftar Pustaka

[1] Allen, Linda.J.S. 2006. An Introduction to Mathematical Biology. Pearson, Inggris.

[2] Antangana, abdon dan Emile F.D.G. Jurnal: “On The Mathematical Analisys of Ebola Hemorrhagic Fever: Deathly Infection Disease in West African Country.” *Institute of Groundwater Studies and University of South Africa: South Africa.* 2014.

[3] Chasnov, Jeffrey R. Introduction to Diferential Equation. halaman 83, The Hong Kong University Science and Technology, Hong Kong. 2009.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

[4] European Centre For Disease Prevention and Control. Outbreak of Ebola Virus Disease in West Africa. *West Africa: Rapid Risk Assesment*. 2015.
[5] Kreyszig, E. Advanced Engineering Mathematics. Edisi ke-10, halaman 1283. John Wiley & Sons. Inc, United States of America. 2011.
[6] Munir, R. Metode Numerik. Edisi Revisi, halaman 419. Informatika, Bandung. 2007.
[7] Perko, L. Differential Equations Dynamika System. Springed-Verlag, New York. 1991.
[8] Rorres, Anton. Aljabar Linier Elementer. Erlangga, Jakarta. 2004.
[9] Santosa, R. Gunawan. Aljabar Linier Dasar. Andi, Yogyakarta. 2009.
[10] Subiono. Matematika Sistem. Jurusan Matematika, FMIPA-ITS. Surabaya. 2010.
[11] Wartono. Persamaan Differensial Biasa dan Masalah Nilai Awal. Edisi Pertama. Pekanbaru: Suska Press. 2009.
[12] Widodo. Pengantar Model Matematika, Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta. 2007.
[13] Yarush, Zach. Jurnal: *A Mathematical Look At The Ebola Virus*. 2012.