ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Invers Matriks Tak Negatif M_n Menggunakan Metode Adjoin

Fitri Aryani[1], Maysarah Ulfah[2], Corry Corazon Marzuki[3]
[1,,2,,3] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
e-mail: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id

Abstrak

Penelitian ini membahas tentang invers matriks tak negatif M_n dengan entri diagonal utama nol dan selainnya lebih besar dari nol. Matriks tak negatif yang dibahas terbagi menjadi dua bentuk khusus, yaitu matriks tak negatif berorde genap dan ganjil. Invers matriks tak negatif M_n dapat ditentukan dengan menggunakan metode adjoin. Metode adjoin terdapat tiga langkah yang harus dilakukan. Pertama, menentukan nilai determinan matriks. Kedua, menentukan matriks kofaktor dan ketiga mendapatkan invers matriks dengan menggunakan persamaan $(M_n)^{-1} = \frac{1}{|M_n|} adj(M_n)$. Hasil akhir diperoleh dua bentuk umum matriks kofaktor dari M_n untuk n genap dan n ganjil serta dua bentuk umum invers dari matriks tak negatif M_n untuk n genap dan n ganjil.

Kata kunci: *adjoin, determinan, invers matriks, matriks kofaktor, matriks tak negatif.*

Abstract

This project, we discuss about inverse non-negative matrix $M_n$with the main the diagonal entry is zero and the other entries are greater then zero. The non-negative matrix discussed is divided into two specific forms, even and odd non-negative matrices. The inverse of non-negative matrix M_n obtained by using Adjoint method. The adjoint method has three steps that must be done. First, determine the value of the determinant of a matrix. Second, determine the matrix of cofactors and the third step is determine the inverse of matrix by using $(M_n)^{-1} = \frac{1}{|M_n|} adj(M_n)$. In this final we get two common forms of cofactor matrix M_n for n even and n odd and two general forms of inverse non-negative matrix M_n for n even and n odd.

Keywords*: adjoint, cofactor matrix, determinant, inverse matrix, non-negative matrix.*

1. Pendahuluan

Aljabar linear merupakan bidang studi matematika yang salah satu objek pembahasannya mempelajari matriks. Umumnya matriks dapat digunakan dalam kehidupan sehari-hari, misalnya dalam bidang industri, pertanian, teknik, ekonomi, operasi riset dan lain-lain. Sederet bilangan berbentuk persegi panjang yang diapit oleh sepasang kurung siku dan memenuhi aturan-aturan tertentu yang diberikan pada operasi ini disebut matriks [5]. Bentuk atau ukuran matriks ditentukan dari banyaknya baris dan kolom. Bilangan yang terdapat dalam matriks disebut entri matriks.

Berdasarkan entri penyusunnya, terdapat beberapa jenis matriks adalah matriks nol, matriks bujur sangkar, matriks simetris, matriks segitiga, matriks diagonal dan matriks identitas. Selain itu, ada matriks tak negatif dan matriks positif berdasarkan entri penyusun matriks tersebut. Suatu matriks A berorde $n \times n$ dengan entri bilangan real disebut tak negatif jika $a_{ij} \geq 0$ untuk setiap i dan j, dan disebut positif jika $a_{ij} > 0$ untuk setiap i dan j [6].

Dalam aljabar linear, invers suatu matriks merupakan hal yang menarik untuk dibicarakan guna menyelesaikan permasalahan dalam bentuk sistem persamaan linear. Sebuah matriks memiliki invers jika matriks tersebut determinannya tak nol. Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menentukan invers suatu matriks diantaranya adalah metode adjoin, perkalian matriks invers elementer dan dekomposi simatriks LU. Dalam praktiknya untuk menentukan invers suatu matriks yang berukuran besar dengan menggunakan metode-metode tersebut membutuhkan waktu yang relatif lama. Oleh sebab itu dibutuhkan rumusan umum yang tepat untuk menentukan invers dari suatu matriks.

Pada sebuah artikel yang dipublikasikan oleh Bakti Siregar dan kawan-kawan pada tahun 2014, meneliti invers matriks toeplitz dengan bentuk khusus sebagai berikut:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & x & \cdots & x \\ x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \forall\, x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Pada makalah tersebut diperoleh hasil berupa rumus umum untuk menentukan determinan, matriks kofaktor dan invers dari matriks toeplitz berorde n pada Persamaan (1). Dengan adanya rumus umum tersebut maka waktu yang dibutuhkan untuk mencari determinan, matriks kofaktor dan invers dari suatu matriks toeplitz relatif lebih singkat bila dibandingkan dengan metode-metode yang biasa digunakan.

Selanjutnya pada tahun 2016 [2] melakukan penelitian mengenai invers suatu matriks. Hasil yang diperoleh dari penelitian tersebut juga berupa rumus umum untuk menentukan determinan, matriks kofaktor dan invers dari matriks toeplitz tridiagonal yang berorde n.

Pada tahun 2016, [7] melakukan penelitian dalam bentuk skripsi. Dalam penelitian tersebut diperoleh hasil berupa rumus umum determinan matriks tak negatif dengan bentuk khusus tertentu

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah menentukan rumus umum matriks kofaktor dan invers dari matriks tak negatif orde genap dan ganjil dengan mengamati pola rekursif yang terbentuk dari nilai-nilai yang telah dicari terlebih dahulu. Matriks dengan orde genap adalah matriks yang mempunyai orde bilangan genap. Sedangkan matriks orde ganjil adalah matriks yang mempunyai orde bilangan ganjil, pada Persamaan (1) dan (2) berikut ini:

1. Matriks tak negatif berode genap

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & a & b & \cdots & b & a \\ a & 0 & b & \cdots & b & a \\ a & b & 0 & \cdots & b & a \\ a & b & a & \ddots & b & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a & b & a & \cdots & a & 0 \end{bmatrix}, \forall a, b > 0 \quad (2)$$

2. Matriks tak negatif berode ganjil

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & a & b & \cdots & a & b \\ a & 0 & b & \cdots & a & b \\ a & b & 0 & \cdots & a & b \\ a & b & a & \ddots & a & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a & b & a & \cdots & b & 0 \end{bmatrix}, \forall a, b > 0 \quad (3)$$

2. Metode dan Bahan Penelitian

Penelitan ini dilakukan untuk mendapatkan rumus umum matriks kofaktor dan invers dari matriks tak negatif M_n. Dimulai dengan memberikan bentuk umum matriks tak negatif M_n pada persamaan (1) dan (2). Kemudian menentukan matriks kofaktor dan invers dari matriks tak negatif M_n dengan menggunakan rumus umum determinan matriks tak negatif M_n yang telah diperoleh oleh [7]. Kemudian mengamati pola rekursif yang terbentuk dari nilai-nilai yang telah dicari sehingga diperoleh rumus umum matriks kofaktor dan invers dari matriks tak negatif M_n.

Definisi 1 [1] Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks.

Definisi 2 [8] Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen di luar elemen diagonal utama adalah nol dan elemen diagonal utama tidak nol.

Definisi 3 [6] Suatu matriks A berorde $n \times n$ dengan entri bilangan real disebut tak negatif jika $a_{ij} \geq 0$ untuk setiap i dan j, dan disebut positif jika $a_{ij} > 0$ untuk setiap i dan j.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Definisi 4 [1] Misalkan A adalah matriks bujur sangkar. Fungsi determinan dinotasikan dengan $\det$ dan mendefinisikan $\det(A)$ sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda dari A. Angka $\det(A)$ disebut determinan dari$A$.

Definisi 5 [3] Diketahui matriks A berukuran $n \times n$. Minor M_{ij} adalah determinan dari matriks berukuran $(n-1) \times (n-1)$ yang diperoleh dari matriks A dengan menghapus baris ke-*I* dan kolom ke-*j*. Sedangkan kofaktor $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Teorema 1 [1] Determinan dari matriks A, $n \times n$, dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali-hasil kali yang diperoleh, dimana untuk setiap$1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$;

1. Ekspansi sepanjang kolom ke-*j*
$$det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$
2. Ekspansi sepanjang baris ke-*i*
$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

Definisi 6 [1] Jika A adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik dan B disebut sebagai invers dari A. Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan sebagai matriks singular.

Teorema 2 [1] Suatu matriks bujur sangkar A dapat dibalik, jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Definisi 7 [1] Jika A adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari A, dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A; sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, dan kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A, dan seterusnya.

Definisi 8 [1] Jika A adalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks
$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$
Disebut sebagai matriks kofaktor dari A. Transpos dari matriks ini disebut adjoin dari$A$ dan dinyatakan sebagai $adj(A)$.

Teorema 3 [4] Jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Teorema 4 [7] Andaikan M_n suatu matriks tak negatif berorde genap dengan$n \geq 2$ dimana $\forall a, b \in \mathbb{R}$ dan $a, b > 0$ maka nilai determinan matriks M_n adalah:h
$$|M_n| = -a^{\left(\frac{n}{2}\right)} b^{\left(\frac{n}{2}-1\right)} \left(\left(\frac{n}{2}\right) a + \left(\frac{n}{2} - 1\right) b \right)$$
Teorema 5. [7] AndaikanM_n suatu matriks tak negatif berorde ganjil dengan $n \geq 2$ dengan $\forall a, b \in \mathbb{R}$ dan $a, b > 0$ maka nilai determinan matriks M_n adalah
$$|M_n| = \left(\frac{n-1}{2}\right) \left((ab)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \right) (a + b)$$

3. Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan Teorema 3 untuk memperoleh invers dari matriks tak negatif M_n pada Persamaan (1) dan (2) dapat menggunakan metode adjoin.. Telah diperoleh rumus umum determinan dari matriks tak negatif M_n pada Teorema 4 dan 5 oleh [7] . Langkah berikutnya adalah menentukan matriks kofaktor dari M_2 sampai M_8 dengan menggunakan rumus $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Kemudian merumuskan bentuk

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

umum matriks kofaktor dari matriks tak negatif M_n dengan mengamati pola rekursif yang terbentuk, sehingga diperoleh bentuk umum persamaan matriks kofaktor dari matriks tak negatif M_n dengan n genap sebagai berikut:

a. Entri pada baris pertama kolom pertama sama dengan entri pada baris ke-n kolom ke-n, yaitusebagai berikut:
$c_{11} = c_{nn} = \left[\left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}-1}\right) + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(a^{\frac{n}{2}-1} b^{\frac{n}{2}}\right)\right]$

b. Entri pada baris pertama kolom kedua sampai kolom ke-$n$sama dengan entri pada baris ke-n kolom pertamasampai kolom ke- $n-1$, yaitu sebagai berikut:
$c_{12} = c_{13} = \cdots = c_{1n} = c_{n1} = c_{n2} = \cdots = c_{n\,n-1} = -a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}-1}$

c. Entri pada baris kedua kolom pertama sama dengan entri pada baris ke-$n-1$ kolom ke-n, yaitu sebagai berikut:
$c_{21} = c_{n-1\,n} = \left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(a^{\frac{n}{2}+1} b^{\frac{n}{2}-2}\right) - a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}-1} - \left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(a^{\frac{n}{2}-1} b^{\frac{n}{2}}\right)$

d. Entri pada baris kedua kolom keduasama dengan entri pada baris ke-$n-1$ kolom ke-$n-1$, yaitu sebagai berikut:
$c_{22} = c_{n-1\,n-1} = \left[\left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(a^{\frac{n}{2}+1} b^{\frac{n}{2}-2}\right) + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}-1}\right)\right]$

e. Entri pada baris kedua kolom ketiga sampai kolom ke-$n$sama dengan entri pada baris ke-$n-1$ kolom pertama sampai kolom ke-$n-2$, yaitu sebagai berikut:
$c_{23} = c_{24} = \cdots = c_{2n} = c_{n-1\,1} = c_{n-1\,2} = \cdots = c_{n-1\,n-2} = -a^{\frac{n}{2}+1} b^{\frac{n}{2}-2}$

f. Entri pada baris ketiga kolom pertama dan keduasama dengan entri pada baris ke-$n-2$ kolom ke-$n-1$dan ke-n, yaitu sebagai berikut:
$c_{31} = c_{32} = c_{n-2\,n-1} = c_{n-2\,n} = -\left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(a^{\frac{n}{2}+1} b^{\frac{n}{2}-2}\right) + \left(\frac{n}{2} - 2\right)\left(a^{\frac{n}{2}-1} b^{\frac{n}{2}}\right)$

g. Entri pada baris ketiga kolom ketigasama dengan entri pada baris ke-$n-2$ kolom ke-n-2, yaitu sebagai berikut:
$c_{33} = c_{n-2\,n-2} = \left(a^{\frac{n}{2}+1} b^{\frac{n}{2}-2}\right) + \left[\left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}-1}\right) + \left(\frac{n}{2} - 2\right)\left(a^{\frac{n}{2}-1} b^{\frac{n}{2}}\right)\right]$

h. Entri pada baris ketiga kolom keempat sampai kolom ke-$n$sama dengan entri pada baris ke-$n-2$ kolom pertamasampai kolom ke-$n-3$, yaitu sebagai berikut:
$$\begin{aligned} c_{34} = c_{35} = \cdots = c_{3n} = c_{n-2\,1} = c_{n-2\,2} = \cdots = c_{n-2\,n-3} \\ = \left(a^{\frac{n}{2}+1} b^{\frac{n}{2}-2} - a^{\frac{n}{2}-1} b^{\frac{n}{2}}\right) - a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}-1} \end{aligned}$$

i. Entri baris keempat kolom pertamasampai kolom ketiga sama dengan entri pada baris ke-$n-3$kolom ke-$n-2$sampai kolom ke-n, yaitu sebagai berikut:
$c_{41} = \cdots = c_{43} = c_{n-3\,n-2} = \cdots = c_{n-3\,n} = \left(\frac{n}{2} - 2\right)\left(a^{\frac{n}{2}+1} b^{\frac{n}{2}-2} a^{\frac{n}{2}-1} b^{\frac{n}{2}}\right) - a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}-1}$

j. Entri baris keempat kolom keempat sama dengan entri pada baris ke-$n-3$ kolom ke-$n-3$, yaitu sebagai berikut:
$c_{44} = c_{n-3\,n-3} = \left(\frac{n}{2} - 2\right)\left(a^{\frac{n}{2}+1} b^{\frac{n}{2}-2}\right) + \left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}-1}\right) + \left(a^{\frac{n}{2}-1} b^{\frac{n}{2}}\right)$

k. Entri baris keempat kolom kelima sampai kolom ke-$n$sama dengan entri pada baris ke-$n-3$ kolom pertama sampai kolom ke-$n-4$, yaitu sebagai berikut:
$$\begin{aligned} c_{45} = c_{46} = \cdots = c_{4n} = c_{n-3\,1} = c_{n-3\,2} = \cdots = c_{n-3\,n-4} \\ = -2\left(a^{\frac{n}{2}+1} b^{\frac{n}{2}-2}\right) + \left(a^{\frac{n}{2}-1} b^{\frac{n}{2}}\right) \end{aligned}$$

Setelah memperhatikan bentuk-bentuk dari kofaktor matriks taknegatif orde genap, maka akan dikelompokkan menjadi baris genap dan baris ganjil. Untuk menentukan matriks kofaktor pada ukuran matriks yang besar, maka akan diberikan bentuk umum dari matriks kofaktor $n \times n$ dengan orde n genap sebagai berikut:

M_n suatu matriks tak negatif berorde genap dengan $n \geq 2$ untuk $\forall a, b \in \mathbb{R}$ dan $a, b > 0$ maka matriks kofaktor dari matriks tak negatif M_n adalah

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$C_n = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & \cdots & c_{1\,n-3} & c_{1\,n-2} & c_{1\,n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & \cdots & c_{2\,n-3} & c_{2\,n-2} & c_{2\,n-1} & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & \cdots & c_{3\,n-3} & c_{3\,n-2} & c_{3\,n-1} & c_{3n} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & \cdots & c_{4\,n-3} & c_{4\,n-2} & c_{4\,n-1} & c_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-3\,1} & c_{n-3\,2} & c_{n-3\,3} & c_{n-3\,4} & \cdots & c_{n-3\,n-3} & c_{n-3\,n-2} & c_{n-3\,n-1} & c_{n-3\,n} \\ c_{n-2\,1} & c_{n-2\,2} & c_{n-2\,3} & c_{n-2\,4} & \cdots & c_{n-2\,n-3} & c_{n-2\,n-2} & c_{n-2\,n-1} & c_{n-2\,n} \\ c_{n-1\,1} & c_{n-1\,2} & c_{n-1\,3} & c_{n-1\,4} & \cdots & c_{n-1\,n-3} & c_{n-1\,n-2} & c_{n-1\,n-1} & c_{n-1\,n} \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & c_{n4} & \cdots & c_{n\,n-3} & c_{n\,n-2} & c_{n\,n-1} & c_{nn} \end{bmatrix}$$

dengan

a. Untuk baris ganjil

$$c_{ij} = \begin{cases} -\left(\frac{n-(i-1)}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}+1}b^{\frac{n}{2}-2}\right) + \left(\frac{n-(i+1)}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}-1}b^{\frac{n}{2}}\right) & untuk\ i > j \\ \left(\frac{i-1}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}+1}b^{\frac{n}{2}-2}\right) + \left(\frac{n-2}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}-1}\right) + \left(\frac{n-(i+1)}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}-1}b^{\frac{n}{2}}\right) & untuk\ i = j \\ \left(\frac{i-1}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}+1}b^{\frac{n}{2}-2} - a^{\frac{n}{2}-1}b^{\frac{n}{2}}\right) - \left(a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}-1}\right) & untuk\ i < j \end{cases} \quad (4)$$

b. Untuk baris genap

$$c_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{n-i}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}+1}b^{\frac{n}{2}-2} - a^{\frac{n}{2}-1}b^{\frac{n}{2}}\right) - \left(a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}-1}\right) & untuk\ i > j \\ \left(\frac{n-i}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}+1}b^{\frac{n}{2}-2}\right) + \left(\frac{n-2}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}-1}\right) + \left(\frac{i-2}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}-1}b^{\frac{n}{2}}\right) & untuk\ i = j \\ -\left(\frac{i}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}+1}b^{\frac{n}{2}-2}\right) + \left(\frac{i-2}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}-1}b^{\frac{n}{2}}\right) & untuk\ i < j \end{cases} \quad (5)$$

Setelah diperoleh matriks kofaktor dari matriks tak negatif orde $n \times n$ untuk n genap, maka langkah selanjutnya adalah merumuskan bentuk umum matriks kofaktor dari matriks tak negatif orde $n \times n$ untuk n ganjil. Adapun langkahnya sama dengan langkah pada matriks kofaktor dari matriks tak negatif orde $n \times n$ untuk n genap, yaitu:

a. Entri pada baris pertama kolom pertama, yaitu sebagai berikut:

$$c_{11} = -\left[\left(\frac{n-3}{2}\right)(ab)^{\frac{n-1}{2}} + \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right)\right]$$

b. Entri pada baris pertama kolom kedua sampai kolom ke-n, yaitu sebagai berikut:

$$c_{12} = c_{13} = \cdots = c_{1n} = (ab)^{\frac{n-1}{2}}$$

c. Entri pada baris kedua kolom pertama, yaitu sebagai berikut:

$$c_{21} = -\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right) + \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right)$$

d. Entri pada baris kedua kolom kedua, yaitu sebagai berikut:

$$c_{22} = -\left[\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}+1}b^{\frac{n-3}{2}}\right) + \left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)^{\frac{n-1}{2}}\right]$$

e. Entri pada baris kedua kolom ketiga sampai kolom ke-n, yaitu sebagai berikut:

$$c_{23} = c_{24} = \cdots = c_{2n} = a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}$$

f. Entri pada baris ketiga kolom pertama dan kolom kedua, yaitu sebagai berikut:

$$c_{31} = c_{32} = \left(\frac{n-3}{2}\right)\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}} - a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right) + (ab)^{\frac{n-1}{2}}$$

g. Entri pada baris ketiga kolom ketiga, yaitu sebagai berikut:

$$c_{33} = -1\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right) - \left[\left(\frac{n-3}{2}\right)(ab)^{\frac{n-1}{2}} + \left(\frac{n-3}{2}\right)\left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right)\right]$$

h. Entri pada baris ketiga kolom keempat sampai kolom ke-n, yaitu sebagai berikut:

$$c_{34} = c_{35} = \cdots = c_{3n} = 1\left(-a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}} + a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right) + (ab)^{\frac{n-1}{2}}$$

i. Entri baris keempat kolom pertama sampai kolom ketiga, yaitu sebagai berikut:

$$c_{41} = c_{42} = c_{43} = -\left(\frac{n-5}{2}\right)\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right) + \left(\frac{n-3}{2}\right)\left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right)$$

j. Entri baris keempat kolom keempat, yaitu sebagai berikut:

$$c_{44} = -\left[\left(\frac{n-5}{2}\right)\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right) + \left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)^{\frac{n-1}{2}}\right] - \left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right)$$

k. Entri baris keempat kolom kelima sampai kolom ke-n, yaitu sebagai berikut:

$$c_{45} = c_{46} = \cdots = c_{4n} = 2\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right) - \left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right)$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

l. Entri baris kelima kolom pertama sampai kolom keempat, yaitu sebagai berikut:

$$c_{51} = c_{52} = \cdots = c_{54} = \left(\frac{n-5}{2}\right)\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}} - a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right) + (ab)^{\frac{n-1}{2}}$$

m. Entri baris kelima kolom kelima, yaitu sebagai berikut:

$$c_{55} = -2\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right) - \left[\left(\frac{n-3}{2}\right)(ab)^{\frac{n-1}{2}} + \left(\frac{n-5}{2}\right)\left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right)\right]$$

n. Entri baris kelima kolom keenam sampai kolom ke-n, yaitu sebagai berikut:

$$c_{56} = c_{57} = \cdots = c_{5n} = 2\left(-a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}} + a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right) + (ab)^{\frac{n-1}{2}}$$

o. Entri baris keenam kolom pertama sampai kolom kelima, yaitu sebagai berikut:

$$c_{61} = c_{62} = \cdots = c_{65} = -\left(\frac{n-7}{2}\right)\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right) + \left(\frac{n-5}{2}\right)\left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right)$$

p. Entri baris keenam kolom keenam, yaitu sebagai berikut:

$$c_{66} = -\left[\left(\frac{n-7}{2}\right)\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right) + \left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)^{\frac{n-1}{2}}\right] - 2\left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right)$$

q. Entri baris keenam kolom ketujuh sampai kolom ke-n, yaitu sebagai berikut:

$$c_{67} = c_{68} = \cdots = c_{6n} = 3\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right) - 2\left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right)$$

r. Entri baris ketujuh kolom pertama sampai kolom keenam, yaitu sebagai berikut:

$$c_{71} = c_{72} = \cdots = c_{76} = \left(\frac{n-7}{2}\right)\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}} - a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right) + (ab)^{\frac{n-1}{2}}$$

s. Entri baris ketujuh kolom ketujuh, yaitu sebagai berikut:

$$c_{77} = -3\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right) - \left[\left(\frac{n-3}{2}\right)(ab)^{\frac{n-1}{2}} + \left(\frac{n-7}{2}\right)\left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right)\right]$$

Setelah memperhatikan bentuk-bentuk dari kofaktor matriks tak negatif orde ganjil, maka akan dikelompokkan menjadi baris ganjil dan baris genap. Untuk menentukan matriks kofaktor pada ukuran matriks yang besar, maka akan diberikan bentuk umum dari matriks kofaktor $n \times n$ dengan orde n ganjil sebagai berikut:

Andaikan M_n suatu matriks tak negatif berorde ganjildengan$n \geq 2$ untuk $\forall a, b \in \mathbb{R}$ dan $a, b > 0$ maka matriks kofaktor dari matriks tak negatif M_n adalah

$$C_n = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1\,n-2} & c_{1\,n-1} & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2\,n-2} & c_{2\,n-1} & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3\,n-2} & c_{3\,n-1} & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-2\,1} & c_{n-2\,2} & c_{n-2\,3} & \cdots & c_{n-2\,n-2} & c_{n-2\,n-1} & c_{n-2\,n} \\ c_{n-1\,1} & c_{n-1\,2} & c_{n-1\,3} & \cdots & c_{n-1\,n-2} & c_{n-1\,n-1} & c_{n-1\,n} \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{n\,n-2} & c_{n\,n-1} & c_{nn} \end{bmatrix}$$

dengan

a. Untuk baris ganjil

$$c_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{n-i}{2}\right)\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}} - a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right) + (ab)^{\frac{n-1}{2}} & untuk\ i > j \\ -\left[\left(\frac{i-1}{2}\right)\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right) + \left(\frac{n-i}{2}\right)\left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right) + \left(\frac{n-3}{2}\right)(ab)^{\frac{n-1}{2}}\right] & untuk\ i = j \\ \left(\frac{i-1}{2}\right)\left(-\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right) + \left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right)\right) + (ab)^{\frac{n-1}{2}} & untuk\ i < j \end{cases} \quad (6)$$

b. Untuk baris genap

$$c_{ij} = \begin{cases} -\left(\frac{n-(i+1)}{2}\right)\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right) + \left(\frac{n-(i-1)}{2}\right)\left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right) & untuk\ i > j \\ -\left[\left(\frac{n-(i+1)}{2}\right)\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right) + \left(\frac{i-2}{2}\right)\left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right) + \left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)^{\frac{n-1}{2}}\right] & untuk\ i = j \\ \left(\frac{i}{2}\right)\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right) - \left(\frac{i-2}{2}\right)\left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right) & untuk\ i < j \end{cases} \quad (7)$$

Setelah memperoleh rumus umum matriks kofaktor dari matriks tak negatif M_n. Langkah selanjutnya adalah menentukan invers dari matriks tak negatif dari M_2 sampai M_8 menggunakan metode adjoin,

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

yaitu: $\left(M_n\right)^{-1} = \frac{1}{\det\left(M_n\right)} adj\left(M_n\right)$. Kemudian merumuskan bentuk umum invers dari matriks tak negatif M_n dengan mengamati pola rekursif yang terbentuk, sehingga diperoleh bentuk umum persamaan invers dari matriks tak negatif M_n dengan n genap sebagai berikut:

a. Entri pada baris pertama kolom pertama sama dengan entri pada baris ke-n kolom ke-n, yaitu sebagai berikut:

$$b_{11} = b_{nn} = -\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)(a+b)}{a\left(\left(\frac{n}{2}\right)a + \left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)}$$

b. Entri pada baris kedua kolom pertama sampai baris ke-n kolom pertama sama dengan entri pada baris pertama kolom ke-n sampai baris ke-$n-1$ kolom ke-n, yaitu sebagai berikut:

$$b_{21} = b_{31} = \cdots = b_{n1} = b_{1n} = b_{2n} = \cdots = b_{n-1\,n} = \frac{1}{\left(\left(\frac{n}{2}\right)a + \left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)}$$

c. Entri pada baris pertama kolom kedua sama dengan entri pada baris ke-n kolom ke-$n-1$, yaitu sebagai berikut:

$$b_{12} = b_{n\,n-1} = -\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)(a^2-b^2) - ab}{ab\left(\left(\frac{n}{2}\right)a + \left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)}$$

d. Entri pada baris kedua kolom kedua sama dengan entri pada baris ke-$n-1$ kolom ke-$n-1$, yaitu sebagai berikut:

$$b_{22} = b_{n-1\,n-1} = -\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)(a+b)}{b\left(\left(\frac{n}{2}\right)a + \left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)}$$

e. Entri pada baris ketiga kolom kedua sampai baris ke-n kolom kedua sama dengan entri pada baris pertama kolom ke-$n-1$sampai baris ke-$n-2$ kolom ke-$n-1$, yaitu sebagai berikut:

$$b_{32} = b_{42} = \cdots = b_{n2} = b_{1\,n-1} = b_{2\,n-1} = \cdots = b_{n-2\,n-1} = \frac{a}{b\left(\left(\frac{n}{2}\right)a + \left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)}$$

f. Entri pada baris pertama kolom ketiga dan baris kedua kolom ketiga sama dengan entri pada baris ke-n kolom ke-$n-2$ dan baris ke-$n-1$ kolom ke-$n-2$, yaitu sebagai berikut:

$$b_{13} = b_{23} = b_{n-1\,n-2} = b_{n\,n-2} = \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)a^2 - \left(\frac{n}{2}-2\right)b^2}{ab\left(\left(\frac{n}{2}\right)a + \left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)}$$

g. Entri pada baris ketiga kolom ketiga sama dengan entri pada baris ke-$n-2$ kolom $n-2$, yaitu sebagai berikut:

$$b_{33} = b_{n-2\,n-2} = -\frac{a^2 + \left(\frac{n}{2}-1\right)ab + \left(\frac{n}{2}-2\right)b^2}{ab\left(\left(\frac{n}{2}\right)a + \left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)}$$

h. Entri pada baris keempat kolom ketiga sampai baris ke-n kolom ketiga sama dengan entri pada baris pertama kolom ke-$n-2$ sampai baris ke-$n-3$ kolom ke-$n-2$, yaitu sebagai berikut:

$$b_{43} = b_{53} = \cdots = b_{n3} = b_{1\,n-2} = b_{2\,n-2} = \cdots = b_{\,n-3\,n-2} = -\frac{(a^2-b^2) - ab}{ab\left(\left(\frac{n}{2}\right)a + \left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)}$$

i. Entri pada baris pertama kolom keempat sampai baris ketiga kolom keempat sama dengan entri pada baris ke-n kolom ke-$n-3$ baris ke-$n-2$ kolom ke-$n-3$, yaitu sebagai berikut:

$$b_{14} = \cdots = b_{34} = b_{n-2\,n-3} = \cdots = b_{\,n\,n-3} = -\frac{\left(\frac{n}{2}-2\right)(a^2-b^2) - ab}{ab\left(\left(\frac{n}{2}\right)a + \left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)}$$

j. Entri pada baris keempat kolom keempat sama dengan entri pada baris ke-$n-3$ kolom ke-$n-3$, yaitu sebagai berikut:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$b_{44} = b_{\,n-3\,n-3} = -\frac{\left(\frac{n}{2}-2\right)a^2 + \left(\frac{n}{2}-1\right)ab + b^2}{ab\left(\left(\frac{n}{2}\right)a + \left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)}$$

k. Entri pada baris kelima kolom keempat sampai baris ke-n kolom keempat sama dengan entri pada baris pertama kolom ke-$n-3$ sampai baris ke-$n-4$ kolom ke-$n-3$, yaitu sebagai berikut:

$$b_{54} = b_{64} = \cdots = b_{\,n4} = b_{\,1\,n-3} = b_{\,2\,n-3} \cdots = b_{\,n-4\,n-3} - \frac{2a^2 - b^2}{ab\left(\left(\frac{n}{2}\right)a + \left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)}$$

Untuk menentukan invers dari matriks tak negatif pada ukuran yang besar, maka akan diberikan bentuk umum invers dari matriks tak negatif $n \times n$ dengan orde n genap sebagai berikut:

M_n suatu matriks tak negatif berorde genap dengan $n \geq 2$ untuk $\forall a, b \in \mathbb{R}$ dan $a, b > 0$ maka invers dari matriks tak negatif M_n adalah

$$(M_n)^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & \cdots & b_{1\,n-3} & b_{1\,n-2} & b_{1\,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & \cdots & b_{2\,n-3} & b_{2\,n-2} & b_{2\,n-1} & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & \cdots & b_{3\,n-3} & b_{3\,n-2} & b_{3\,n-1} & b_{3n} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & \cdots & b_{4\,n-3} & b_{4\,n-2} & b_{4\,n-1} & b_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-3\,1} & b_{n-3\,2} & b_{n-3\,3} & b_{n-3\,4} & \cdots & b_{n-3\,n-3} & b_{n-3\,n-2} & b_{n-3\,n-1} & b_{n-3\,n} \\ b_{n-2\,1} & b_{n-2\,2} & b_{n-2\,3} & b_{n-2\,4} & \cdots & b_{n-2\,n-3} & b_{n-2\,n-2} & b_{n-2\,n-1} & b_{n-2\,n} \\ b_{n-1\,1} & b_{n-1\,2} & b_{n-1\,3} & b_{n-1\,4} & \cdots & b_{n-1\,n-3} & b_{n-1\,n-2} & b_{n-1\,n-1} & b_{n-1\,n} \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & b_{n4} & \cdots & b_{n\,n-3} & b_{n\,n-2} & b_{n\,n-1} & b_{nn} \end{bmatrix}$$

dengan

a. Untuk kolom ganjil

$$b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{n-(j-1)}{2}\right)a^2 - \left(\frac{n-(j+1)}{2}\right)b^2}{(ab)\left(\left(\frac{n}{2}\right)a + \left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)} & untuk\ i < j \\ -\dfrac{\left(\frac{j-1}{2}\right)a^2 + \left(\frac{n-2}{2}\right)(ab) + \left(\frac{n-(j+1)}{2}\right)b^2}{(ab)\left(\left(\frac{n}{2}\right)a + \left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)} & untuk\ i = j \\ -\dfrac{\left(\frac{j-1}{2}\right)(a^2-b^2) - (ab)}{(ab)\left(\left(\frac{n}{2}\right)a + \left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)} & untuk\ i > j \end{cases} \tag{8}$$

b. Untuk kolom genap

$$b_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{\left(\frac{n-j}{2}\right)(a^2-b^2) - (ab)}{(ab)\left(\left(\frac{n}{2}\right)a + \left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)} & untuk\ i < j \\ -\dfrac{\left(\frac{n-j}{2}\right)a^2 + \left(\frac{n-2}{2}\right)(ab) + \left(\frac{j-2}{2}\right)b^2}{(ab)\left(\left(\frac{n}{2}\right)a + \left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)} & untuk\ i = j \\ \dfrac{\left(\frac{j}{2}\right)a^2 - \left(\frac{j-2}{2}\right)b^2}{(ab)\left(\left(\frac{n}{2}\right)a + \left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)} & untuk\ i > j \end{cases} \tag{9}$$

Setelah diperoleh invers matriks dari matriks tak negatif orde $n \times n$ untuk n genap, maka langkah selanjutnya adalah merumuskan bentuk umum invers matriks dari matriks tak negatif orde $n \times n$ untuk n ganjil. Adapun langkahnya sama dengan langkah pada matriks kofaktor dari matriks tak negatif orde $n \times n$ untuk n genap, yaitu:

a. Entri pada baris pertama kolom pertama, yaitu sebagai berikut:

$$b_{11} = -\frac{\left(\frac{n-3}{2}\right)a + \left(\frac{n-1}{2}\right)b}{\left(\frac{n-1}{2}\right)a(a+b)}$$

b. Entri pada baris kedua kolom pertama sampai baris ke-n kolom pertama, yaitu sebagai berikut:

$$b_{21} = b_{31} = \cdots = b_{n1} = \frac{1}{\left(\frac{n-1}{2}\right)(a+b)}$$

c. Entri pada baris pertama kolom kedua, yaitu sebagai berikut:

$$b_{12} = -\frac{\left(\frac{n-3}{2}\right)a^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)ab(a+b)}$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

d. Entri pada baris kedua kolom kedua, yaitu sebagai berikut:
$b_{22} = -\frac{\left(\frac{n-3}{2}\right)a+\left(\frac{n-1}{2}\right)b}{\left(\frac{n-1}{2}\right)b(a+b)}$

e. Entri pada baris ketiga kolom kedua sampai baris ke-n kolom kedua, yaitu sebagai berikut:
$$b_{32} = b_{42} = \cdots = b_{n2} = \frac{a}{\left(\frac{n-1}{2}\right)b(a+b)}$$

f. Entri pada baris pertama kolom ketiga dan baris kedua kolom ketiga, yaitu sebagai berikut:
$$b_{13} = b_{23} = \frac{\left(\frac{n-3}{2}\right)(a^2-b^2)+ab}{\left(\frac{n-1}{2}\right)ab(a+b)}$$

g. Entri pada baris ketiga kolom ketiga, yaitu sebagai berikut:
$$b_{33} = -\frac{a^2+\left(\frac{n-3}{2}\right)(ab+b^2)}{\left(\frac{n-1}{2}\right)ab(a+b)}$$

h. Entri pada baris keempat kolom ketiga sampai baris ke-n kolom ketiga, yaitu sebagai berikut:
$$b_{43} = b_{53} = \cdots = b_{n3} = -\frac{(a^2-b^2)-ab}{\left(\frac{n-1}{2}\right)ab(a+b)}$$

i. Entri pada baris pertama kolom keempat sampai baris ketiga kolom keempat, yaitu sebagai berikut:
$$b_{14} = b_{24} = b_{34} = -\frac{\left(\frac{n-5}{2}\right)a^2-\left(\frac{n-3}{2}\right)b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)ab(a+b)}$$

j. Entri pada baris keempat kolom keempat, yaitu sebagai berikut:
$$b_{44} = -\frac{\left(\frac{n-5}{2}\right)a^2+\left(\frac{n-1}{2}\right)ab+b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)ab(a+b)}$$

k. Entri pada baris kelima kolom keempat sampai baris ke-n kolom keempat, yaitu sebagai berikut:
$$b_{54} = b_{64} = \cdots = b_{\ n4} = \frac{2a^2-b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)ab(a+b)}$$

l. Entri pada baris pertama kolom kelima sampai baris keempat kolom kelima, yaitu sebagai berikut:
$$b_{15} = b_{25} = \cdots = b_{45} = \frac{\left(\frac{n-5}{2}\right)(a^2-b^2)+ab}{\left(\frac{n-1}{2}\right)ab(a+b)}$$

m. Entri pada baris kelima kolom kelima, yaitu sebagai berikut:
$$b_{55} = -\frac{2a^2+\left(\frac{n-3}{2}\right)ab+\left(\frac{n-5}{2}\right)b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)ab(a+b)}$$

n. Entri pada baris keenam kolom kelima sampai baris ke-n kolom kelima, yaitu sebagai berikut:
$$b_{65} = b_{75} = \cdots = b_{n5} = -\frac{2a^2-ab-2b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)ab(a+b)}$$

o. Entri pada baris pertama kolom keenam sampai baris kelima kolom keenam, yaitu sebagai berikut:
$$b_{16} = b_{26} = \cdots = b_{56} = -\frac{\left(\frac{n-7}{2}\right)a^2-\left(\frac{n-5}{2}\right)b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)ab(a+b)}$$

p. Entri pada baris keenam kolom keenam, yaitu sebagai berikut:
$$b_{66} = -\frac{\left(\frac{n-7}{2}\right)a^2+\left(\frac{n-1}{2}\right)ab+2b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)ab(a+b)}$$

q. Entri pada baris ketujuh kolom keenam sampai baris ke-n kolom keenam, yaitu sebagai berikut:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$b_{76} = b_{86} = \cdots = b_{n6} = \frac{3a^2 - 2b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right) ab(a+b)}$$

r. Entri pada baris pertama kolom ketujuh sampai baris keenam kolom ketujuh, yaitu sebagai berikut:

$$b_{17} = b_{27} = \cdots = b_{67} = \frac{\left(\frac{n-7}{2}\right)(a^2 - b^2) + ab}{\left(\frac{n-1}{2}\right) ab(a+b)}$$

s. Entri pada baris ketujuh kolom ketujuh, yaitu sebagai berikut:

$$b_{77} = -\frac{3a^2 + \left(\frac{n-3}{2}\right) ab + \left(\frac{n-7}{2}\right) b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right) ab(a+b)}$$

Untuk menentukan invers dari matriks taknegatif pada ukuran yang besar, maka akan diberikan bentuk umum invers dari matriks taknegatif $n \times n$ dengan orde $n$ganjilsebagai berikut:

Andaikan M_n suatu matriks tak negatif berorde ganjil dengan $n \geq 2$ untuk $\forall a, b \in \mathbb{R}$ dan $a, b > 0$ maka invers dari matriks tak negatif M_n adalah

$$(M_n)^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_{11}} & \boldsymbol{b_{12}} & \boldsymbol{b_{13}} & \cdots & \boldsymbol{b_{1\,n-2}} & \boldsymbol{b_{1\,n-1}} & \boldsymbol{b_{1n}} \\ \boldsymbol{b_{21}} & \boldsymbol{b_{22}} & \boldsymbol{b_{23}} & \cdots & \boldsymbol{b_{2\,n-2}} & \boldsymbol{b_{2\,n-1}} & \boldsymbol{b_{2n}} \\ \boldsymbol{b_{31}} & \boldsymbol{b_{32}} & \boldsymbol{b_{33}} & \cdots & \boldsymbol{b_{3\,n-2}} & \boldsymbol{b_{3\,n-1}} & \boldsymbol{b_{3n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{b_{n-2\,1}} & \boldsymbol{b_{n-2\,2}} & \boldsymbol{b_{n-2\,3}} & \cdots & \boldsymbol{b_{n-2\,n-2}} & \boldsymbol{b_{n-2\,n-1}} & \boldsymbol{b_{n-2\,n}} \\ \boldsymbol{b_{n-1\,1}} & \boldsymbol{b_{n-1\,2}} & \boldsymbol{b_{n-1\,3}} & \cdots & \boldsymbol{b_{n-1\,n-2}} & \boldsymbol{b_{n-1\,n-1}} & \boldsymbol{b_{n-1\,n}} \\ \boldsymbol{b_{n1}} & \boldsymbol{b_{n2}} & \boldsymbol{b_{n3}} & \cdots & \boldsymbol{b_{n\,n-2}} & \boldsymbol{b_{n\,n-1}} & \boldsymbol{b_{nn}} \end{bmatrix}$$

dengan

a. Untuk kolom ganjil

$$b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{n-j}{2}\right)(a^2-b^2)+(ab)}{\left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)(a+b)} & untuk\ i < j \\ -\dfrac{\left(\frac{j-1}{2}\right)a^2+\left(\frac{n-3}{2}\right)ab+\left(\frac{n-j}{2}\right)b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)(a+b)} & untuk\ i = j \\ -\dfrac{\left(\frac{j-1}{2}\right)(a^2-b^2)-(ab)}{\left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)(a+b)} & untuk\ i > j \end{cases} \tag{10}$$

b. Untuk kolom genap

$$b_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{\left(\frac{n-(j+1)}{2}\right)a^2-\left(\frac{n-(j-1)}{2}\right)b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)(a+b)} & untuk\ i < j \\ -\dfrac{\left(\frac{n-(j+1)}{2}\right)a^2+\left(\frac{n-1}{2}\right)ab+\left(\frac{j-2}{2}\right)b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)(a+b)} & untuk\ i = j \\ \dfrac{\left(\frac{j}{2}\right)a^2-\left(\frac{j-2}{2}\right)b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)(a+b)} & untuk\ i > j \end{cases} \tag{11}$$

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahsan yang telah dilakukan, maka hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut:

a. Matriks kofaktor dari matriks tak negative M_n dengan n genap pada Persamaan (2)

(i) Untuk baris ganjil

$$c_{ij} = \begin{cases} -\left(\dfrac{n-(i-1)}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}+1}b^{\frac{n}{2}-2}\right) + \left(\dfrac{n-(i+1)}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}-1}b^{\frac{n}{2}}\right) & untuk\ i > j \\ \left(\dfrac{i-1}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}+1}b^{\frac{n}{2}-2}\right) + \left(\dfrac{n-2}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}-1}\right) + \left(\dfrac{n-(i+1)}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}-1}b^{\frac{n}{2}}\right) & untuk\ i = j \\ \left(\dfrac{i-1}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}+1}b^{\frac{n}{2}-2} - a^{\frac{n}{2}-1}b^{\frac{n}{2}}\right) - \left(a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}-1}\right) & untuk\ i < j \end{cases}$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

(ii) Untuk baris genap

$$c_{ij}=\begin{cases}\left(\frac{n-i}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}+1}b^{\frac{n}{2}-2}-a^{\frac{n}{2}-1}b^{\frac{n}{2}}\right)-\left(a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}-1}\right) & untuk\ i>j\\ \left(\frac{n-i}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}+1}b^{\frac{n}{2}-2}\right)+\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}-1}\right)+\left(\frac{i-2}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}-1}b^{\frac{n}{2}}\right) & untuk\ i=j\\ -\left(\frac{i}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}+1}b^{\frac{n}{2}-2}\right)+\left(\frac{i-2}{2}\right)\left(a^{\frac{n}{2}-1}b^{\frac{n}{2}}\right) & untuk\ i<j\end{cases}$$

b. Matriks kofaktor dari matriks tak negatif M_n dengan n ganjil pada Persamaan (3)

(i) Untuk baris ganjil

$$c_{ij}=\begin{cases}\left(\frac{n-i}{2}\right)\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}-a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right)+(ab)^{\frac{n-1}{2}} & untuk\ i>j\\ -\left[\left(\frac{i-1}{2}\right)\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right)+\left(\frac{n-i}{2}\right)\left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right)+\left(\frac{n-3}{2}\right)(ab)^{\frac{n-1}{2}}\right] & untuk\ i=j\\ \left(\frac{i-1}{2}\right)\left(-\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right)+\left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right)\right)+(ab)^{\frac{n-1}{2}} & untuk\ i<j\end{cases}$$

(ii) Untuk baris genap

$$c_{ij}=\begin{cases}-\left(\frac{n-(i+1)}{2}\right)\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right)+\left(\frac{n-(i-1)}{2}\right)\left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right) & untuk\ i>j\\ -\left[\left(\frac{n-(i+1)}{2}\right)\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right)+\left(\frac{i-2}{2}\right)\left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right)+\left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)^{\frac{n-1}{2}}\right] & untuk\ i=j\\ \left(\frac{i}{2}\right)\left(a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-3}{2}}\right)-\left(\frac{i-2}{2}\right)\left(a^{\frac{n-3}{2}}b^{\frac{n+1}{2}}\right) & untuk\ i<j\end{cases}$$

c. Invers matriks tak negatif M_n dengan n genap pada Persamaan (2)

(i) Untuk kolom ganjil

$$b_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\left(\frac{n-(j-1)}{2}\right)a^2-\left(\frac{n-(j+1)}{2}\right)b^2}{(ab)\left(\left(\frac{n}{2}\right)a+\left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)} & untuk\ i<j\\ -\dfrac{\left(\frac{j-1}{2}\right)a^2+\left(\frac{n-2}{2}\right)(ab)+\left(\frac{n-(j+1)}{2}\right)b^2}{(ab)\left(\left(\frac{n}{2}\right)a+\left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)} & untuk\ i=j\\ -\dfrac{\left(\frac{j-1}{2}\right)(a^2-b^2)-(ab)}{(ab)\left(\left(\frac{n}{2}\right)a+\left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)} & untuk\ i>j\end{cases}$$

(ii) Untuk kolom genap

$$b_{ij}=\begin{cases}-\dfrac{\left(\frac{n-j}{2}\right)(a^2-b^2)-(ab)}{(ab)\left(\left(\frac{n}{2}\right)a+\left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)} & untuk\ i<j\\ -\dfrac{\left(\frac{n-j}{2}\right)a^2+\left(\frac{n-2}{2}\right)(ab)+\left(\frac{j-2}{2}\right)b^2}{(ab)\left(\left(\frac{n}{2}\right)a+\left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)} & untuk\ i=j\\ \dfrac{\left(\frac{j}{2}\right)a^2-\left(\frac{j-2}{2}\right)b^2}{(ab)\left(\left(\frac{n}{2}\right)a+\left(\frac{n}{2}-1\right)b\right)} & untuk\ i>j\end{cases}$$

d. Invers matriks tak negatif M_n dengan n ganjil pada Persamaan (3)

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

(i) Untuk kolom ganjil

$$b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{n-j}{2}\right)(a^2-b^2)+(ab)}{\left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)(a+b)} & untuk\ i < j \\ -\dfrac{\left(\frac{j-1}{2}\right)a^2+\left(\frac{n-3}{2}\right)ab+\left(\frac{n-j}{2}\right)b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)(a+b)} & untuk\ i = j \\ -\dfrac{\left(\frac{j-1}{2}\right)(a^2-b^2)-(ab)}{\left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)(a+b)} & untuk\ i > j \end{cases}$$

(ii) Untukkolom genap

$$b_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{\left(\frac{n-(j+1)}{2}\right)a^2-\left(\frac{n-(j-1)}{2}\right)b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)(a+b)} & untuk\ i < j \\ -\dfrac{\left(\frac{n-(j+1)}{2}\right)a^2+\left(\frac{n-1}{2}\right)ab+\left(\frac{j-2}{2}\right)b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)(a+b)} & untuk\ i = j \\ \dfrac{\left(\frac{j}{2}\right)a^2-\left(\frac{j-2}{2}\right)b^2}{\left(\frac{n-1}{2}\right)(ab)(a+b)} & untuk\ i > j \end{cases}$$

Daftar Pustaka

[1] Anton, Howard dan Rorres, Chris. *"Dasar-Dasar Aljabar Linear Versi Aplikasi"*. Edisi kedelapan. Erlangga, Jakarta. 2004.
[2] Aryani, Fitri dan Marzuki, Corry Corazon. "Inverse of Tridiagonal Toeplitz Matrix By Adjoint Method". *International Conference on Science and Thecnology for Sustainability*. Vol. 02, halaman 89-96. 2016.
[3] Budhi, Wono Setya. "*Aljabar Linear"*. PT. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta. 1995.
[4] Cullen, Charles G. *"Aljabar Linear Dengan Penerapannya"*. PT. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta. 1992.
[5] JR, Frank A. *"Matriks Versi SI Metrik"*. Erlangga, Jakarta. 1974.
[6] Leon, Steven J. *"Aljabar Linear dan Aplikasinya"*. Edisi kelima. Erlangga, Jakarta. 2001.
[7] Oktavia, Nanda. "Determinan Matriks Tak Negatif Menggunakan Ekspansi Kofaktor". *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim*. 2016.
[8] Sibarani, Maslen. *"Aljabar Linear"*. PT. Raja Grafindo Persada, Jakarta. 2013.
[9] Siregar, Bakti, dkk. "Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin".*Saintia Matematika*. Vol. 02, halaman 85-94. 2014.