Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 11 *ISSN (Printed) : 2579-7271*
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau *ISSN (Online) : 2579-5406*
Pekanbaru,12 November 2019

Menyelesaikan Sistem Kongruensi Linear Menggunakan Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Ade Novia Rahma[1], Repi Trisna Winti[2] , Rahmawati [3]
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru
Jl. HR. Soebrantas Km.15 Panam, Pekanbaru
e-mail: ade.novia.rahma@uin-suska.ac.id,repitrisnawinti@gmail.com, rahmawati.@uin-suska.ac.id

Abstrak

Sistem kongruensi linear dapat diselesaikan dengan dua metode yaitu metode eliminasi-substitusi dan invers matriks. Pada tulisan ini masalah yang dibahas adalah sistem kongruensi linear memiliki tepat satu solusi yang melibatkan beberapa variabel dengan modulo yang sama. Persoalan dibatasi pada penyelesaian sistem kongruensi linear 4 kongruensi 4 variabel menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan tahap demi tahap yang dapat digunakan untuk mereduksi matriks menjadi bentuk eselon baris tereduksi, sehingga diperoleh solusi dari penyelesaian sistem kongruensi linear. Kemudian, untuk menyelesaikan sistem kongruensi linear adalah dimana pembagian selalu dapat diganti dengan perkalian dengan invers $dulo\ m$. Dengan catatan setiap operasi perkalian, penjumlahan dan pengurangan yang dilakukan terhadap $modulo\ m$. Hasil yang diperoleh adalah mendapatkan bentuk umum dari nilai sistem kongruensi linear 4 kongruensi 4 variabel

Kata kunci: *Eselon baris tereduksi, invers modulo m, metode eliminasi Gauss-Jordan, mereduksi matriks, sistem kongruensi linear.*

Abstract

Linear congruence system can be solved by two methods, the method of elimination-substitution and matrix inversion. In this paper the problem discussed is a linear congruence system having exactly one solution involving several variables with the same modulo. The problem is limited to the completion of linear congruence system 4 congruence of 4 variables using the step-by-step Gauss-Jordan elimination methods that can be used to reduce the matrix to reduced row echelon form, so that a solutions is obtained from the linear congruence solution. Then, to solve the linear congruence system is where the division can always be replaced by multiplication with inverse modulo m. With a note of each multiplication operation, addition and subtraction performed on the module m. The results obtained are getting a general from of the value of the linear congruence system 4 congruence 4 variable.

Keywords: *Reduced echelon row, inverse modulo m, Gauss-Jordan elimination method, reduce matrix, linear congruence system.*

1. Pendahuluan

Salah satu materi dalam teori bilangan adalah kongruensi linear yang serupa dengan persamaan linear, tetapi kongruensi linear melibatkan beberapa koefisien dan variabel dengan bilangan modulo. Kongruensi linear adalah suatu kekongruenan yang variabelnya berpangkat paling tinggi satu. Konsep dan notasi dari teori kongruensi awalnya diperkenalkan dan dikembangkan oleh Carl Fredrich Gauss, seorang matematikawan dan fisikawan besar.

Menurut Ani Afidatul Khusnah [3], telah menyelesaikan kongruensi linear simultan dengan menerapkan teorema sisa China untuk mendapatkan selesaian tunggal. Kongruensi linear dalam sistem yang simultan dapat ditentukan jika $(P_i, P_j) = 1$, untuk $i \neq j$. Maka kongruensi simultan mempunyai selesaian yang tunggal sebagai berikut:

$$x \equiv \sum_{i=1}^{r} \frac{P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} P_3^{\alpha_3} \dots P_r^{\alpha_r}}{P_i} b_i a_i (mod\left[P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} P_3^{\alpha_3} \dots P_r^{\alpha_r}\right]).$$

Selain itu, Madinatuz Zuhroh [7], telah melakukan penelitian mengenai menyelesaikan kongruensi linear simultan satu variabel. Sistem kongruensi linear simultan dalam penggunaannya dapat diselesaikan secara rekursif dan teorema sisa china. Menyelesaikan sistem kongruensi linear simultan dengan cara rekursif, secara bertahap kongruensi linear pertama dan kedua diselesaikan terlebih dahulu sehingga diperoleh selesaian dari dua kongruensi tersebut. Demikian seterusnya sehingga pada tahapan tertentu dapat diperoleh suatu selesaian, dan dari selesaian

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

yang diperoleh dapat diproses mundur sehingga diperoleh selesaian dari kongruensi linear simultan secara rekursif yaitu:

$$x = \frac{(n_1 n_2 n_3, \ldots, n_r)y + \sum_{i=1}^{r} \frac{n_1 n_2 n_3, \ldots, n_r}{n_i} a_i}{\sum_{i=1}^{r} \frac{n_1 n_2 n_3, \ldots, n_r}{n_i}}.$$

Sedangkan menyelesaikan sistem kongruensi linear simultan dengan cara teorema sisa china, yaitu mencari FPB dari masing-masing kongruensi linear. Jika banyaknya kongruensi linear dalam sistem yang simultan lebih dari dua, maka penyelesaian dapat dilakukan untuk semua pasangan kongruensi. Demikian pula dapat ditentukan, jika $(n_1, n_2) = 1$, maka sistem kongruensi linear simultan dapat diselesaikan. sehingga selesaian dari kongruensi linear simultan dengan teorema sisa china yaitu:

$$x \equiv \sum_{i=1}^{r} \frac{n_1 n_2 n_3, \ldots, n_r}{n_i} a_i b_i (mod[\, n_1 n_2 n_3, \ldots, n_r]).$$

Dari kedua cara tersebut, teorema sisa china adalah cara yang lebih efisien dalam menyelesaikan kongruensi linear simultan dari pada cara rekursif.

Tujuan penelitian ini adalah menyelesaikan sistem kongruensi linear dengan metode eliminasi Gauss-Jordan menggunakan 4 kongruensi 4 variabel. Dengan menggunakan notasi matriks, sistem kongruensi ini dapat dinyatakan sebagai kongruensi matriks $AX \equiv B(mod\ m)$, yaitu:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} (mod\ m)$$

maka dari kongruensi matriks diatas dapat dicari solusinya menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan yaitu menggabungkan $[A|B](mod\ m)$.

2. Metode Penelitian

Definisi 1: Jika m sebuah bilangan bulat positif, maka dikatakan a kongruen b modulo m ditulis $a \equiv b(mod\ m)$ bila m membagi $(a - b)$. Jika m tidak membagi $(a - b)$ maka dikatakan bahwa a tidak kongruen dengan b modulo m ditulis $a \not\equiv b(mod\ m)$.

Definisi 2: Jika suatu kekongruenan variabelnya berpangkat paling tinggi satu disebut kongruensi linear. Bentuk umum kongruensi linear adalah:
$ax \equiv b\ (mod\ m)$, dengan $a \not\equiv 0(mod\ m)$ dan $m > 0$.

Teorema 1: Jika $(a, m) \nmid b$ maka kongruensi linear $ax \equiv b\ (mod\ m)$ tidak memiliki solusi.

Teorema 2: Jika $(a, m) = 1$, maka kongruensi linear $ax \equiv b(mod\ m)$ memiliki tepat satu solusi.

Teorema 3: Jika $(a, m) = d$ dan $d \mid b$ maka kongruensi linear $ax \equiv b\ (mod\ m)$ memiliki tepat d solusi.

Teorema 4: Misalkan m suatu bilangan asli dan $(\Delta, m) = 1$ dengan $\Delta = ad - bc$, maka sistem kongruensi linear

$$ax + by \equiv e\ (mod\ m)$$
$$cx + dy \equiv f\ (mod\ m)$$

Mempunyai penyelesaian (x, y) dengan

$$x \equiv \Delta^{-1}\,(de - bf)\ (mod\ m)$$
$$y \equiv \Delta^{-1}\,(af - ce)\ (mod\ m)$$

Dengan Δ^{-1} adalah invers dari Δ modulo m.

Eliminasi Gauss-Jordan [1] [2] Metode ini diberi nama Gauss-Jordan untuk menghormati Carl Friedrich Gauss dan Wilhelm Jordan. Metode ini sebenarnya adalah modifikasi dari metode eliminasi Gauss, yang dijelaskan oleh Jordan di tahun 1887. Sistem persamaan linear dapat dinyatakan sebagai perkalian matriks yaitu $AX = B$ di mana A disebut matriks koefisien berordo $m \times n$, X disebut matriks berordo $n \times 1$, dan B disebut matriks suku konstan berordo $m \times 1$, dan masing-masingnya adalah:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{dan } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan linear dapat diubah menjadi matriks lengkap atau matriks yang diperluas (*augmented matrix*), secara umum matriks lengkap sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

pada matriks diatas bahwa matriks koefisien (A) diperluas dengan menambahkan satu kolom yang berisikan matriks suku konstan (B). Berikut diberikan ciri-ciri matriks lengkap yang sederhana (yang penyelesaiannya mudah didapatkan). Ciri-ciri ini hanya dilihat dari entri yang merupakan matriks koefisien, dan dilihat dari kiri ke kanan.

1. Pada setiap baris, entri tak-nol yang pertama adalah satu. Dan satu ini disebut satu utama.
2. Jika terdapat baris nol, maka baris tersebut diletakkan pada baris yang terbawah.
3. Pada dua baris yang berurutan letak satu utama pada baris yang lebih bawah terletak lebih ke kanan.
4. Pada setiap kolom jika terdapat satu utama, entri-entri yang lain adalah nol.

3. Hasil dan Pembahasan

Berikut proses dalam menyelesaiakan sistem kongruen 4 kongruen dengan 4 Variael disajikan sebagai berikut.

1. Diketahui sistem 4 kongruensi dengan 4 variabel sebagai berikut :

$$a_1\, w + b_1\, x + c_1\, y + d_1 z \equiv e_1 (mod\ m)$$
$$a_2 w + b_2 x + c_2\, y + d_2 z \equiv e_2 (mod\ m)$$
$$a_3 w + b_3 x + c_3 y + d_3 z \equiv e_3 (mod\ m)$$
$$a_4 w + b_4 x + c_4 y + d_4 z \equiv e_4 (mod\ m)$$

2. Sistem kongruensi linear pada langkah pertama dapat direpresentasikan ke bentuk matriks tunggal $AX \equiv B (mod\ m)$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_1 w & + & b_1 x & + & c_1 y & + & d_1 z \\ a_2 w & + & b_2 x & + & c_2 y & + & d_2 z \\ a_3 w & + & b_3 x & + & c_3 y & + & d_3 z \\ a_4 w & + & b_4 x & + & c_4 y & + & d_4 z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} (mod\ m)$$

3. Dibentuk matriks yang diperbesar untuk sistem kongruensi linear ke bentuk metode eliminasi Gauss-Jordan dengan menggabungkan B ke A sebagai kolom terakhir yaitu $[A|B](mod\ m)$, sehingga bentuk matriksnya adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} (mod\ m)$$

maka dari kongruensi matriks di atas dapat dicari variabel-variabelnya menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan yaitu menggabungkan $[A|B](mod\ m)$. Operasi baris yang diterapkan pada matriks yang diperbesar sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_1(mod\ m) & b_1(mod\ m) & c_1(mod\ m) & d_1(mod\ m) & e_1(mod\ m) \\ a_2(mod\ m) & b_2(mod\ m) & c_2(mod\ m) & d_2(mod\ m) & e_2(mod\ m) \\ a_3(mod\ m) & b_3(mod\ m) & c_3(mod\ m) & d_3(mod\ m) & e_3(mod\ m) \\ a_4(mod\ m) & b_4(mod\ m) & c_4(mod\ m) & d_4(mod\ m) & e_4(mod\ m) \end{array}\right]$$

Kalikan $(a_1)^{-1}(mod\ m)$ dengan baris pertama, maka diperoleh:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & b_1 a_1^{-1}(mod\ m) & c_1 a_1^{-1}(mod\ m) & d_1 a_1^{-1}(mod\ m) & e_1 a_1^{-1}(mod\ m) \\ a_2(mod\ m) & b_2(mod\ m) & c_2(mod\ m) & d_2(mod\ m) & e_2(mod\ m) \\ a_3(mod\ m) & b_3(mod\ m) & c_3(mod\ m) & d_3(mod\ m) & e_3(mod\ m) \\ a_4(mod\ m) & b_4(mod\ m) & c_4(mod\ m) & d_4(mod\ m) & e_4(mod\ m) \end{array}\right]$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Selanjutnya dengan cara mela tahap demi tahap operasi baris elementer untuk mereduksi matriks menjadi bentuk eselon baris tereduksi,

4. Selanjutnya dengan melakukan tahap demi tahap operasi baris elementer untuk mereduksi matriks menjadi bentuk eselon baris tereduksi, dimana pembagian selalu dapat diganti dengan perkalian dengan invers $dulo\ m$. Kemudian dari uraian operasi tersebut, maka diperoleh solusi sistem kongruensi linear yaitu w, x, y dan z terhadap $modulo\ m$.
Catatan setiap operasi perkalian dan penjumlahan yang dilakukan terhadap $modulo\ m$.

Contoh 1 Carilah penyelesaian dari sistem kongruensi linear berikut ini!

$$3w + x + 2y + 2z \equiv 4\ (mod\ 5)$$
$$w + 2x + 3y + z \equiv 4\ (mod\ 5)$$
$$2w + x + 3y + z \equiv 5\ (mod\ 5)$$
$$3w + 2x + y + 2z \equiv 2\ (mod\ 5)$$

Penyelesaian:

Diketahui

$a_1 = 3$ $b_1 = 1$ $c_1 = 2$ $d_1 = 2$ $e_1 = 4$

$a_2 = 1$ $b_2 = 2$ $c_2 = 3$ $d_2 = 1$ $e_2 = 4$

$a_3 = 2$ $b_3 = 1$ $c_3 = 3$ $d_3 = 1$ $e_3 = 5$

$a_4 = 3$ $b_4 = 2$ $c_4 = 1$ $d_4 = 2$ $e_4 = 2$

Untuk mencari nilai w diperoleh:
$w \equiv (2) * (4)^{-1}(mod\ 5)$
Berdasarkan Teorema [4] untuk mencari nilai $(4)^{-1}(mod\ 5)$ dapat ditulis dengan $4x \equiv 1(mod\ 5)$ sehingga diperoleh:
$4x \equiv 6\ (mod\ 5)$
$2x \equiv 3\ (mod\ 5)$
$2x \equiv 8\ (mod\ 5)$
$x \equiv 4\ (mod\ 5)$
Jadi, nilai $(4)^{-1}(mod\ 5)$ adalah 4 maka diperoleh:
$w \equiv (2)4(mod\ 5)$
$w \equiv 8(mod\ 5)$
$w \equiv 3(mod\ 5)$
Untuk mencari nilai x diperoleh:
$x \equiv (3) * (4)^{-1}(mod\ 5)$
Berdasarkan Teorema [4] untuk mencari nilai $(4)^{-1}(mod\ 5)$ dapat ditulis dengan $4x \equiv 1(mod\ 5)$ sehingga diperoleh:
$4x \equiv 6\ (mod\ 5)$
$2x \equiv 3\ (mod\ 5)$
$2x \equiv 8\ (mod\ 5)$
$x \equiv 4\ (mod\ 5)$
Jadi, nilai $(4)^{-1}(mod\ 5)$ adalah 4 maka diperoleh:
$x \equiv (3)4(mod\ 5)$
$x \equiv 12(mod\ 5)$
$x \equiv 2(mod\ 5)$
Untuk mencari nilai y diperoleh:
$y \equiv (1) * (4)^{-1}(mod\ 5)$
Berdasarkan Teorema [4] untuk mencari nilai $(4)^{-1}(mod\ 5)$ dapat ditulis dengan $4x \equiv 1(mod\ 5)$ sehingga diperoleh:
$4x \equiv 6\ (mod\ 5)$
$2x \equiv 3\ (mod\ 5)$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$2x \equiv 8\ (mod\ 5)$
$x \equiv 4\ (mod\ 5)$
Jadi, nilai $(4)^{-1}(mod\ 5)$ adalah 4 maka diperoleh:
$y \equiv (1)4(mod\ 5)$
$y \equiv 4(mod\ 5)$
Untuk mencari nilai z diperoleh:
$z \equiv (0) * (4)^{-1}(mod\ 5)$
Berdasarkan Teorema [4] untuk mencari nilai $(4)^{-1}(mod\ 5)$ dapat ditulis dengan $4x \equiv 1(mod\ 5)$ sehingga diperoleh:

$4x \equiv 6\ (mod\ 5)$

$2x \equiv 3\ (mod\ 5)$
$2x \equiv 8\ (mod\ 5)$
$x \equiv 4\ (mod\ 5)$
Jadi, nilai $(4)^{-1}(mod\ 5)$ adalah 4 maka diperoleh:
$z \equiv 0\ (4)(mod\ 5) z \equiv 0\ (mod\ 5)$

4. Kesimpulan

Solusi penyelesaian sistem kongruensi linear w, x, y dan z yaitu $w \equiv 3\ (mod\ 5),\ x \equiv 2\ (mod\ 5),\ y \equiv 4\ (mod\ 5),$ dan $z \equiv 0\ (mod\ 5)$.

Referensi

[1] Anton, Howard dan Rorres, Crhris.*"Aljabar Linier Elementer, Edisi Kedelapan"*. Jakarta:Erlangga. 2004.
[2] Imrona, Mahmud. "*Aljabar Linier Dasar Edisi Kedua*". Jakarta:Erlangga. 2013.
[3] Khusnah, Ani Afidatul. "Penentuan Selesaian Kongruensi Polinomial". *Skripsi Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim*. Malang. 2016.
[4] Parwati, Ni Nyoman. "*Teori Bilangan*". Yogyakarta:Graha Ilmu. 2014.
[5] Sukirman. "*Pengantar Teori Bilangan*". Yogyakarta: *Hanggar Kreator*. 2006.
[6] Yuniati, Suci., Sari, Arnida. "*Teori Bilangan*". Pekanbaru:Kreasi Edukasi. 2015.
[7] Zuhroh, Madinatuz. "Menyelesaikan Kongruensi Linear Simultan Satu Variabel". S*kripsi Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim*. Malang 2011.