Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 11 *ISSN (Printed) : 2579-7271*
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau *ISSN (Online) : 2579-5406*
Pekanbaru,12 November 2019

Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Bentuk Kutta Menggunakan Rataan Harmonik

Wartono[a], Eka Putri, M. Soleh , Irma Suryani, Aprijon
Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jalan Subrantas km 16, Pekanbaru
[a]e-mail: wartono@uin-suska.ac.id

Abstrak

Metode Runge-Kutta orde empat bentuk Kutta merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu.Makalah ini membahas modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kutta berdasarkan rata-rata harmonik. Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh bahwa metode modifikasi Runge-Kutta orde empat Kutta mempunyai galat orde-6 ($O(h^6)$). Hasil dari simulasi numerik untuk beberapa kasus menunjukkan bahwa Runge-Kutta orde empat Kutta lebih baik dibandingkan dengan Runge-Kutta orde empat Kutta yang telah dimodifikasi.

Kata kunci: *Galat, metode Runge-Kutta orde empat bentukKutta, rata-rata harmonik, persamaan diferensial orde satu.*

Abstract

Fourth-order Runge-Kutta method for Kutta form is one of method that was used to solve the first order ordinary differential equations. This paper discuss a modifcation the method based on harmonics mean.. Based on result of study, we get that modified of fourth-order Runge-Kutta method for Kutta form has an error $O(h^6)$. The result of the numerical simulation several cases show that the fourt-order Runge-Kutta method is more better than its modified.

Keywords: *Error, fourth-order Runge-Kutta method for Kutta form, harmonic mean, the first order differential equations*

1. Pendahuluan

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul pada beberapa bidang ilmu pengetahuan dan sains, seperti Fisika, Kimia, Ekonomi, atau rekayasa. Ungkapan matematis yang cukup dari persoalan tersebut diberikan dalam bentuk persamaan differensial orde satu atau orde dua.[1, 2, 3, 4].

Secara umum, persamaan differensial biasa orde satu dapat ditulis dalam bentuk

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

dengan nilai awal $y(x_0) = y_0$.

Oleh karena pesamaan diferensial merupakan representasi dari persoalan-persoalan ilmu pengetahuan dan sains, maka penyelesaian persamaan differensial pada persamaan (1) dapat diselesaikan secara analitik dan penyelesaiannya dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi eksplisit. Namun, tidak semua persoalan pada persamaan (1) dapat diselesaikan secara analitik sehingga diperlukan metode numerik untuk menyelesaikan persoalan tersebut.

Salah satu metode numerik yang sering digunakan untuk menyelesaiakan persamaan diferensial biasa dengan ketelitian tinggi adalah metode Runge-Kutta orde empat. Berdasarkan pengambilan parameter bebasnya, Metode Runge-Kutta orde empat memiliki banyak bentuk diantaranya, metode Runge-Kutta orde-4 klasik dan Runge-Kutta orde-4 Kutta [5].

Secara umum metode Runge-Kutta orde empat, baik bentuk klasik maupun bentuk Kutta masing-masing ditulis

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{2}$$

dan

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \tag{3}$$

Pada saat ini, metode Runge-Kutta telah banyak mengalami modifikasi dengan tujuan untuk memperkecil galat, baik galat lokal maupun galat global. Beberapa peneliti yang telah melakukan modifikasi terhadap metode Runge-Kutta orde empat klasik diantaranya adalah sebagai berikut.

Evans [6] memodifikasi metode Runge-Kutta orde-4 klasik berdasarkan rata-rata geometri dalam bentuk

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3}\left(\sqrt{k_1k_2} + \sqrt{k_2k_3} + \sqrt{k_3k_4}\right). \quad (4)$$

Sanugi dan Evans [7] memodifikasi Runge-Kutta orde-4 klasik berdasarkan rata-rata harmonik dalam bentuk:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2h}{3}\left(\frac{k_1k_2}{k_1+k_2} + \frac{k_2k_3}{k_2+k_3} + \frac{k_3k_4}{k_3+k_4}\right). \quad (5)$$

Yacoob dan Sanugi [8], memodifikasi metode Runge-Kutta order 4 Klasik menggunakan kombinasi rataan arimetik dan harmonik yang ditulis dalam bentuk

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{6}k_2 + \frac{1}{6}k_3 + \frac{2}{3}\left(\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{k_3k_4}{k_3+k_4}\right)\right). \quad (6)$$

Pada makalah ini dibahas modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kutta pada Persamaan (3) yang memuat bentuk rataan aritmetik. Selanjutnya, bentuk aritmetik pada Persamaan (3) akan diganti dengan rataan harmonik sebagaimana yang telah dilakukan oleh Sanugi dan Evans terhadap metode Runge-Kutta orde empat klasik [7]. Uraian tersebut diberikan pada Bagian 2. Selain itu, galat global juga akan ditentukan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor Bagian 3, sedangkan implementasi modifikasi metode Runge-Kutta orde empat bentuk Kutta terhadap persoalan-persoalan diberikan pada Bagian 4. Terakhir, kesimpulan dari makalah ini diberikan pada Bagian 5.

2. Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Kutta

Untuk menentukan bentuk modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kutta, penulis mulai dengan memperhatikan kembali bentuk umum dari metode Runge-Kutta orde-4 Kutta [5]:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4). \quad (7)$$

Persamaan (7) dapat diubah dibentuk menjadi suatu persamaan lain memuat unsur rata-rata aritmatik yang diberikan oleh

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\frac{k_1+k_2}{2} + \frac{k_2+k_3}{2} + \frac{k_3+k_4}{2}\right). \quad (8)$$

Persamaan (8) merupakan persamaan Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata aritmatik. Untuk mengganti rataan aritmetik pada Persamaan (8), pertimbangkan kembali bentuk umum rata-rata harmonik yang ditulis

$$H = \frac{2k_ik_{i+1}}{k_i+k_{i+1}}, \text{ dengan } i = 1,2,3.$$

Subsitusi bentuk harmonik ke persamaan (8), dan dengan menyederhanakanya, maka Persamaan (7) dapat ditulis kembali menjadi

$$y_{i+1} = y_i + \frac{2h}{4}\left(\frac{k_1k_2}{k_1+k_2} + \frac{k_2k_3}{k_2+k_3} + \frac{k_2k_3}{k_2+k_3} + \frac{k_3k_4}{k_3+k_4}\right). \quad (9)$$

Persamaan (9) dapat disederhanakan menjadi :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(\frac{k_1k_2}{k_1+k_2} + 2\frac{k_2k_3}{k_2+k_3} + \frac{k_3k_4}{k_3+k_4}\right), \quad (10)$$

dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad (11a)$$
$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h), \quad (11b)$$
$$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h), \quad (11c)$$
$$k_4 = f(x_i + p_3h, y_i + q_{31}k_1h + q_{32}k_2h + q_{33}k_3h). \quad (11d)$$

Persamaan (10) merupakan modifikasi metode Runge-Kutta orde-4 Kutta berdasarkan rata-rata harmonik.
dengan,

$$p_1 = q_{11},$$
$$p_2 = q_{21} + q_{22},$$
$$p_3 = q_{31} + q_{32} + q_{33}.$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Nilai $q_{11}, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32}, q_{33}$ diperoleh dengan terlebih dahulu menentukan nilai k_1, k_2, k_3, dan k_4. Oleh karena itu pertimbangkan kembali ekspansi (11a) – (11d) dengan menggunakan deret Taylor dalam bentuk

$$k_1 = f, \tag{12a}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f(y_i + q_{11}k_1) \\ &= f + hq_{11}ff_y + {h^2}/{2}\, q_{11}^2 f^2 f_{yy} + {h^3}/{6}\, q_{11}^3 f^3 f_{yyy} + \cdots, \end{aligned} \tag{12b}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f(y_i + q_{21}k_1 + q_{22}k_2) \\ &= f + h(q_{21}+q_{22})ff_y + h^2\left(q_{11}q_{22}ff_y^2 + \frac{1}{2}(q_{21}+q_{22})^2 f^2 f_{yy}\right) \\ &\quad + h^3\left({1}/{2}\, q_{11}^2 q_{22} f^2 f_y f_{yy} + q_{21}(q_{21}+q_{22})q_{22} f^2 f_y f_{yy} + {1}/{6}\,(q_{21}+q_{22})^3 f^3 f_{yyy}\right) + \\ &\quad \cdots, \end{aligned} \tag{12c}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= f + h(q_{31}+q_{32}+q_{33})ff_y + h^2\Big(q_{11}q_{32}ff_y^2 + (q_{21}+q_{22})q_{33}ff_y^2 + \tfrac{1}{2}(q_{31}+q_{32}+ \\ &\quad q_{33})^2 f^2 f_{yy}\Big) + h^3\left({1}/{2}\, q_{11}^2 q_{32}(q_{31}+q_{32}+q_{33})f^2 f_y f_{yy} + q_{33}\, {(q_{21}+q_{22})^2}/{2}\, f^2 f_y f_{yy}\right. \\ &\quad + (q_{31}+q_{32}+q_{33})\big(q_{11}q_{32} + q_{33}(q_{21}+q_{22})\big) f^2 f_y f_{yy} + q_{33}q_{22}q_{11} ff_y^3 \\ &\quad \left. + {1}/{6}\,(q_{31}+q_{32}+q_{33})^3 f^3 f_{yyy}\right) \ldots . \end{aligned} \tag{12d}$$

Selanjutnya untuk menghindari adanya pembagian dua polinomial, polinomial pada (10) diubah dalam bentuk

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\text{pembilang}}{\text{penyebut}}. \tag{13}$$

Oleh karena $y_{i+1} = y_i$ + T, maka (13) dapat dibentuk menjadi

$$y_i + \frac{\text{pembilang}}{\text{penyebut}} = y_i + T,$$

atau

$$\text{pembilang} = T \times \text{penyebut} \tag{14}$$

dengan

$$\begin{aligned} \text{pembilang} &= h/2\{(k_1k_2)(k_2+k_3)(k_3+k_4) + 2(k_2k_3)(k_1+k_2)(k_3+k_4) \\ &\quad + (k_3k_4)(k_1+k_2)(k_2+k_3)\} \\ \text{penyebut} &= (k_1+k_2)(k_2+k_3)(k_3+k_4) \end{aligned}$$

Substitusikan nilai k_1, k_2, k_3, dan k_4 yang telah diperoleh pada persamaan (12a) – (12d) ke persamaan (14) dengan memperhatikan h^n dengan $n \le 4$ dan dengan memilih $q_{21} + q_{22} = 2/3$ dan $q_{31} + q_{32} + q_{33} = 1$ diperoleh

$$h^2 f^4 f_y \quad : 3q_{11} = 1 \tag{15a}$$

$$h^3 f^5 f_{yy} \quad : {3}/{2}\, q_{11}^2 = {1}/{6}\,, \tag{15b}$$

$$h^3 f^4 f_y^2 \quad : {23}/{6}\, q_{11} + {3}/{2}\, q_{11}^2 + 3q_{22}q_{11} + q_{32}q_{11} + {2}/{3}\, q_{33} = 3, \tag{15c}$$

$$h^4 f^6 f_{yyy} \quad : {1}/{2}\, q_{11}^3 = {1}/{54}, \tag{15d}$$

$$\begin{aligned} h^4 f^5 f_y f_{yy} \quad &: {3}/{2}\, q_{11}^3 + {23}/{12}\, q_{11}^2 + {61}/{36}\, q_{11} + {3}/{2}\, q_{11}^2 q_{22} + \\ &\quad + 2q_{11}q_{22} + {1}/{2}\, q_{11}^2 q_{32} + q_{11}q_{32} + {8}/{9}\, q_{33} = 43/18, \end{aligned} \tag{15e}$$

$$\begin{aligned} h^4 f^4 f_y^3 \quad &: 2q_{11}^2 - {2}/{3}\, q_{11} + 8q_{11}^2 q_{22} + {1}/{3}\, q_{11}q_{32} + {5}/{2}\, q_{11}^2 q_{32} \\ &\quad + {5}/{3}\, q_{11}q_{33} + {3}/{2}\, q_{22}q_{11} + {2}/{9}\, q_{33} + q_{11}q_{22}q_{33} \; = {23}/{9}. \end{aligned} \tag{15f}$$

Penyelesaian secara serentak Persamaan (15a) – (15f) memberikan nilai-nilai para-meter sebagai berikut.

$q_{11} = {1}/{3},\; q_{21} = {1}/{18}\,(7 - \sqrt{256}),\; q_{22} = {1}/{18}\,(5 + \sqrt{256}),\; q_{31} = {1}/{3}\,(-13 + \sqrt{256}),$
$q_{32} = {1}/{6}\,(41 - 3\sqrt{256})$ dan $q_{33} = {1}/{6}\,(-9 + \sqrt{256})$.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Substitusikan semua nilai parameter yang telah diperoleh ke dalam persamaan (11a) – (11d), sehingga diperoleh metode Runge-Kutta orde-4 kutta berdasarkan rata-rata harmonik yang ditulis

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2} + 2\frac{k_2 k_3}{k_2+k_3} + \frac{k_3 k_4}{k_3+k_4}\right), \tag{16}$$

dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i), \tag{17a}$$

$$k_2 = f(x_i + h/3, y_i + h/3\, k_1), \tag{17b}$$

$$k_3 = f(x_i + 2h/3\,, y_i + \frac{h}{18}((7-\sqrt{265})k_1 + (5+\sqrt{265})k_2), \tag{17c}$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + \frac{h}{6}((-26 + 2\sqrt{265})k_1 + (41 - 3\sqrt{265})k_2 + (-9 + \sqrt{265})k_3. \tag{17d}$$

3. Galat

Pada aproksimasi polinomial di titik $n+1$ data, terdapat perbedaan atau galat terhadap nilai sesungguhnya atau nilai eksak. Nilai perbedaan tersebut dapat dicari dengan menggunakan galat pemotongan. Dengan menstubtitusikan sebuah derajat polinomial $p + 1$ kedalam rumus orde *p* dapat dibangun sebuah bentuk galat :

$$T(x,h) = Ch^{p+1}y^{(p+1)}(\varepsilon)\ . \tag{18}$$

Aplikasi algoritma dan proses perhitungan dari bentuk x_0 ke $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ dalam pengertian yang luas dapat didefinisikan sebagai metode satu langkah, yang secara umum di tulis sebagai :

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h),\ n = 0,1,2, \dots, \tag{19}$$

dengan Φ adalah fungsi naik yang terdapat unsur x_n, y_n dan menggunakan *h.* Definisikan *y*(*x*) sebagai solusi eksak untuk persamaan differensial biasa, sehingga untuk setiap *x* akan berlaku

$$T(x,h) = y(x) + h\Phi(x, y(x); h) - y(x+h)\ , \tag{20}$$

Oleh karena itu, dengan menggunakan Persamaan (20), maka galat metode Runge-Kutta orde-4 kutta berdasarkan rata-rata harmonik sebagai berikut :

$$\begin{aligned} Galat = \frac{h^5}{1458}\big(&-102 f^6 f_y f_{yyy} - 99 f^6 f_{yy}^2 + \big(-954 + 36\sqrt{265}\big) f^5 f_y^2 f_{yy} \\ &+\big(-2070 + 108\sqrt{265}\big) f^4 f_y^4\big)\ + O(h^6), \end{aligned} \tag{21}$$

4. Simulasi Numerik

Pada sub-seksi ini, contoh soal diberikan untuk membandingkan galat antara metode Runge-Kutta orde-4 Kutta yang disingkat RKK dengan modifikasi Runge-Kutta order empat Kutta berdasarkan rata-rata kontrak harmonik yang disingkat dengan RKKH, dan modifikasi metode Runge-Kutta orde 4 Kutta berdasarkan rataan kontra harmonik yang disingkat dengan RKKCH.

Perhitungan nilai-nilai galat pada setiap metode menggunakan perangkat lunak Matlab 6.5 dengan menampilkan sepuluh digit desimal.

Contoh 1. Persamaan differensial:

$$y' = \frac{1}{y},\ \ y(0) = 1,\ \ \ 0 \le x \le 1{,}25, \tag{22}$$

dan solusi eksak yang diberikan adalah $y = \sqrt{2x+1}$ dengan *n* = 10.

Persamaan (22) diselesaikan dengan menggunakan metode Runge-Kutta Kutta (RKK), metode Runge-Kutta Kutta berdasarkan rata-rata harmonik (RKKH), dan rata-rata kontra harmonik (RKKCH), dengan $h = 0{,}125000$, $x_0 = 0$ dan $y_0 = 1$. Solusi eksak dan *error* dari persamaan (22) disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1: Solusi Eksak dan *Error* dari metode Runge-Kutta Kutta, RKKH, dan RKKCH untuk Persamaan $y' = \frac{1}{y}$

i	x	y (solusi eksak)	*galat*		
			Metode RKK	Metode RKKH	Metode RKKCH
1	0,000	1,0000000000	0,000000E+00	0,0000000000	0,0000000000
2	0,125	1,1180339887	3,193602E-07	7,764224E-08	4,715722E-07
3	0,250	1,2247448714	4,148485E-07	1,015575E-07	6,114496E-07
4	0,375	1,3228756555	4,403539E-07	1,082387E-07	6,483103E-07
5	0,500	1,4142135624	4,407862E-07	1,086179E-07	6,484746E-07
6	0,625	1,5000000000	4,317287E-07	1,065609E-07	6,348393E-07
7	0,750	1,5811388301	4,192312E-07	1,035916E-07	6,162534E-07
8	0,875	1,6583123952	4,058093E-07	1,003536E-07	5,963793E-07
9	1,000	1,7320508076	3,925393E-07	9,712682E-08	5,767754E-07
10	1,125	1,8027756377	3,798719E-07	9,403172E-08	5,580886E-07

Contoh 2. Persamaan differensial :

$$y' = -y,\ y(0) = 1 \text{ dan } 0 \le x \le 1 \tag{23}$$

dan solusi eksak yang diberikan adalah e^{-x} dengan *n* =10.

Persamaan (23) diselesaikan dengan matlab 5.3 secara metode Runge-Kutta Kutta, Runge-Kutta Kutta berdasarkan rata-rata harmonik (RKKH) dan rata-rata kontra harmonik(RKKCH), dengan $h = 0{,}1$, $x_0 = 0$ dan $y_0 = 1$. Solusi eksak dan *error* dari persamaan (23) disajikan pada Tabel 2.

Tabel **2 :** Solusi Eksak dan *galat* dari metode Runge-Kutta Kutta, RKKH, dan RKKCH untuk $y' = -y$

i	x	y (solusi eksak)	*galat*		
			Metode RKK	Metode RKKH	Metode RKKCH
1	0,0	1,0000000000	0,000000E+00	0,0000000000	0,0000000000
2	0,1	0,9048374180	8,196404E-08	3,784986E-07	9,086532E-08
3	0,2	0,8187307531	1,483283E-07	6,849595E-07	1,644367E-07
4	0,3	0,7408182207	2,013195E-07	9,296657E-07	2,231827E-07
5	0,4	0,6703200460	2,428818E-07	1,121595E-06	2,692587E-07
6	0,5	0,6065306597	2,747107E-07	1,268577E-06	3,045442E-07
7	0,6	0,5488116361	2,982823E-07	1,377427E-06	3,306755E-07
8	0,7	0,4965853038	3,148798E-07	1,454073E-06	3,490755E-07
9	0,8	0,4493289641	3,256172E-07	1,503657E-06	3,609789E-07
10	0,9	0,4065696597	3,314595E-07	1,530636E-06	3,674556E-07

Contoh 3 Persamaan differensial :

$$y' = y - x^2 + 1,\ y(0) = 0{,}5 \text{ dan } 0 \le x \le 2. \tag{24}$$

dan solusi eksak yang diberikan adalah $y = (x+1)^2 - 0{,}5e^x$ dengan *n* =15.

Persamaan (24) diselesaikan dengan Matlab 5.3 secara metode Runge-Kutta Kutta, Runge-Kutta Kutta berdasarkan rata-rata harmonik (RKKH) dan rata-rata kontra

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

harmonik(RKKCH), dengan $h = 0{,}133333$, $x_0 = 0$ dan $y_0 = 0{,}5$. Solusi eksak dan *error* dari persamaan (24) disajikan dalam Tabel 3.

Tabel 3 : Solusi Eksak dan *galat* dari metode Runge-Kutta Kutta, RKKH, dan RKKCH untuk $y' = y - x^2 + 1$

i	x	y (solusi eksak)	*galat* Metode RKK	Metode RKKH	Metode RKKCH
1	0,00	0,5000000000	0,0000000000	0,0000000000	0,000000E+00
2	0,13	0,7131290385	4,057162E-07	1,029084E-05	1,238558E-05
3	0,27	0,9516418584	8,436890E-07	3,502354E-05	3,880567E-05
4	0,40	1,2140876512	1,314866E-06	7,230495E-05	7,748345E-05
5	0,53	1,4988086784	1,819810E-06	1,208166E-04	1,271927E-04
6	0,67	1,8039107573	2,358568E-06	1,795065E-04	1,869635E-04
7	0,80	2,1272295358	2,930512E-06	2,473684E-04	2,558719E-04
8	0,93	2,4662919589	3,534150E-06	3,232483E-04	3,328556E-04
9	1,07	2,8182722377	4,166887E-06	4,056425E-04	4,165210E-04
10	1,20	3,1799415386	4,824744E-06	4,924507E-04	5,049085E-04
11	1,33	3,5476104971	5,502015E-06	5,806462E-04	5,951779E-04
12	1,47	3,9170635314	6,190853E-06	6,658034E-04	6,831587E-04
13	1,60	4,2834837878	6,880783E-06	7,413851E-04	7,626707E-04
14	1,73	4,6413673811	7,558099E-06	7,976113E-04	8,244485E-04
15	1,87	4,9844254024	8,205172E-06	8,195578E-04	8,543333E-04

5. Kesimpulan

Pada makalah ini, modifikasi metode Runge-Kutta orde empat bentuk Kutta dikontruksi berdasarkan rataan harmonik dengan koefisien h^5 sebesar 1/1458. Selain itu, metode baru juga sukses di palikasi pada simulasi numerik yang menggunakan tiga buah contoh untuk menunjukkan performa metode baru tersebut. Tabel 1 memperlihatkan galat dari metode baru lebih baik dibandingkan dengan metode lainnya, sedangkan Tabel 2 dan 3 menunjukkan hal sebaliknya.

Daftar Pustaka

[1] King, A. C., Billingham, J., dan Otto, S. R., *Differential Equations: Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
[2] Ricardo, H., *A Modern Introduction to Differential Equations*, Academic Press, New Jersey, 2009.
[3] Munir, R., *Metode Numerik,* Informatika: Bandung, 2008.
[4] Mathews, J. H., *Numerical Method for Mathematics, Science, and Engineering*, Prentince-Hall International, 1992.
[5] Lapidus, L., dan Seinfeld, J. H., *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Academic Press, New York, 1971.
[6] Evans, D.J., A New 4TH Order Runge-Kutta Method for Initial Value Problems With Error Control". *International Journal Computer Mathematics,* 39, 217–227. 1991.
[7] Sanugi, B. B. dan Evans, D. J., A new fourth order runge-kutta formula based on the harmonic mean*". Internatonal Journal of Computer Mathematics,* 50, 113–118, 1994.
[8] Yacob, N., dan Sanugi, B., A new fourth-order embedded method based on the harmonic mean, *Matematika*, 14, 1 – 16, 1998.