ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Faktorisasi Graf Baru Yang Dihasilkan Dari Pemetaan Titik Graf Lintasan Pada Bilangan Bulat Positif

Corry Corazon Marzuki[1], Bella Safira[2], Fitri Aryani[3]
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: corry@uin-suska.ac.id; bsafira833@gmail.com; khodijah_fitri@uin-suska.ac.id

Abstrak

Faktor dari suatu graf merupakan subgraf merentang dari suatu graf. Faktor dari suatu graf terdiri dari himpunan pasangan titik yang tidak saling terhubung dan selalu berbentuk 1-reguler, ini dapat disebut sebagai graf yang memiliki 1*-faktor. Ketika himpunan titik dari graf lintasan P_n dipetakan pada bilangan bulat positif yang dibatasi oleh derajatnya maka akan menghasilkan graf baru P_n^*. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui ciri-ciri fungsi yang menghasilkan graf baru P_n^* yang dihasilkan dari graf P_n yang akan memiliki* 1*-faktor. Adapun langkah-langkah untuk memperoleh hasil dari penelitian ini adalah: (1) menggambarkan graf lintasan P_n, (2) menentukan kemungkinan-kemungkinan dari fungsi $f(P_n) \to \{1\}$, (3) menentukan $D(x)$, (4) menentukan $s(x)$ dan $S(x)$, (5) menentukan graf baru $P_n^* = (V^*, E^*)$, (6) faktorisasi graf baru P_n^* dengan menunjukkan himpunan pasangannya. Hasil dari penelitian ini adalah ciri-ciri fungsi yang mengakibatkan graf baru P_n^* untuk n genap yang dihasilkan dari kemungkinan fungsi $f: V(P_n) \to \{1\}$ dapat memiliki* 1*-faktor adalah fungsi dengan sebanyak n titik dipetakan ke* 1*.*

***Kata kunci**: Faktorisasi,* 1*-faktor, graf lintasan (P_n)*

Abstract

Factor of a graph is a subgraph stretching from the graph. Factor of a graph consists of a set of point pairs that are not interconnected and are always 1-reguler, called as a graph that has $1-factor$. When a set of points of path graph (P_n) mapped on a positive integerbordered by its degree, it will produce a new graph of P_n^*. The aim of this study is to determine the function's characteristics that produc a new graph of P_n^* obtained from P_n of having $1-factor$. Therefore, the steps to provide the result of the research are: (1) drawing the Path Graph P_n, (2) Determining the possibility function of $f(P_n) \to \{1\}$, (3) Determining $D(x)$, (4) Determining $s(x)$ and $S(x)$, (5) Determining a new graph $P_n^* = (V^*, E^*)$, (6) Factorizing the new graph P_n^* with showing a set mathcing. The results of this research are the function's characteristics that producing a new graph of P_n^* for n even obtained from possibility function of $f: V(P_n) \to \{1\}$ of having $1-factor$ a function of n vertices is mapped to 1*.*

***Keywords** : Faktoritation,* 1*-factor, path*

1. Pendahuluan

Graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek dinyatakan sebagai noktah, bulatan, atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis. [1]

Faktor dari graf G adalah suatu subgraf merentang dari graf G. Faktorisasi dari graf G adalah penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf G. Suatu r-reguler faktor dari graf G dapat dinyatakan sebagai r-faktor dari G. Jika permasalahan faktorisasi ini dikaitkan dengan sebuah pemetaan dari himpunan titik suatu graf pada bilangan bulat positif yang di batasi oleh derajatnya maka akan berkaitan terbentuknya graf baru yang mana graf baru tersebut tidak selalu memiliki 1-faktor.

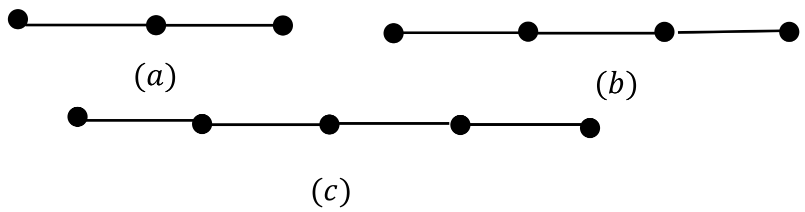
Penelitian tentang faktorisasi graf baru sebelumnya telah diteliti oleh Johan Wijaya Simangunsong dan Mulyono [11] pada tahun 2015 dalam artikelnya yang berjudul "Pelabelan Total Titik Ajaib Pada Graf Petersen yang Diperumum". Selanjutnya pada tahun 2016 Reyka Bella Despandai [5] dalam skripsinya yang berjudul "Analisis Himpunan Dominasi Lokasi Pada Model Topologi Graf Khusus dan Operasinya", Kemudian penelitian selanjutnya yaitu artikel Vera Mandailina [6] pada tahun 2009 dengan judul skripsinya "Faktorisasi Pada Graf Komplit". Pada makalah ini akan dibahas faktorisasi graf baru yang dihasilkan dari pemetaan titik graf lintasan pada bilangan bulat positif.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

2. Bahan dan Metode Penelitian

a. Definisi Graf Lintasan (Rinaldi Munir, 2007)

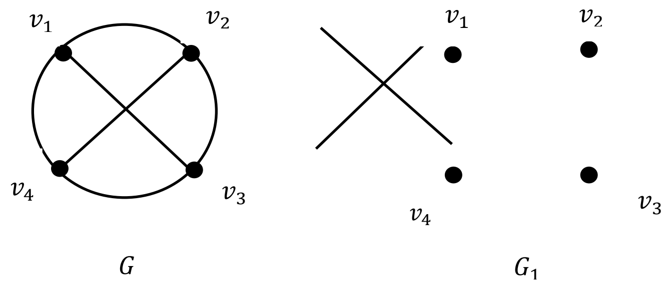
Graf Lintasan yang panjangnya n dari simpulan awal v_0 ke simpul tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan yang berselang-seling, simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \ldots, e_n = (v_{n-1}, v_n), \ldots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi dari graf G.



Gambar 1 (a) Graf Lintasan P_3; (b) Graf Lintasan P_4; (c) Graf Lintasan P_5

b. Definisi Subgraf Merentang (Chartrand dan Lesniak, 1996)

Subgraf H dari graf G yang memiliki himpunan simpul yang sama pada G atau jika subgraf H dengan $V(H) = V(G)$, maka H disebut spanning subgraf (subgraf merentang) dari G.



Gambar 2 G_1 merupakan Subgraf Merentang dari G

c. Definisi *Matching* (Bondy dan Murty, 2008)

Matching (Pasangan) pada suatu graf adalah himpunan pasangan yang tidak saling terhubung. Jika M adalah *matching,* dua atau lebih dari setiap sisi di M disebut *matching* dari M, dan setiap simpul yang terkait dengan sisi di M menjadi tertutup oleh M.

d. Definisi *Perfect Matching* (Chartrand dan Lesniak, 2008)

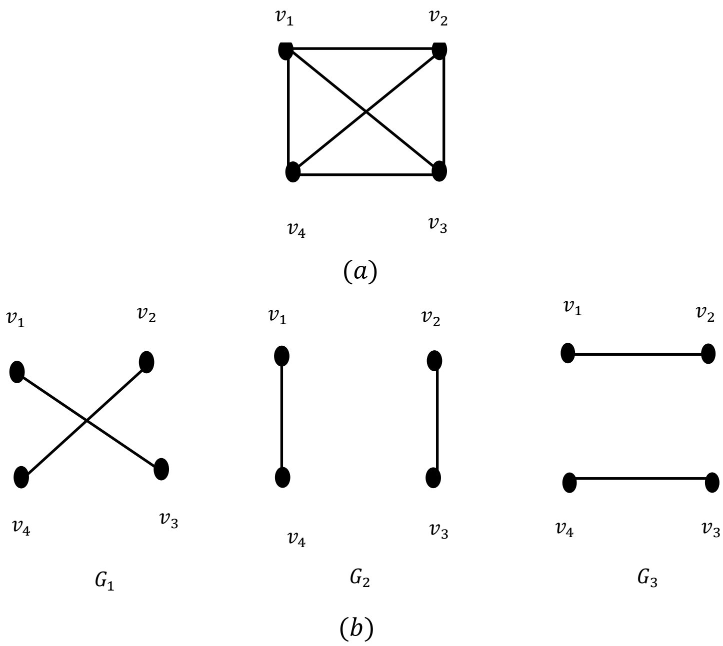
Jika M adalah pasangan pada graf G dan setiap simpul di G terkait dengan sisi di M, maka M disebut *perfect matching*.

e. Definisi Faktor (Chartrand dan Lesniak, 1996)

Faktor dari graf G adalah suatu subgraf merentang dari graf G. Jika $G_1, G_2, \ldots, G_n$ adalah faktor yang disjoint sisi pada graf G sedemikian hingga $\cup_{i=1}^{n} E(G_i) = E(G)$ dimana $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots G_n$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor $G_1, G_2, \ldots, G_n$.

f. Definisi Faktorisasi (Chartrand dan Lesniak, 1996)

Faktorisasi dari graf G adalah penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf G. Suatu r-reguler faktor dari graf G dapat dinyatakan sebagai r-faktor dari G. Oleh karena itu, suatu graf memiliki 1-faktor jika dan hanya jika mengandung suatu *perfect matching*.

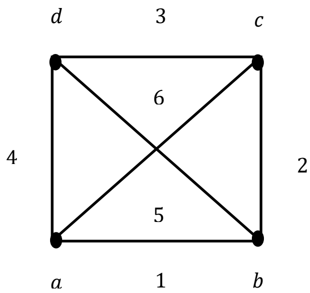


Gambar 3 (a) Graf G; (b) Graf G_1, G_2, G_3 adalah Faktor-Faktor dari graf G

Adapun langkah untuk memperoleh faktorisasi graf baru dari suatu graf adalah sebagai berikut (Faizah dan Irawan, 2014):

1. Menentukan fungsi $f: V(G) \to Z^+$ dengan ketentuan $f(x) \leq d(x) \forall x \in V(G)$ dimana $d(x)$ adalah derajat titik x.
2. Menentukan $D(x) = \{x_\alpha \mid \alpha \in EG, \alpha$ adalah sisi yang terkait dengan x ; $\forall x \in V(G)\}$.
3. Menentukan $s(x) = d(x) - f(x) \forall x \in V(G)$, kemudian menentukan $S(x) = \{x(i) \mid 1 \leq i \leq s(x)\}$.
4. Menentukan graf baru $G^* = (V^*, E^*)$ dengan V^* dan E^* didefinisikan sebagai berikut:
   a. $V^* = \{V_1^* \cup V_2^* \mid V_1^* = \cup_{x \in V(G)} D(x)$ dan $V_2^* = \cup_{x \in V(G)} S(x)\}$.
   b. $E^* = \{E_1^* \cup E_2^* \, E_1^* = x_a y_\alpha \mid \alpha = xy \in E(G)\}$ dan $E_2^* = \{uv \mid u \in D(x), v \in S(x), x \in V(G)\}$.
5. Faktorisasi graf baru $G^* = (V^*, E^*)$ dengan menunjukkan adanya himpunan pasangan sempurna.

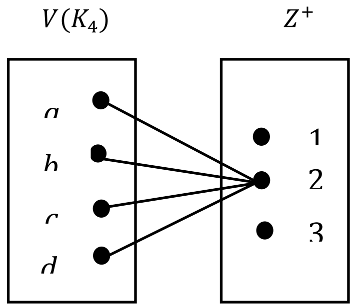
Contoh 2.3:
Diberikan graf komplit K_4



Gambar 4 Graf K_4

1. Menentukan fungsi $f: V(K_4) \to Z^+$ dengan ketentuan $f(x) \leq d(x) \forall x \in V(K_4)$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406



Gambar 5 Salah Satu Kemungkinan Fungsi $f: V(K_4) \rightarrow Z^+$

2. Menentukan $D(x) = \{x_\alpha \,|\alpha \in E(K_4), \alpha$ adalah sisi yang terkaitdengan $x;\ \forall x \in V(K_4)\}$.
   $D(a) = \{a_\alpha|\alpha \in E(K_4)$ dengan $\alpha = 1,\ \alpha = 4$ dan $\alpha = 5\}$ maka diperoleh:
   $$D(a) = \{a_1, a_4, a_5\}$$
   $D(b) = \{b_\alpha|\alpha \in E(K_4)$ dengan $\alpha = 1,\ \alpha = 2$ dan $\alpha = 6\}$ maka diperoleh:
   $$D(b) = \{b_1, b_2, b_6\}$$
   $D(c) = \{c_\alpha|\alpha \in E(K_4)$ dengan $\alpha = 2,\ \alpha = 3$ dan $\alpha = 5\}$ maka diperoleh:
   $$D(c) = \{c_2, c_3, c_5\}$$
   $D(d) = \{d_\alpha|\alpha \in E(K_4)$ dengan $\alpha = 3,\ \alpha = 4$ dan $\alpha = 6\}$ maka diperoleh:
   $$D(d) = \{d_3, d_4, d_6\}$$
3. Menentukan $s(x) = \big(d(x) - f(x)\ \forall x \in V(K_4)\big)$, kemudian menentukan $S(x) = \{x(i)|1 \leq i \leq s(x)\}$.
   $s(a) = d(a) - f(a) = 3 - 2 = 1$ maka diperoleh:
   $$S(a) = \{a(i)\,|1 \leq i \leq 1\} = \{a(1)\}$$
   $s(b) = d(b) - f(b) = 3 - 2 = 1$ maka diperoleh:
   $$S(b) = \{b(i)|1 \leq i \leq 1\} = \{b(1)\}$$
   $s(c) = d(c) - f(c) = 3 - 2 = 1$ maka diperoleh:
   $$S(c) = \{c\,(i)|1 \leq i \leq 1\} = \{c(1)\}$$
   $s(d) = d(d) - f(d) = 3 - 2 = 1$ maka diperoleh:
   $$S(d) = \{d\,(i)|1 \leq i \leq 1\} = \{d(1)\}$$
4. Kemudian, menentukan graf baru $G^* = (V^*, E^*)$.
   $$V^* = V_1^* \cup V_2^*$$
   $V_1^* = \cup_{x \in V(K_4)} D(x) = D(a) \cup D(b) \cup D(c) \cup D(d).$
   $= \{a_1, a_4, a_5, b_1, b_2, b_6, c_2, c_3, c_5, d_3, d_4, d_6\}.$
   $V_2^* = \cup_{x \in V(K_4)} S(x) = \{S(a) \cup S(b) \cup S(c) \cup S(d)\}.$
   $= \{a(1), b(1), c(1), d(1)\}.$

Sehingga untuk $V^* = V_1^* \cup V_2^*$ diperoleh : $\{a_1, a_4, a_5, b_1, b_2, b_6, c_2, c_3, c_5, d_3, d_4 d_6, a(1), b(1), c(1), d(1)\}$.
$E^* = E_1^* \cup E_2^*$.
$E_1^* = \{x_\alpha y_\alpha|\alpha = xy \,\epsilon\, E\,(K_4)\}$

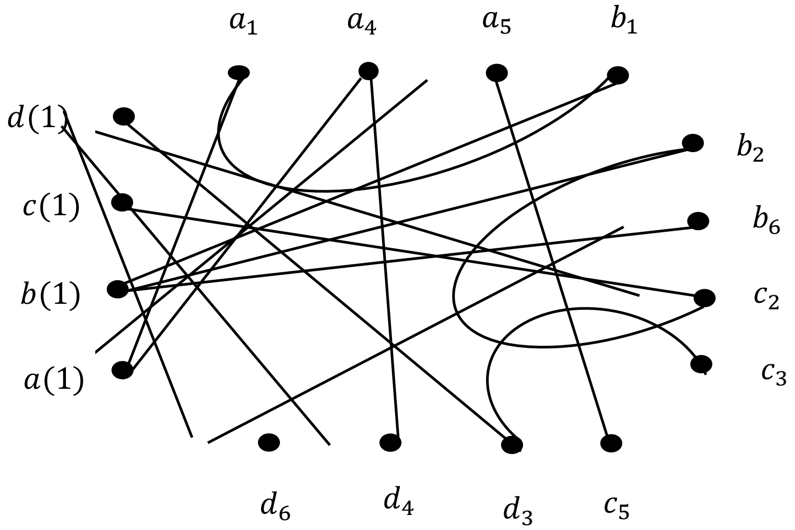
$\alpha = 1$ maka diperoleh $a_1 b_1$
$\alpha = 2$ maka diperoleh $b_2 c_2$
$\alpha = 3$ maka diperoleh $c_3 d_3$
$\alpha = 4$ maka diperoleh $d_4 a_4$
$\alpha = 5$ maka diperoleh $a_5 c_5$
$\alpha = 6$ maka diperoleh $b_6 d_6$

Jadi, $E_1^* = \{a_1b_1, b_2c_2, c_3d_3, d_4a_4, a_5c_5, b_6d_6\}$
$E_2^* = \{uv|u \in D(x), v \in S(x), x \in V(K_4)\}$
$= \{a_1a(1), a_4a(1), a_5a(1), b_1b(1), b_2b(1), b_6b(1), c_2c(1), c_3c(1),$
$d_3d(1), d_4d(1), d_6d(1)\}$

Sehingga untuk $E^* = E_1^* \cup E_2^*$ diperoleh:
$$E^* = \{a_1b_1, b_2c_2, c_3d_3, d_4a_4, a_5c_5, b_6d_6, a_1a(1), a_4a(1), a_5a(1), b_1b(1), b_2b(1), b_6b(1), c_2c(1), c_3c(1), d_3d(1), d_4d(1), d_6d(1)\}$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Jadi, graf baru $K_4^* = (V^*, E^*)$ adalah :



Gambar 6 Graf Baru K_4^*

5. Faktorisasi graf baru $K_4^* = (V^*, E^*)$ dengan menujukkan adanya himpunan pasangan sempurna, yaitu :
$$M = \{a_1b_1, a_5c_5, c_3d_3, b_6d_6, b_2b(1), c_2c(1), d_4d(1)\}.$$
Karena graf baru $K_4^* = (V^*, E^*)$ memuat pasangan sempurna maka graf baru $K_4^* = (V^*, E^*)$ memiliki 1-faktor.

2.7. Metodologi Penelitian

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah:

1. Menggambar graf lintasan (P_n) dengan n bilangan bulat positif dan $n \geq 4$.
2. Menentukan fungsi $f: V(P_n) \rightarrow \mathrm{Z}^+$ dengan ketentuan $f(x) \leq d(x)\ \forall x\ V(P_n)$, karena derajat pada graf lintasan (P_n) selalu satu maka himpunan $Z^+ = \{1\}$ sehingga fungsinya dapat ditulis $f: V(P_n) \rightarrow \{1\}$. Kemudian menuliskan kemungkinan pemetaan yang terjadi.
3. Menentukan $D(x) = \{x_\alpha\ |\alpha \in E\ (\ P_n)\ , \alpha\}$ adalah sisi yang terkait dengan $\{x;\ \forall x \in V(P_n\ )\}$.
4. Menentukan $s(x) = d(x) - f(x) \forall x \in V(P_n)$ yang didefinisikan sebagai bilangan yang dihasilkan dari selisih antara derajat titik di graf lintasan (P_n) dan bilangan bulat positif dari fungsi $f: V\ (P_n)\mathrm{Z}^+$, kemudian menentukan $S(x) = \{x(i)|1 \leq i \leq s(x)\}$ yang berupa himpunan titik dari $s(x)$.
5. Menentukan graf baru $P_n^* = (V^*, E^*)$, yang masing-masing dari V^* dan E^* didefinisikan sebagai berikut:

a. $V^* = V_1^* \cup V_2^*$ dengan $V_1^* = \cup_{x \in V(P_n)} D(x)$ dan $V_2^* = \cup_{x \in v(P_n)} S(x)$

b. $E^* = E_1^* \cup E_2^*$ dengan $E_1^* = \{x_\alpha y_\alpha | \alpha = \{xy \in E(P_n)\}$ dan $E_2^* = \{uv | u \in D(x), v \in S(x)\ , x \in V\ (P_n)\}$.

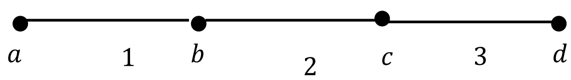
6. Faktorisasi graf baru P_n^* dengan menunjukkan adanya pasangan sempurna.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Faktorisasi Graf Baru P_4^* yang dihasilkan dari Fungsi $f: V(P_4) \rightarrow \{1\}$

Faktorisasi graf baru P_4^* yang dihasilkan dari fungsi $f: V(P_4) \rightarrow \{1\}$ adalah sebagai berikut:

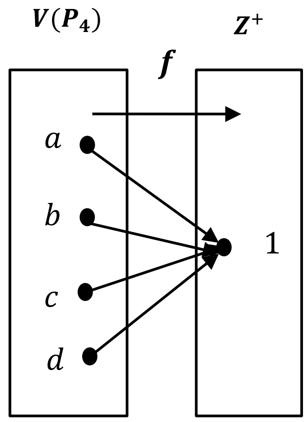
a. Menggambarkan graf lintasan baru P_4^* dengan $ab = 1, bc = 2$, dan $cd = 3$.



Gambar 7 Graf Lintasan P_4

 ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

b. Menentukan fungsi $f: V(P_4) \rightarrow \{1\}$ dengan ketentuan $f(x) \leq d(x) \forall x \in V(P_4)$



Gambar 8 Kemungkinan Fungsi $f: V(P_4) \rightarrow \{1\}$

c. Menentukan $D(x) = \{x_\alpha | \alpha \in E\ (P_4), \alpha$ adalah sisi yang terkait dengan x; $\forall x \in V(P_4)\}$.
$D(a) = \{a_\alpha | \alpha \in E\ (P_4)$ dengan $\alpha = 1\}$.
$D(a) = \{a_1\}$
$D(b) = \{b_\alpha | \alpha \in E\ (P_4)$ dengan $\alpha = 1$ dan $\alpha = 2\}$.
$D(b) = \{b_1, b_2\}$
$D(c) = \{c_\alpha | \alpha \in E\ (P_4)$ dengan $\alpha = 2$ dan $\alpha = 3\}$.
$D(c) = \{c_2, c_3\}$
$D(d) = \{d_\alpha | \alpha \in E\ (P_4)$ dengan $\alpha = 3\}$.
$D(d) = \{d_3\}$

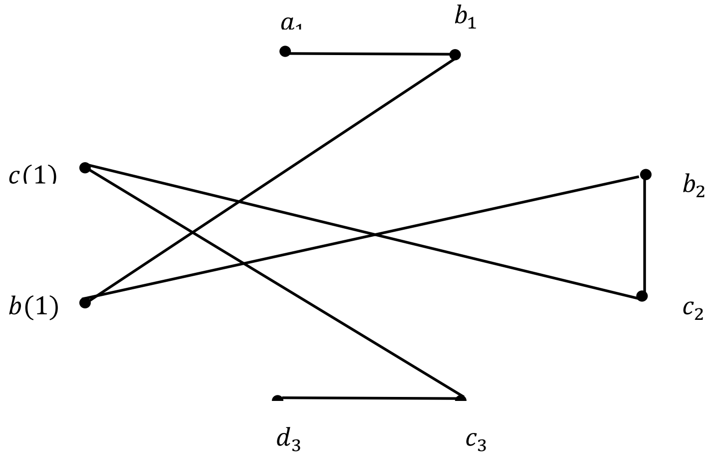
d. Menentukan $s(x) = (d(x) - f(x), \forall x \in V(P_4))$, kemudian menentukan $S(x) = \{x(i) | 1 \leq i \leq s(x)\}$.
$s(a) = d(a) - f(a) = 1 - 1 = 0$ maka diperoleh :
$S(a) = \{a(i) | 1 \leq i \leq 0\} = \{\ \}$
$s(b) = d(b) - f(b) = 2 - 1 = 1$ maka diperoleh :
$S(b) = \{b(i) | 1 \leq i \leq 1\} = \{b(1)\}$
$s(c) = d(c) - f(c) = 2 - 1 = 1$ maka diperoleh :
$S(c) = \{c(i) | 1 \leq i \leq 1\} = \{c(1)\}$
$s(d) = d(d) - f(d) = 1 - 1 = 0$ maka diperoleh :
$S(d) = \{d(i) | 1 \leq i \leq 0\} = \{\ \}$

e. Menentukan graf baru $G^* = (V^*, E^*)$
$V^* = V_1^* \cup V_2^*$
$V_1^* = \cup_{x \in v(P_4)} D(x) = \{D(a) \cup D(b) \cup D(c) \cup D(d)\}$
$= \{a_1, b_1, b_2, c_2, c_3, d_3\}$
$V_2^* = \cup_{x \in v(P_4)} S(x) = \{S(a) \cup S(b) \cup S(c) \cup S(d)\}$
$= \{b(1), c(1)\}$
Sehingga untuk $V^* = V_1^* \cup V_2^*$ diperoleh :
$V^* = \{a_1, b_1, b_2, c_2, c_3, d_3, b(1), c(1)\}$

$E^* = E_1^* \cup E_2^*$
$E_1^* = \{x_\alpha y_\alpha | \alpha = xy \in E(P_4)\}$
$\alpha = 1$ maka diperoleh $a_1 b_1$
$\alpha = 2$ maka diperoleh $b_2 c_2$
$\alpha = 3$ maka diperoleh $c_3 d_3$
Jadi, $E_1^* = \{a_1 b_1, b_2 c_2, c_3 d_3\}$
$E_2^* = \{uv | u \in D(x), v \in S(x), x \in V(P_4)\}$
$= \{b_1 b(1), b_2 b(1), c_2 c(1), c_3 c(1)\}$
Sehingga untuk $E^* = E_1^* \cup E_2^*$ diperoleh:
$E^* = \{a_1 b_1, b_2 c_2, c_2 d_3, b_1 b(1), b_2 b(1), c_2 c(1), c_3 c(1)\}$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Jadi, graf baru $P_4^* = (V^*, E^*)$ dari kemungkinan fungsi $f(a) = 1, f(b) = 1, f(c) = 1$dan $f(d) = 1$ adalah:



Gambar 9 Graf Baru P_4^*

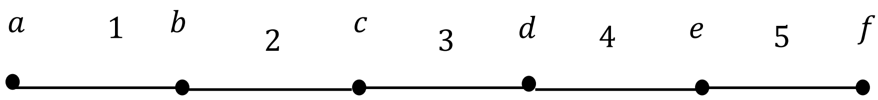
Faktorisasi graf baru $P_4^* = (V^*, E^*)$ dengan menunjukkan adanya himpunan pasangan sempurna, yaitu:

$$M = \{a_1b_1, c_2c(1), b_2b(1), c_3d_3\}$$

Karena graf baru $P_4^* = (V^*, E^*)$ memuat pasangan sempurna maka graf baru $P_4^* = (V^*, E^*)$ memiliki 1-faktor.

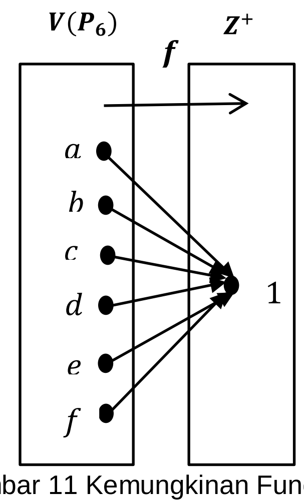
2. Faktorisasi Graf Baru P_6^* yang dihasilkan dari Fungsi $f: V(P_6) \rightarrow \{1\}$

Faktorisasi graf baru P_6^* yang dihasilkan dari fungsi $f: V(P_6) \rightarrow \{1\}$ adalah sebagai berikut: Menggambar graf lintasan P_6 dengan $ab = 1, bc = 2, cd = 3, de = 4,$ dan $ef = 5$



Gambar 10 Graf Lintasan P_6

Kemungkinan fungsi yang menghasilkan graf baru P_6^* yang memiliki 1 faktor sebagai berikut :



Gambar 11 Kemungkinan Fungsi $f: V(P_6) \rightarrow \{1\}$

3. Faktorisasi Graf Baru P_8^* yang dihasilkan dari Fungsi $f: V(P_8) \rightarrow \{1\}$

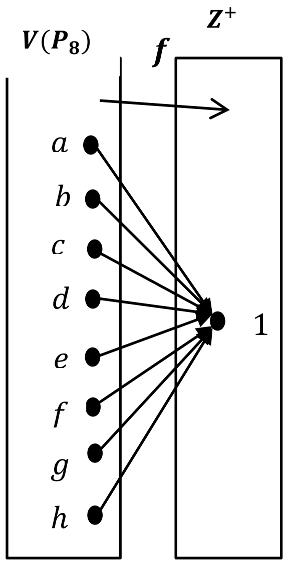
Faktorisasi graf baru P_8^* yang dihasilkan dari fungsi $f: V(P_8) \rightarrow \{1\}$ adalah sebagai berikut: Menggambar graf lintasan P_8 dengan $ab = 1, bc = 2, cd = 3, de = 4,$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$ef = 5, fg = 6$ dan $gh = 7$

Gambar 12 Graf Lintasan P_8

Kemungkinan fungsi yang menghasilkan graf baru P_8^* yang memiliki 1 faktor sebagai berikut :



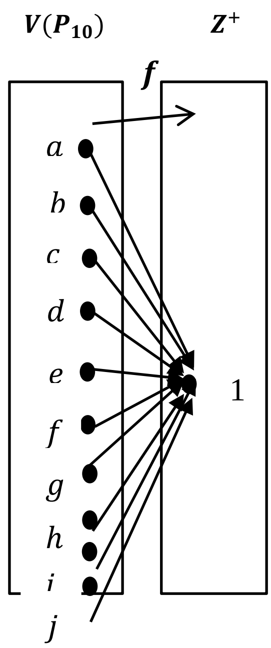
Gambar 13 Kemungkinan Fungsi $f: V(P_8) \rightarrow \{1\}$

Faktorisasi Graf Baru P_{10}^* yang dihasilkan dari Fungsi $f: V(P_{10}) \rightarrow \{1\}$

Faktorisasi graf baru P_{10}^* yang dihasilkan dari fungsi $f: V(P_{10}) \rightarrow \{1\}$ adalah sebagai berikut: Menggambar graf lintasan P_{10} dengan $ab = 1, bc = 2, cd = 3, de = 4, ef = 5, fg = 6,\ gh = 7$ dan $hi = 8$

Gambar 14 Graf Lintasan P_{10}

Kemungkinan fungsi yang menghasilkan graf baru P_{10}^* yang memiliki 1 faktor sebagai berikut :

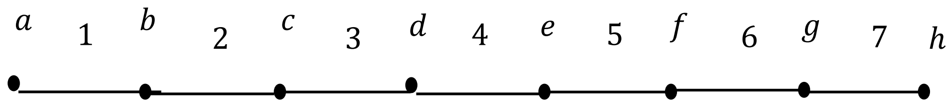


ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Gambar 15 Kemungkinan Fungsi $f: V(P_{10}) \rightarrow \{1\}$

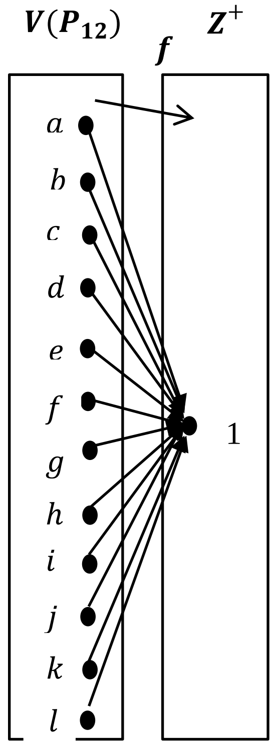
4. Faktorisasi Graf Baru P_{12}^* yang dihasilkan dari Fungsi $f: V(P_{12}) \rightarrow \{1\}$

Faktorisasi graf baru P_{12}^* yang dihasilkan dari fungsi $f: V(P_{12}) \rightarrow \{1\}$ adalah sebagai berikut:
Menggambar graf lintasan P_{12} dengan $ab = 1, bc = 2, cd = 3, de = 4, ef = 5, fg = 6,\ gh = 7, hi = 8, ij = 9, jk = 10$ dan $kl = 11$



Gambar 16 Graf Lintasan P_{12}

Kemungkinan fungsi yang menghasilkan graf baru P_{12}^* yang memiliki 1 faktor sebagai berikut :



Gambar 17 Kemungkinan Fungsi $f: V(P_{12}) \rightarrow \{1\}$

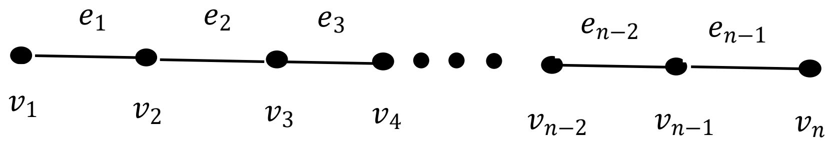
5. Ciri – Ciri Fungsi $f: V(P_n) \rightarrow \mathbb{Z}^+$ yang Mengakibatkan Graf Baru P_n^* Memiliki 1-Faktor

Teorema 1:

Fungsi yang mengakibatkan graf baru P_n^* yang dihasilkan dari kemungkinan-kemungkinan fungsi $f: V(P_n) \rightarrow \mathbb{Z}^+$ dapat memiliki 1-faktor untuk n genap $(n \geq 4)$ adalah fungsi dengan sebanyak n titik dipetakan ke 1.

Bukti:

Misal P_n adalah graf lintasan dengan n genap $(n \geq 4)$ dengan $V(P_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\}$ dan $E(P_n) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-2}, e_{n-1}\}$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n-1$. Misalkan P_n^* adalah graf baru yang dihasilkan dari kemungkinan $f: V(P_n) \rightarrow \{1\}$. Akan ditunjukkan bahwa P_n^* memiliki 1-faktor jika fungsinya memetakan sebanyak n titik ke 1. Misal gambar graf P_n adalah:



Gambar 18 Graf Lintasan P_n^* untuk n genap

Selanjutnya menentukan fungsi berdasarkan ciri-ciri yang telah ditentukan, yaitu:

a) Fungsi dengan sebanyak n titik dipetakan ke 1.
Misalkan f fungsi dari $V(P_n)$ ke $\{1\}$ dengan $f(v_i) = 1$ untuk $i = 1,2,\dots,n$. Maka diperoleh:
Untuk $D(x) = \{x_{á} | á \epsilon E\ (P_n), á$ adalah sisi yang terkait dengan x; $\forall x\ \in V(P_n)\}$.
$D(v_1) = \{v_{1_{á}} | á \epsilon E\ (P_n)$ dengan $á = e_1\}$, maka diperoleh:
$D(v_1) = \{v_{1_{e_1}}\}$
$D(v_2) = \{v_{2_{á}} | á \epsilon E\ (P_n)$ dengan $á = e_1$ dan $á = e_2\}$, maka diperoleh:
$D(v_2) = \{v_{2_{e_1}}, v_{2_{e_2}}\}$
$D(v_3) = \{v_{3_{á}} | á \epsilon E\ (P_n)$ dengan $á = e_2$ dan $á = e_3\}$, maka diperoleh:
$D(v_3) = \{v_{3_{e_2}}, v_{3_{e_3}}\}$
$\vdots$
$D(v_{n-2}) = \{v_{n-2_{á}} | á \epsilon E\ (P_n)$ dengan $á = e_{n-3}$ dan $á = e_{n-2}\}$, maka diperoleh:
$D(v_{n-2}) = \{v_{n-2_{e_{n-3}}}, v_{n-2_{e_{n-2}}}\}$
$D(v_{n-1}) = \{v_{n-1_{á}} | á \epsilon E\ (P_n)$ dengan $á = e_{n-3}$ dan $á = e_{n-2}\}$, maka diperoleh:
$D(v_{n-1}) = \{v_{n-1_{e_{n-2}}}, v_{n-1_{e_{n-1}}}\}$
$D(v_n) = \{v_{n_{á}} | á \epsilon E\ (P_n)$ dengan $á = e_{n-1}\}$, maka diperoleh:
$D(v_n) = \{v_{n_{e_{n-1}}}\}$
Selanjutnya untuk $s(x) = (d(x) - f(x), \forall x \in V(P_n))$, dan $S(x) = \{x(i) | 1 \le i \le s(x)\}$
$s(v_1) = d(v_1) - f(v_1) = 1 - 1 = 0$, maka diperoleh:
$S(v_1) = \{x(i) | 1 \le i \le 0\} = \{\ \}$
$s(v_2) = d(v_2) - f(v_2) = 2 - 1 = 1$, maka diperoleh:
$S(v_2) = \{x(i) | 1 \le i \le 1\} = \{v_2(1)\}$
$s(v_3) = d(v_3) - f(v_3) = 2 - 1 = 1$, maka diperoleh:
$S(v_3) = \{xi | 1 \le i \le 1\} = \{v31\}$
$\vdots$
$s(v_{n-2}) = d(v_{n-2}) - f(v_{n-2}) = 2 - 1 = 1$, maka diperoleh:
$S(v_{n-2}) = \{x(i) | 1 \le i \le 1\} = \{v_{n-2}(1)\}$
$s(v_{n-1}) = d(v_{n-1}) - f(v_{n-1}) = 2 - 1 = 1$, maka diperoleh:
$S(v_{n-1}) = \{x(i) | 1 \le i \le 1\} = \{v_{n-1}(1)\}$
$s(v_n) = d(v_n) - f(v_n) = 1 - 1 = 0$, maka diperoleh:
$S(v_n) = \{x(i) | 1 \le i \le 0\} = \{\ \}$

Selanjutnya graf baru $P_n^* = (V^*, E^*)$
$V^* = V_1^* \cup V_2^*$

$$V_1^* = \cup_{x \in v(P_n)} D(x) = \{D(v_1) \cup D(v_2) \cup D(v_3) \cup \dots \cup D(v_{n-2}) \cup D(v_{n-1}) \cup D(v_n)\}$$
$$= \{v_{1_{e_1}}, v_{2_{e_1}}, v_{2_{e_2}}, v_{3_{e_2}}, v_{3_{e_3}}, \dots, v_{n-2_{e_{n-3}}}, v_{n-2_{e_{n-2}}}, v_{n-1_{e_{n-2}}}, v_{n_{e_{n-1}}}\}$$
$$V_2^* = \cup_{x \in v(P_n)} S(x) = \{S(v_1) \cup S(v_2) \cup S(v_3) \cup \dots \cup S(v_{n-2}) \cup S(v_{n-1}) \cup S(v_n)\}$$
$$= \{v_2(1), v_3(1), \dots, v_{n-2}(1), v_{n-1}(1)\}$$

Sehingga untuk $V^* = V_1^* \cup V_2^*$ diperoleh :

$$V^* = \{v_{1_{e_1}}, v_{2_{e_1}}, v_{2_{e_2}}, v_{3_{e_2}}, v_{3_{e_3}}, \dots, v_{n-2_{e_{n-3}}}, v_{n-2_{e_{n-2}}}, v_{n-1_{e_{n-2}}}, v_{n-1_{e_{n-1}}}, v_{n_{e_{n-1}}}, v_2(1), v_3(1), \dots, v_{n-2}(1), v_{n-1}(1)\}$$

$E^* = E_1^* \cup E_2^*$

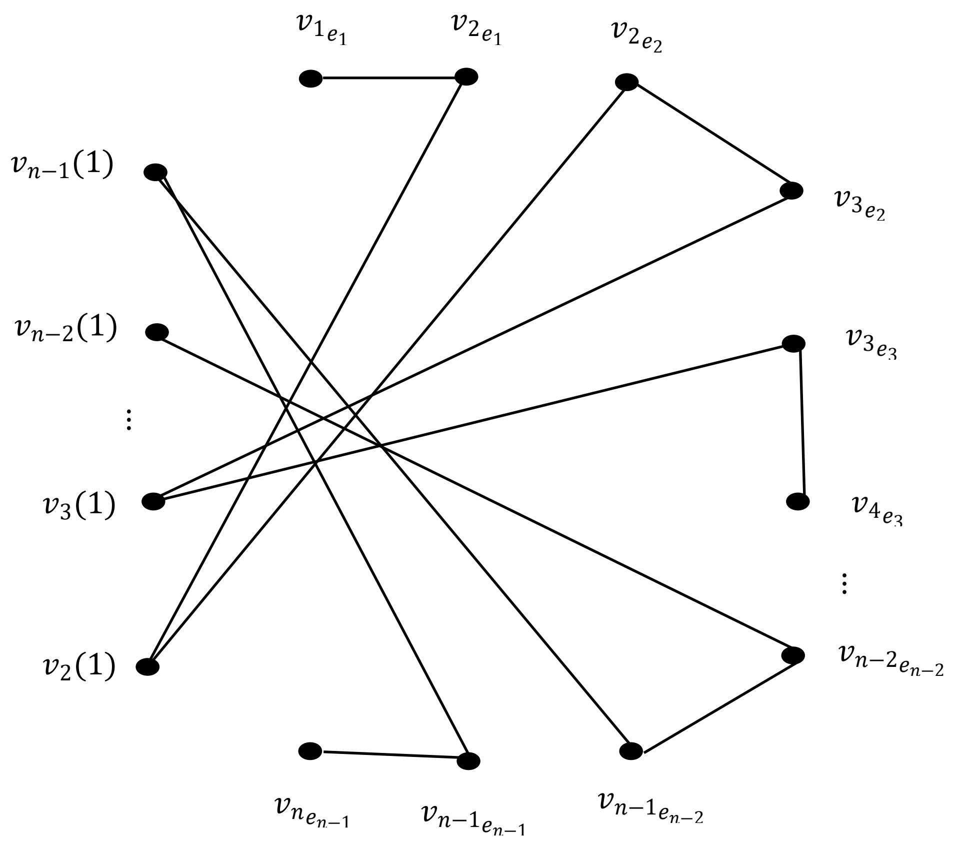
ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$E_1^* = \{x_á y_á | á = xy \ \in E(P_n)\}$
$á = e_1$ maka diperoleh $v_{1_{e_1}} v_{2_{e_1}}$
$á = e_2$ maka diperoleh $v_{2_{e_2}} v_{3_{e_2}}$
$á = e_3$ maka diperoleh $v_{3_{e_3}} v_{4_{e_3}}$

á $\vdots$ aka diperoleh $v_{n-2_{e_{n-2}}} v_{n-1_{e_{n-2}}}$
á $_{n-1}$ ...aka diperoleh $v_{n-1_{e_{n-1}}} v_{n_{e_{n-1}}}$
Jadi, $E_1^* = \{v_{1_{e_1}} v_{2_{e_1}}, v_{2_{e_2}} v_{3_{e_2}}, v_{3_{e_3}} v_{4_{e_3}}, \dots, v_{n-2_{e_{n-2}}} v_{n-1_{e_{n-2}}}, v_{n-1_{e_{n-1}}}$
$v_{n_{e_{n-1}}}\}$
$E_2^* = \{uv | u \in D(x), v \in S(x), x \in V(P_n)\}$
$= \{v_{2_{e_1}} v_2(1), v_{2_{e_2}} v_2(1), v_{3_{e_2}} v_3(1), v_{3_{e_3}} v_3(1), \dots, v_{n-2_{e_{n-2}}}$
$v_{n-2}(1), v_{n-1_{e_{n-2}}} v_{n-1}(1), v_{n-1_{e_{n-1}}} v_{n-1}(1)\}$

Dan untuk $E^* = E_1^* \cup E_2^*$, maka diperoleh:
$E^* = \{v_{1_{e_1}} v_{2_{e_1}}, v_{2_{e_2}} v_{3_{e_2}}, v_{3_{e_3}} v_{4_{e_4}}, \dots, v_{n-2_{e_{n-2}}} v_{n-1_{e_{n-2}}},$
$v_{n-1_{e_{n-1}}} v_{n_{e_{n-1}}}, v_{2_{e_1}} v_2(1), v_{2_{e_2}}$
$v_2(1), v_{3_{e_3}} v_3(1), \dots, v_{n-2_{e_{n-2}}} v_{n-2}(1), v_{n-1_{e_{n-2}}} v_{n-1}(1),$
$v_{n-1_{e_{n-1}}} v_{n-1}(1)\}$

Jadi, graf baru $P_n^* = (V^*, E^*)$ dengan $f(v_i) = 1$ untuk $i = 1,2, \dots, n$ adalah:



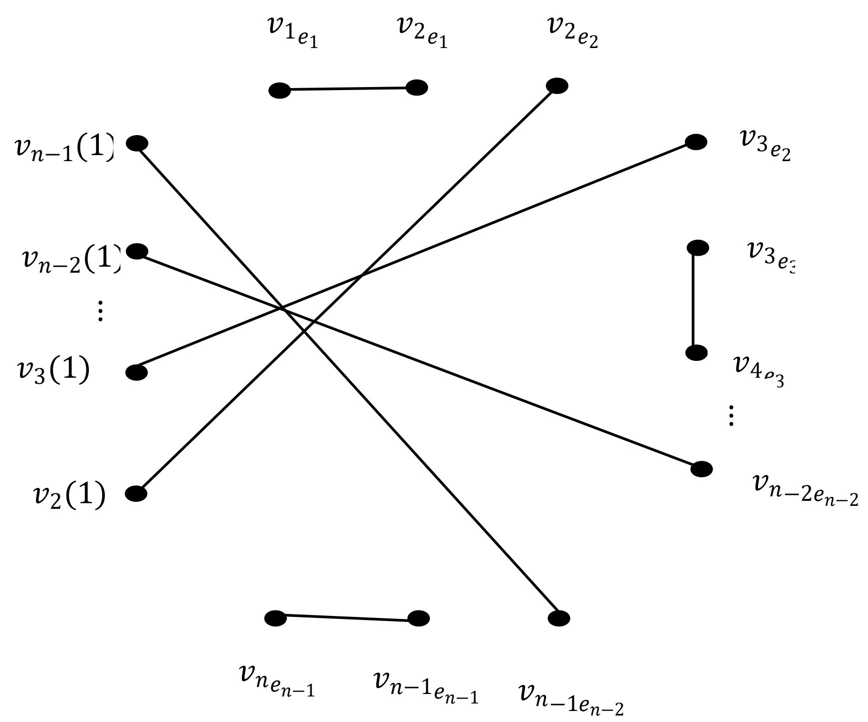
Gambar 19 Graf Baru P_n^* untuk n Genap dari Fungsi $f(v_i) = 1$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$

Selanjutnya dari Gambar 19 dilakukan faktorisasi dengan menunjukkan adanya pasangan sempurna yaitu dengan melihat pengembangan titik yang terjadi dari setiap titik digraf lintasan P_n berdasarkan pemetaannya sebagai berikut:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Untuk v_1 dipetakan ke 1, maka diperoleh $D(v_1) = \{v_{1_{e_1}}\}$ dan $S(v_1) = \{\,\}$. Jadi titik v_1 berkembang menjadi $\{v_{1_{e_1}}\}$.
Untuk v_2 dipetakan ke 1, maka diperoleh $D(v_2) = \{v_{2_{e_1}}, v_{2_{e_2}}\}$ dan $S(v_2) = \{v_2(1)\}$. Jadi titik v_2 berkembang menjadi $\{v_{2_{e_1}}, v_{2_{e_2}}, v_2(1)\}$.
Untuk v_3 dipetakan ke 1, maka diperoleh $D(v_3) = \{v_{2_{e_1}}, v_{2_{e_2}}\}$ dan $S(v_3) = \{v_3(1)\}$. Jadi titik v_3 berkembang menjadi $\{v_{3_{e_2}}, v_{3_{e_3}}, v_3(1)\}$.
$\vdots$
Untuk v_{n-2} dipetakan ke 1, maka diperoleh $D(v_{n-2}) = \{v_{n-2_{e_{n-3}}}, v_{n-2_{e_{n-2}}}\}$ dan $S(v_{n-2}) = \{v_{n-2}(1)\}$. Jadi titik v_3 berkembang menjadi $\{v_{n-2_{e_{n-3}}}, v_{n-2_{e_{n-2}}},$
$v_{n-2}(1)\}$.
Untuk v_{n-1} dipetakan ke 1, maka diperoleh $D(v_{n-1}) = \{v_{n-1_{e_{n-2}}}, v_{n-1_{e_{n-1}}}\}$ dan $S(v_{n-1}) = \{v_{n-1}(1)\}$. Jadi titik v_3 berkembang menjadi $\{v_{n-1_{e_{n-2}}}, v_{n-1_{e_{n-1}}},$
$v_{n-1}(1)\}$.
Untuk v_n dipetakan ke 1, maka diperoleh $D(v_n) = \{v_{1_{e_1}}\}$ dan $S(v_n) = \{\,\}$. Jadi titik v_n berkembang menjadi $\{v_{n_{e_{n-1}}}\}$.

Dari pengembangan titik ini dapat dilihat bahwa untuk setiap titik v_1 dan v_2 masing-masing berkembang menjadi 1 titik, dan titik $v_2, v_3, \ldots, v_{n-2}$ masing-masing berkembang menjadi 3 titik. Sehingga banyak pengembangannya adalah $3(n-2)+2 = 3n-4$. Untuk n genap maka $3n-4$ adalah bilangan genap. Kemudian dari simulasi Gambar 4.17 terlihat bahwa sisi-sisi yang terbentuk pada graf baru P_n^* berupa lintasan, sehingga dapat ditunjukkan himpunan pasangannya adalah $M = \{v_{1_{e_1}}v_{2_{e_1}}, v_{2_{e_2}}v_2(1), v_{3_{e_2}}v_3(1), v_{3_{e_3}}v_{4_{e_4}}, \cdots, v_{n-2_{e_{n-2}}}v_{n-2}(1),$ $v_{n-1_{e_{n-2}}}, v_{n-1}(1), v_{n-1_{e_{n-1}}}v_{n_{e_{n-1}}}\}$, maka dapat dipastikan graf baru P_{n+2}^* dengan fungsi sebanyak n titik dipetakan ke 1 akan selalu memiliki 1 faktor.



Gambar 20 Perfect Matching dari Graf Baru P_n^*

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, maka dapat diperoleh kesimpulan bahwa ciri-ciri fungsi yang mengakibatkan graf baru P_n^* untuk $n \geq 4$ yang dihasilkan dari fungsi $f: V(P_n) \to \mathbb{Z}^+$ dapat memiliki 1- faktor adalah fungsi dengan sebanyak n titik dipetakan ke 1.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Daftar Pustaka

[1] Amir, Z. "*Matematika Diskrit"*. Edisi 1, halaman 1, Zanafa Publishing, Pekanbaru. 2010.
[2] Bondy, J., dan Murty, U. "*Graph Theory"*. Spiriger, USA. 2008.
[3] Budayasa, I.K. "*Teori Graph dan Aplikasinya"*. Unesa University Press. Surabaya. 1996.
[4] Chartrand, G., dan Lesniak, L. "*Graph and Digraphs"*. Washington. 1986.
[5] Despandai, R. B. "*Analisis Himpunan Dominasi Lokasi Pada Model Topologi Graf Khusus dan Operasinya"*.Nov 2016. [Online] Available http://repository.unej.ac.id/handle/123456789/77850, diakses 29 Maret 2018.
[6] Mandailina, Vera. *Faktorisasi Graf Komplit*. 2009. [online] Available http://ethes.uin-malang.ac.id/6413/1/0451004.pdf, diakses 29 Maret 2018.
[7] Manongga, D., dan Nataliani, Y. "*Matematika Diskrit"*. Kencana Prenada Media Grup. Jakarta. 2013.
[8] Munir, R. *"Matematika Diskrit".* Informatika, Bandung. 2007.
[9] Prastomo, A. " *Metode Penelitian Kualitatif"*. Ar-Ruzz Media, Jogjakarta. 2011.
[10] Rosen, Kenneth H. "*Discrete Mathematics and Its Application",* McGraw-Hill Companies. Singapore. 2007.
[11] Simangunsong, J. W., dan Mulyono, Pelabelan Total Titik Ajaib Pada Graf Petersen Yang Diperumum" *Jurnal Karismatika*. Vol 1, No. 3, Desember 2015