ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Penyelesaian Persamaan Parabolik Nonlinear dengan Menggunakan Modifikasi Metode Iterasi Variasi

Wartono [a], M Yunus, M Soleh
Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Subrantas km 15,5 Pekanbaru 28293
[a)] e-mail: wartono@uin-suska.ac.id

Abstrak

Metode iterasi variasi termodifikasi merupakan salah satu metode semi analitik yang dikonstruksi dengan menggunakan kombinasi metode iterasi variasi dan metode pertubasi homotopi untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Makalah ini membahas penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinier $u_t - u_{xx} = f(u) + g(x, t)$ dengan syarat batas $u(0, t) = u(L, t) = 0$ dan syarat awal $u(x, 0) = f(x)$ menggunakan metode iterasi variasi termodifikasi. Berdasarkan hasil kajian diperoleh bentuk umum penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinear. Selain itu, implementasi skema baru terhadap beberapa contoh persamaan diferensial nonlinear menunjukkan bahwa skema baru mempunyai kemampuan yang baik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parabolik nonlinear.

Kata kunci: *Modifikasi metode iterasi variasi, Persamaan diferensial parabolik nonlinier*

Abstract

A Modified varitional iteration method is one of semi analytical methods that is constructed by using combined between a variational iteration method and homotopy pertubation method to solve nonlinear differential equations. This paper discuss the solution of the nonlinear padabolic differential equation $u_t - u_{xx} = f(u) + g(x,t)$ based on boundary condition $u(0, t) = u(L, t) = 0$ and initial condition $u(x, 0) = f(x)$ by using modified variational iteration method. *Based on the result of study, it is obtained a general form of the nonlinear parabolic differential equation. Beside in, implementation of the new schematic by using several numerical examples show that the new schematic has a good ability to solve the nonlinear parabolic differential equation.*
.

Keywords*: Modified variation iteration method, Nonlinier parabolic differential equation*

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial parsial merupakan representasi matematis dari sebagain besar persoalan-persoalan pada bidang sains dan teknik, seperti: perambatan gelombang, mekanika fluida, dan model reaksi kimia [1].

Persamaan diferensial nonlinier sebagian besar muncul dalam bentuk sehingga menyebabkan penyelesaian secara analitik sulit didapatkan. Berbagai metode semi analitik melalui pendekatan deret diusulkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier, seperti metode dekomposisi adomian, metode iterasi variasi dan metode pertubasi homotopi.

Mustafa [2] dan wartono dan bakri [3] menyelesaikan persamaan parabolik nonlinier menggunakan metode dekomposisi adomian, masing-masing dengan bentuk persamaan

$$u_t = u_{xx} + f(x,t), \text{ dengan } u(x,0) = f(x) \tag{1}$$

dan

$$u_t - uu_{xx} = \phi(x,t),\ u(0,t) = u(L, t) = 0 \text{ dan } u(x, 0)=f(x). \tag{2}$$

Selanjutnya, Jafari [4] menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinier menggunakan metode homotopi pertubasi dengan persamaan :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2)_x - u(u-1) = 0, 0 \le x \le 1, t > 0, \text{ dengan } u(x,0) = g(x). \tag{3}$$

Selain itu, salah satu metode semi analitik yang sering digunakan adalah metode iterasi variasi (VIM). Beberapa peneliti yang menggunakan metode semi analitik tersebut untuk menyelesaikan persamaan diferensial, seperti: Batiha [5] menyelesaian persamaan diferensial linier orde tiga, Ghotbi [6] menyelesaikan persamaan parabolik nonhomogen satu dimensi dengan koefisien variabel.

Selanjutnya, metode iterasi variasi (VIM) dimodifikasi oleh He [7] dengan menggunakan pertubasi homotopi. Beberapa peneliti yang menggunakan modifikasi metode iterasi variasi untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinear, seperti: Noor [8], meyelesaikan persamaan diferensial biasa, dan Mohyud-Din dkk [9] implementasi modifikasi metode iterasi variasi pada penyelesaian persamaan Schrodinger, Mantifar dkk [10] menyelesaikan persamaan panas menggunakan metode iterasi variasi yang dimodifikasi.

Pada makalah ini dibahas bentuk umum persamaan diferensial nonlinear orde dua dengan menggunakan metode iterasi variasi yang dimodifikasi. Selanjutnya, bentuk umum metode iterasi variasi yang dimodifikasi diimplementasikan terhadap beberapa contoh persamaan diferensial nonlinear untuk menguji performa dan efektifikas dari bentuk umum tersebut.

2. Metode Iterasi Variasi yang Dimodifikasi

Untuk menggambarkan teknik dasar pada proses penyelesaian sebuah persamaan diferensial, maka sebuah bentuk umum persamaan diferensial dipertimbangkan sebagai berikut

$$L(u) + N(u) = g(x), \tag{4}$$

dengan *L* adalah operator linear, *N* adalah operator nonlinear dan $g(x)$ adalah suku.
Persamaan (4) dapat dibentuk kembali menjadi

$$L(u) + N(u) - g(x) = 0 \tag{5}$$

Berdasarkan metode variasi iterasi yang dimodifikasi, Persamaan (5) dapat ditulis kembali menjadi

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi)\left(Lu_n(\xi) + N\tilde{u}_n(\xi) - g(\xi)\right)d\xi \tag{6}$$

dengan λ adalah pengali Lagralange yang mana dapat diidentifikasi secara optimal menggunakan metode iterasi variasi. Subskrip *n* melambangkan pendekatan metode iterasi variasi suku ke-n.
Selanjutnya, metode pertubasi homotopi akan diterapkan pada Persamaan (6) dalam bentuk

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i = u_0(x) + \int_0^x \lambda(\xi)\left(Lu_n(\xi) + N\tilde{u}_n(\xi) - g(\xi)\right)d\xi \tag{7}$$

atau

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i = u_0(x) + \int_0^x \lambda(\xi)\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i Lu_n(\xi) + \sum_{i=0}^{\infty} p^i N\tilde{u}_n(\xi)\right)d\xi - \int_0^x \lambda(\xi)g(\xi)d\xi \tag{8}$$

Persaman (8) merupakan metode variasi iterasi yang dimodifikasi dari metode variasi iterasi dan metode pertubasi homotopi secara bersamaan.

3. Hasil dan Diskusi

Pada seksi ini, hasil kajian dan diskusi dipaparkan secara detail. Selain itu, untuk mempertajam uraian dan diskusi, pada seksi ini akan dilengkapi dengan tabel dan grafik.

3.1 Metode yang Dikembangkan

Pertimbangkan kembali persamaan parabolik nonlinear berikut

$$u_t - u_{xx} - f(u) = g(x,t) \tag{9}$$

dengan

nilai awal $u(x,0) = f(x)$ dan syarat batas $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

Misalkan $f(u)$ adalah fungsi yang terdiri dari bentuk linear $L(u)$ dan nonlinear $N(u)$, maka persamaan (4.1) dapat ditulis kembali:

$$u_t - u_{xx} - N(u) - L(u) = g(x,t), \tag{10}$$

Persamaan (10) dikatakan Homogen jika $g(x,t) = 0$, nonhomogen jika $g(x,t) \neq 0$.

Untuk mengkontruksi bentuk umum yang akan diusulkan, Persamaan (10) dapat dibentuk kembali menjadi

$$u_t - u_{xx} - N(u) - L(u) - g(x,t) = 0. \tag{11}$$

Penyelesaian persamaan (11) dilakukan dengan mengubah persamaan (11) ke bentuk metode iterai variasi yaitu

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$u_{n+1} = u_n(x) + \int_0^x \lambda(s)\left(\frac{\partial u_n}{\partial s} - \tilde{u}_{nxx} - L(\tilde{u}_n) - N(\tilde{u}_n) - g(x,t)\right)ds, \tag{12}$$

dengan $\tilde{u}_n$ adalah variasi. Untuk membuat stasioner fungsi pada persamaan (12), pengali Lagrange dapat dihitung sebagai $\lambda = -1$, sehingga persamaan (12) menjadi

$$u_{n+1} = u_n(x) - \int_0^x \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} - \tilde{u}_{nxx} - L(\tilde{u}_n) + N(\tilde{u}_n) - g(x,t)\right)ds\ . \tag{13}$$

Aplikasikan metode pertubasi homotopi ke Persamaan (13), sehingga diperoleh

$$u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots = f(x) - p\int_0^x \left(\frac{\partial u_n}{\partial s} - \tilde{u}_{nxx} - L(\tilde{u}_n) - N(\tilde{u}_n) + g(x,t)\right)ds \tag{14}$$

atau

$$u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots = f(x) - p\int_0^t \left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + p\frac{\partial u_1}{\partial s} + p^2\frac{\partial u_2}{\partial s} + \ldots\right)ds + \int_0^t \left(\tilde{u}_{0xx} + p\tilde{u}_{1xx} + p^2\tilde{u}_{2xx} + \ldots\right)ds$$

$$+ p\int_0^t \left(-L(\tilde{u}_n) - N(\tilde{u}_n) + g(x,t)\right)ds\ . \tag{15}$$

Persamaan (15) dapat dibentuk menjadi lebih sederhana menjadi,

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i = f(x) - p\int_0^t \sum_{i=0}^{\infty}\left(p^i\frac{\partial u_i}{\partial s}\right)ds + p\int_0^t \sum_{i=0}^{\infty}\left(p^i\tilde{u}_{ixx}\right)ds + p\int_0^t \left(-L(\tilde{u}_n) - N(\tilde{u}_n) + g(x,t)\right)ds \tag{16}$$

Penyelesaian persamaan (16) merupakan komposisi fungsi-fungsi tak diketahui yaitu fungsi $u(x,t)$ yang merupakan deret $u_0(x,t), u_1(x,t), u_2(x,t), \cdots,$ sehingga

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \cdots + u_n(x,t) + \cdots. \tag{17}$$

Misalkan

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= u_0(x,t),\\
\phi_1 &= u_0(x,t) + u_1(x,t),\\
\phi_2 &= u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t),\\
&\vdots\\
\phi_n &= u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \cdots + u_n(x,t),\\
&\vdots
\end{aligned}$$

maka

$$u(x,t) = \lim_{k\to\infty} \phi_k\ .$$

3.2 Aplikasi Numerik

Pada sub-seksi ini, metode iterasi variasi yang telah dimodifikasi di implementasikan terhadap beberapa persoalan persamaan diferensial parabolik nonlinear. Hasil numerik akan dibandingkan dengan penyelesaian sejatinya dan galat yang dihasilkan diplot dengan menggunakan MATLAB 6.5.

Contoh 1.

Diberikan sebuah persamaan parabolik nonlinier sebagai berikut.

$$u_t - u_{xx} = u^2 - (u_x)^2 \,, \tag{18}$$

dengan masalah nilai awal $u(x,0) = e^x$ [2].

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (16) diperoleh bentuk umum metode iterasi variasi yang dimodifikasi yang diberikan oleh

$$u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \cdots = e^x - p\int_0^t \left(\frac{\partial u_0}{\partial s} + p\frac{\partial u_1}{\partial s} + p^2\frac{\partial u_2}{\partial s} + \ldots \right) ds - p\int_0^t \left(u_{0xx} + pu_{1xx} + p^2u_{2xx} + \ldots \right) ds$$
$$-p\int_0^t \left(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots \right)^2 ds - p\int_0^t \left(u_{0x} + pu_{1x} + p^2u_{2x} + \ldots \right)^2 ds \tag{19}$$

Selanjutnya dengan membandingkan koefisien-koefisien *p*, maka diperoleh diperoleh penyelesain untuk u_1, u_2, u_3, dalam bentuk

$$p^0 : \; u_0(x,t) = e^x \,,$$
$$p^1 : \; u_1(x,t) = e^x t \,,$$
$$p^2 : \; u_2(x,t) = e^x \left(\frac{1}{2!} t^2 \right),$$
$$p^3 : \; u_3(x,t) = e^x \left(\frac{1}{3!} t^3 \right) \,,$$
$$p^4 : \; u_4(x,t) = e^x \left(\frac{1}{4!} t^4 \right),$$
$$\vdots$$
$$p^n : \; u_n(x,t) = e^x \left(\frac{1}{n!} t^n \right),$$
$$\vdots$$

Berdasarkan pola deret di atas diperoleh,

$$\phi_0 = e^x,$$
$$\phi_1 = e^x + e^x t = e^x(1+t),$$
$$\phi_2 = e^x + \left(e^x t\right) + e^x \left(\frac{1}{2!} t^2 \right) = e^x \left(1 + t + \frac{1}{2} t^2 \right),$$
$$\phi_3 = e^x + \left(e^x t\right) + e^x \left(\frac{1}{2!} t^2 \right) + e^x \left(\frac{1}{3!} t^3 \right) = e^x \left(1 + t + \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{3!} t^3 \right)$$
$$\vdots$$

Penyelesaian (18) diperoleh dengan menjumlahkan sebanyak tak hingga penyelesaian hampiran u_0, u_1, u_2, u_3, ... dalam bentuk:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \cdots$$

Oleh karena itu, dengan mensubstitusikan semua nilai-nilai hampiran, maka diperoleh

$$u(x,t) = e^x + \left(e^x t\right) + e^x \left(\frac{1}{2!} t^2 \right) + e^x \left(\frac{1}{3!} t^3 \right) + \cdots$$

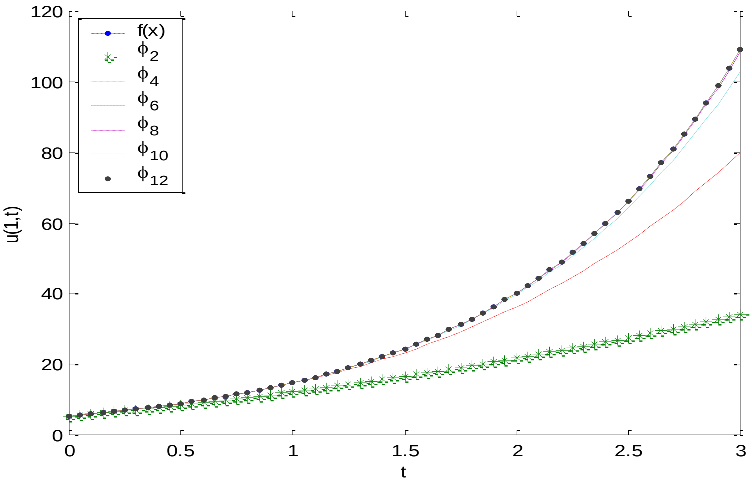
$$= e^{x}\left(1+\frac{1}{t}+\frac{t^{2}}{2!}+\frac{t^{3}}{3!}+\cdots\right),$$

atau

$$u(x,t)=e^{x+t}\ .$$

Jadi, penyelesaian persamaan diferensial nonlinear dari Persamaan (17) diberikan oleh $u(x,t)=e^{x+t}$.

Gambar 1 menunjukkan perilaku grafik dari ϕ_2, ϕ_4, ϕ_6, ϕ_8, ϕ_{10}, dan ϕ_{12} terhadap fungsi $u(x,t)$ untuk x = 1 dan interval t = [0, 3].



Gambar 1. Perbandingan grafik u(x,t) dan hampirannya

Gambar 1 menunjukkan bahwa kurva yang dibentuk oleh ϕ_{12} hampir berhimpit dengan fungsi sebenarnya. Hal ini menunjukan bahwa kurva yang dihasilkan dengan menggunakan suku-suku deret yang lebih banyak akan lebih mendekati kurva dari fungsi sebenarnya.

Selanjutnya, akurasi metode iterasi variasi yang dimodifikasi untuk x =1 dan t = 0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; dan 1,0 diperlihatkan pada Tabel 1 dengan menggunakan rumus

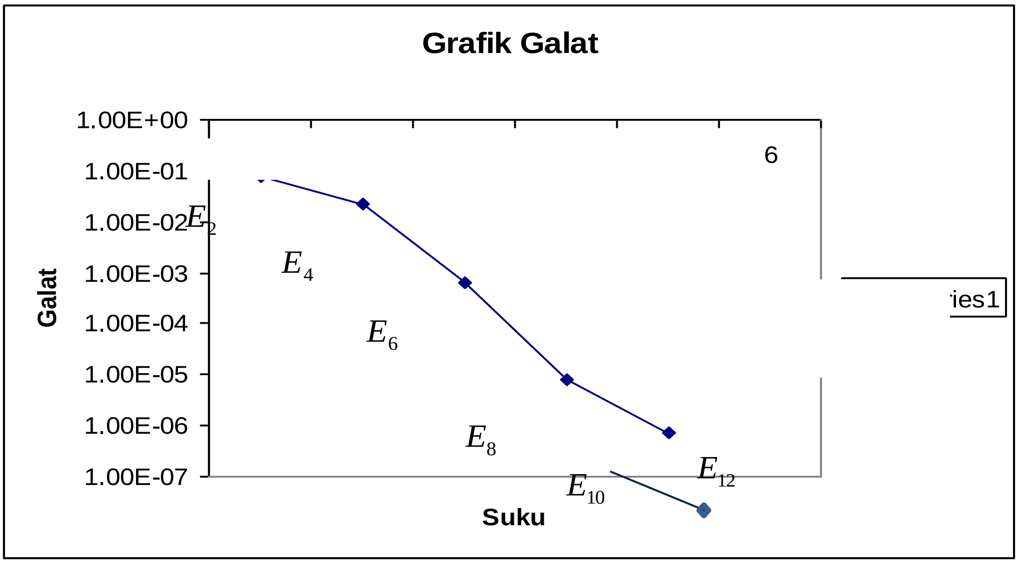
$$E_n = \left|u(x,t)-\phi_n(x,t)\right| \tag{20}$$

Tabel 1 Galat mutlak Persamaan (17) untuk x = 1

t	E_2	E_4	E_6	E_8	E_{10}	E_{12}
0.1	0.000464603	0.00000228	0	0	0	0
0.2	0.003813092	0.000007497	0.000000060	0.00000002	0.00000002	0.000000002
0.4	0.032142861	0.000248352	0.000009290	0.00000002	0.00000001	0.000000001
0.6	0.114490769	0.001953901	0.000016310	0.00000079	0.00000002	0.000000002
0.8	0.286889988	0.008537928	0.000125509	0.000001091	0.00000004	0.000000002
1	0.593351526	0.027042813	0.00615071	0.000008312	0.00000073	0.000000001

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Untuk lebih memperjelas pergerakan galat yang dihasilkan oleh keterlibatan suku-suku deret diplot pada Tabel 1 berikut.



Gambar 2. Grafik galat pada beberapa suku deret dengan x = 1 dan t = 1

Gambar 2 menunjukkan pergerakan galat dari modifikasi metode iterasi variasi pada proses menghampiri penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinier pada persamaan (18) dengan $u(x,0)=e^x$ di x = 1 dan t = 1 untuk beberapa jumlah suku.

Contoh 2 :

Tentukan penyelesaian eksak dari persamaan parabolik nonlinier homogen berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(u_x\right)^2-u\left(1-u\right)=0 \qquad (20)$$

dengan masalah nilai awal $u(x,0)=e^{-x}$ [4].

Selanjutnya dengan menggunakan metode iterasi variasi termodifikasi memberikan

$$u_0+pu_1+p^2u_2+\cdots=e^x-\frac{p}{2}\int_0^t\left(\frac{\partial u_0}{\partial s}+p\frac{\partial u_1}{\partial s}+p^2\frac{\partial u_2}{\partial s}+\ldots\right)ds-p\int_0^t\left(u_0+pu_1+p^2u_2+\ldots\right)ds$$

$$+p\int_0^t\left(u_0+pu_1+p^2u_2+\ldots\right)^2ds-p\int_0^t\left(u_0+pu_1+p^2u_2+\ldots\right)^2ds$$

Untuk menentukan nilai-nilai suku deret yang dihasilkan, maka perbandingan pada setiap orde p dilakukan sehingga diperoleh

$p^0:\ u_0(x,t)=e^{-x}$,

$p^1:\ u_1(x,t)=e^{-x}t$,

$p^2:\ u_2(x,t)=e^{-x}\left(\frac{1}{2}t^2\right)$,

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$p^3: \ u_3(x,t) = e^{-x}\left(\frac{1}{3!}t^3\right),$$

$$p^4: \ u_4(x,t) = e^{-x}\left(\frac{1}{4!}t^4\right),$$

$$\vdots$$

$$p^n: \ u_n(x,t) = e^{-x}\left(\frac{1}{n!}t^n\right),$$

Berdasarkan pola deret di atas diperoleh,

$$\phi_0 = e^{-x},$$

$$\phi_1 = e^{-x} + e^{-x}t = e^{-x}(1+t),$$

$$\phi_2 = e^{-x} + \left(e^{-x}t\right) + e^{-x}\left(\frac{1}{2!}t^2\right) = e^{-x}\left(1 + t + \frac{1}{2}t^2\right),$$

$$\phi_3 = e^{-x} + \left(e^{-x}t\right) + e^{-x}\left(\frac{1}{2!}t^2\right) + e^{-x}\left(\frac{1}{3!}t^3\right) = e^{-x}\left(1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3\right)$$

$$\vdots$$

Penyelesaian (20) diperoleh dengan menjumlahkan sebanyak tak hingga penyelesaian hampiran u_0, u_1, u_2, u_3, ... dalam bentuk:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \cdots$$

Oleh karena itu, dengan mensubstitusikan semua nilai-nilai hampiran, maka diperoleh

$$u(x,t) = e^{-x} + \left(e^{-x}t\right) + e^{-x}\left(\frac{1}{2!}t^2\right) + e^{-x}\left(\frac{1}{3!}t^3\right) + \cdots$$

$$= e^{-x}\left(1 + \frac{1}{t} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots\right),$$

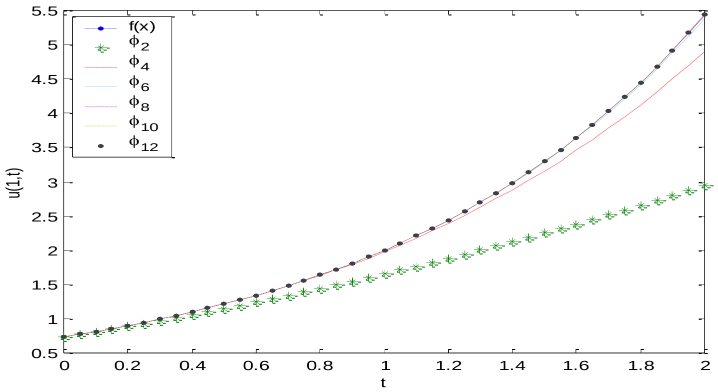
atau

$$u(x,t) = e^{-x+t}.$$

Jadi, penyelesaian persamaan diferensial nonlinear dari Persamaan (20) diberikan oleh $u(x,t) = e^{-x+t}$.

Pola-pola kurva yang dibentuk oleh hasil-hasil penjumlah suku-suku deret ditampilkan pada Gambar 3.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406



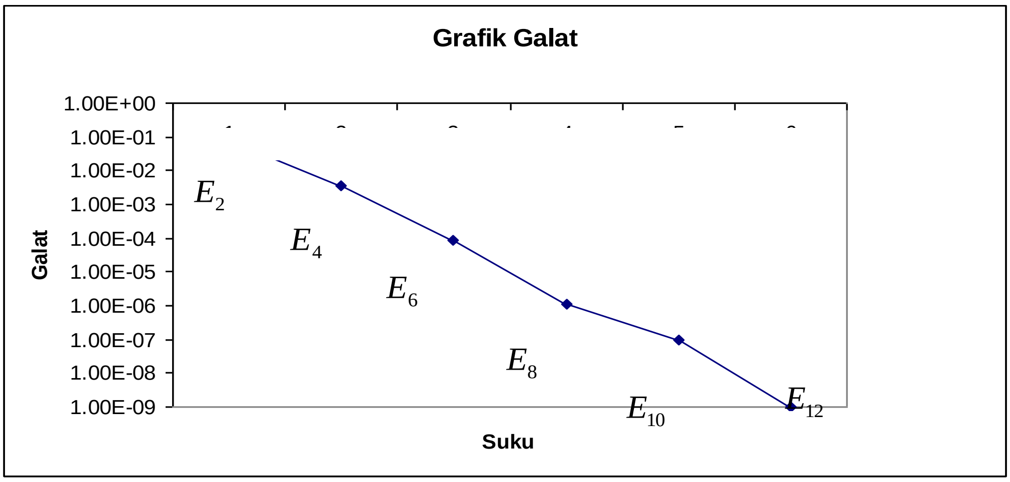
Gambar 3. Kurva ϕ_2, ϕ_4, ϕ_6, ϕ_8, ϕ_{10}, dan ϕ_{12} untuk x = 1 dan t = 1

Gambar 3 menujukkan bahwa kurva yang dihasilkan oleh ϕ_{12} lebih mendekati kurva fungsi sebenarnya. Hal ini menunjukkan bahwa semakin banyak suku deret yang digunakan, maka nilai fungsi akan semakin membaik.

Tabel 2 Galat persamaan (17) dengan $x = 1$

t	E_2	E_4	E_6	E_8	E_{10}	E_{12}
0.1	0.0000628773	0.0000003100	0.0000000001	0.0000000001	0.0000000001	0.0000000001
0.2	0.0005160459	0.0000010147	0.0000000080	0.000000003	0.000000003	0.000000003
0.4	0.0043500631	0.0000336108	0.000001256	0.000000002	0.000000002	0.000000002
0.6	0.0154946400	0.0002644319	0.0000022074	0.000000108	0.000000021	0.000000002
0.8	0.0388263378	0.0011554830	0.0000169859	0.000001477	0.000000005	0.000000002
1,0	0.0803013970	0.0036598469	0.0000832409	0.0000011251	0.000000100	0.000000001

Galat yang diberikan pada Tabel 2 dapat diplot sebagaimana yang diberikan pada Gambar 4 berikut.



Gambar 4. Galat ϕ_2, ϕ_4, ϕ_6, ϕ_8, ϕ_{10}, dan ϕ_{12} untuk x = 1 dan t = 1

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Berdasarkan Gambar 4, dapat dilihat bahwa, nilai galat yang dihasilkan oleh ϕ_{12} lebih kecil dibandingkan galat-galat yang dihasilkan oleh ϕ_2, ϕ_4, ϕ_6, ϕ_8, ϕ_{10}. Hal ini menunjukan bahwa penggunaan suku-suku deret semakin banyak akan menghasilkan galat yang semaik kecil.

4. Kesimpulan

Pada makalah ini, metode iterasi variasi digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parabolic nonlinear dalam bentuk umum $u_t - u_{xx} = f(u) + g(x, t)$ dengan syarat batas $u(0, t) = u(L, t) = 0$ dan syarat awal $u(x, 0) = f(x)$. Implementasi terhadap contoh-contoh persamaan diferensial parabolic nonlinear menunjukkan bahwa skema metode baru mempunyai kemampuan yang handal untuk menyelesaian persamaan diferensial parabolic nonlinear.

Daftar Pustaka

[1] Stavroulakis, I. P., dan Stepan, A. T., *Partial Differtial Equations*, World Scientific Publishing Co. Re. Ltd. New Jersey, 2004.

[2] Mustafa, I., On numerical solutions of partial differential equations by decompotition method, *Kragujevac Journal of Mathematics,* **26**: 153-164. 2004.

[3] Wartono dan Bakri, K., Penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinier dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian, *Sains, Teknologi dan Industri,* **8**(*1*)*:* 1 – 5, 2010.

[4] Jafari, H., Zabihi, M., dan Saidy, M., Application of homotopy pertubation method for solving gas dynamics equation, *Applied Mathematical Sciences*, **2**(48) : 2393-2396. 2008.

[5] Batiha, B., Noorani, M. S. M., dan Hashim, I., Application of variational iteration method to a general Riccati equation, *International Mathematical Forum,* **2**(56) : 2759 - 2770. 2007.

[6] Ghotbi, A. R., Barari, A., Omidvar, M., dan Ganji, D. D., Application of variational iterative method to parabolic problems, *Applied Mathematical Sciences*, **3**(19) : 927 - 934. 2009.

[7] He, J.H, Varitional iteration method-some recent result and new interpretations, *Journal of Computational Applied Mathematics,* **207**: 3 - 17. 2007.

[8] Noor, M. A., dan Mahyoud-Din, S. T., Modified variational iteration method for heat and wave like equations, *Acta Applicandae Mathematicae*, **104** : 257 – 269, 2008.

[9] Mohyoud-din, S.T., Noor, M. A., dan Noor, K. I., Modofied variation iteration method for Schrodinger equations, M*athematical and Computational Applications*, **15**(3): 309 – 317, 2010.

[10] Mantifar, M., Saeidy, M., dan Raeisi, M., Modified variational iteration method for heat equations using He's polynomials, *Bulletin of Mathematical Analysis and Application*, **3**(2): 238 – 245, 2011.