

# Kestabilan Model Matematika Penularan Virus Hepatitis B (VHB) Di Bawah Pengaruh Vaksinasi Dan Pengobatan Dengan Adanya Migrasi

Mohammad Soleh<sup>1</sup>, Ropita Munawaroh<sup>2</sup>, Wartono<sup>3</sup>, Zukrianto<sup>4</sup>

Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau

Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293

e-mail: <sup>1</sup>msoleh@uin-suska.ac.id, <sup>2</sup>pitamunawaroh@gmail.com, <sup>3</sup>wartono@uin-suska.ac.id

## Abstrak

*Jurnal ini membahas tentang model matematika penyebaran virus hepatitis B menggunakan model SEICR pada populasi terbuka. Langkah untuk menganalisa model dengan mendapatkan titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemic penyakit kemudian menganalisa kestabilan kedua titik kesetimbangan. Simulasi diberikan berdasarkan nilai-nilai parameter yang terkait dalam model yang menggambarkan kondisi pada setiap kelas subpopulasi. Berdasarkan penelitian diperoleh bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemic penyakit stabil asimtotik jika memenuhi syarat tertentu.*

**Kata Kunci:** Routh-Hurwitz, SEICR, stabil asimtotik, titik kesetimbangan.

## Abstract

*This paper discusses the mathematical model of hepatitis B virus spread using SEICR model at opened population. The step to analyze the model by determining the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point of the disease, then analyzes the stability of the two equilibrium points. The simulation is based on the corresponding parameter values in the model under subpopulation class condition. Based on the study it was found that the equilibrium state free disease and equilibrium state endemic disease if certain to standard.*

**Keyword:** Asimptotic stable, equilibrium state, Routh-Hurwitz, SEICR.

## 1. Pendahuluan

Seiring perkembangan zaman yang semakin maju saat ini suatu analisis yang ilmiah sangat diperlukan untuk setiap peristiwa yang berlaku sehari-hari di dalam masyarakat. Peristiwa-peristiwa yang terjadi dapat dianalisis dari berbagai macam sudut pandang, misalnya dari sudut pandang ekonomi, sosial budaya, politik, kesehatan, epidemi dan sebagainya. Model matematika merupakan salah satu alat yang dapat digunakan untuk menentukan solusi dari peristiwa epidemi. Salah satu contoh kejadian epidemi adalah penyebaran penyakit hepatitis B.

Hepatitis B adalah infeksi hati yang disebabkan oleh virus hepatitis B (VHB), suatu anggota famili hepadnavirus. Hepatitis B dapat menyebabkan penyakit hati kronis dan infeksi kronis serta menempatkan orang pada risiko kematian tinggi dari sirosis hati dan kanker hati. Infeksi hepatitis B terjadi hanya jika virus hepatitis B mampu memasuki aliran darah dan mencapai hati. Setelah di hati, virus mereproduksi dan menghasilkan sejumlah besar virus baru ke dalam aliran darah

Salah satu alasan utama untuk mempelajari virus hepatitis B (VHB) adalah untuk meningkatkan kontrol dan menurunkan infeksi dari populasi. Model matematika dapat menjadi alat yang berguna dalam pendekatan yang membantu untuk mengoptimalkan penggunaan sumber yang terbatas atau hanya untuk tujuan pengendalian.

J. Pang dkk [7], mengembangkan sebuah model untuk mengeksplorasi dampak vaksinasi dan langkah-langkah pengendalian lain infeksi VHB. Model ini memiliki perilaku dinamik sederhana yang memiliki keseimbangan bebas penyakit stabil asimtotik global ketika jumlah reproduksi dasar kecil sama dengan satu, dan keseimbangan endemik stabil asimtotik global saat reproduksi dasar lebih dari satu. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa vaksinasi adalah ukuran yang sangat efektif untuk mengontrol infeksi.

Zhang dan Zhou [13], mengemukakan analisis dan penerapan dari model VHB. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dinamika model sepenuhnya ditentukan oleh jumlah reproduksi dasar. Jika reproduksi dasar kecil satu, keseimbangan bebas penyakit stabil global. Ketika reproduksi dasar besar satu, keseimbangan bebas penyakit tidak stabil dan penyakit terus-menerus ada. Model yang ada diterapkan untuk transmisi VHB di Cina. Nilai parameter dari model

diperkirakan berdasarkan data epidemi VHB di Cina. Didapat hasil simulasi cocok dengan data epidemi HBV di Cina.

Ali Vahidian Kamyad, dkk [8], mengembangkan sebuah model untuk mengeksplorasi pengaruh vaksinasi dan pengobatan terhadap VHB. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa kombinasi vaksinasi dan pengobatan adalah carayang paling efektif untuk mengendalikan infeksi virus hepatitis B.

Berdasarkan ulasan di atas, terutama pada jurnal Ali Vahidian Kamyad yang membahas model matematika penularan virus hepatitis B di bawah pengaruh vaksinasi dan pengobatan namun pada populasi tertutup, maka penulis tertarik untuk mengkaji pada populasi terbuka.

## 2. Hasil dan Pembahasan

Model SEICR membagi populasi menjadi lima kelompok *susceptible* (S), *exposed* (E), *infected* (I), *chronic carrier* (C), dan *recovered* (R). Model SEICR dapat dibentuk dengan asumsi dari Ali Vahidin Kamyad [8] dengan mengganti dari populasi tertutup, menjadi populasi terbuka

Berdasarkan asumsi yang telah diberikan, maka diperoleh system persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = v + \delta_1 - \rho(I + \theta C)S - (v + u_1 + \delta_2)S \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \rho(I + \theta C)S - (v + \beta_1 + \delta_2)E \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta_1 E - (v + \beta_2 + \delta_2)I \quad (3)$$

$$\frac{dC}{dt} = vP_1 C + P_2 \beta_2 I - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)C \quad (4)$$

$$\frac{dR}{dt} = (1 - P_2)\beta_2 I + (\beta_3 + u_2)C + u_1 S - (v + \delta_2)R \quad (5)$$

Dengan :

$vP_1$  adalah populasi yang baru lahir dari penderita yang terinfeksi kronis,  $\rho(I + \theta C)$  adalah laju perpindahan dari kelas *susceptible* (S) menjadi *eksposed*(E),  $u_1$  adalah laju perpindahan dari kelas *susceptible* (S) menjadi *recovered* (R) dengan adanya vaksinasi,  $\beta_1$  adalah laju perpindahan dari kelas *eksposed* (E) menjadi *acute infected* (I),  $P_2 \beta_2$  adalah laju perpindahan dari kelas *acute infected* (I) menjadi *chronic carriers* (C),  $(1 - P_2)\beta_2$  adalah laju penyembuhan dari kelas *acute infected* (I) menjadi *recovered* (R),  $\beta_3$  adalah laju penyembuhan dari kelas *chronic carriers* (C) menjadi *recovered* (R) secara alami,  $u_2$  adalah laju penyembuhan dari kelas *chronic carriers* (C) menjadi *recovered* (R) dengan pengobatan,  $v$  adalah laju kematian alami dan kelahiran kelahiran,  $\delta_1$  laju imigrasi,  $\delta_2$  laju emigrasi.

### 2.1. Titik Keseimbangan dan Kestabilan

Titik keseimbangan diperoleh apabila  $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dC}{dt} = 0, \text{ dan } \frac{dR}{dt} = 0$ . Titik kesetimbangan terbagi menjadi dua yaitu, titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemic penyakit. Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah suatu kondisi tidak ada lagi penyakit yang menyerang, dengan kata lain tidak ada lagi individu yang terserang virus hepatitis B atau  $(\hat{I} = \hat{C} = 0)$ . Titik kesetimbangan (*equilibrium*) bebas penyakit pada model ini dinotasikan dengan  $(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \hat{C}, \hat{R})$ . Dari analisis model diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu  $(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \hat{C}, \hat{R}) =$

$$\left( \frac{v + \delta_1}{(v + u_1 + \delta_2)}, 0, 0, 0, \frac{u_1(v + \delta_1)}{(v + \delta_2)(v + u_1 + \delta_2)} \right)$$

### Titik Keseimbangan Endemik Penyakit

Titik keseimbangan endemic penyakit adalah suatu kondisi penyakit selalu ada di dalam populasi, atau selalu ada individu yang terserang virus hepatitis B. Titik keseimbangan endemic penyakit pada model ini dinotasikan dengan  $(S^*, E^*, I^*, C^*, R^*)$ . Dari analisis model diperoleh titik keseimbangan endemic penyakit adalah  $(S^*, E^*, I^*, C^*, R^*)$ :  
 dengan

$$S^* = \frac{(v + \beta_1 + \delta_2)(v + \beta_3 + u_2 + \delta_2 - vP_1)(v + \beta_2 + \delta_2)}{\rho\beta_1((v + \beta_3 + u_2 + \delta_2 - vP_1) + \theta P_2\beta_2)}$$

$$E^* = \frac{(v + \delta_1 - (v + u_1 + \delta_2)S^*)(v + \beta_3 + u_2 + \delta_2 - vP_1)(v + \beta_2 + \delta_2)}{\beta_1(vP_1.P_2\beta_2 + (\rho(v + \beta_3 + u_2 + \delta_2 - vP_1) + \rho\theta.P_2\beta_2)S^*)}$$

$$I^* = \frac{(v + \delta_1 - (v + u_1 + \delta_2)S^*)(v + \beta_3 + u_2 + \delta_2 - vP_1)}{(vP_1.P_2\beta_2 + (\rho(v + \beta_3 + u_2 + \delta_2 - vP_1) + \rho\theta.P_2\beta_2)S^*)}$$

$$C^* = \frac{P_2\beta_2.(v + \delta_1 - (v + u_1 + \delta_2)S^*)}{vP_1.P_2\beta_2 + (\rho(v + \beta_3 + u_2 + \delta_2 - vP_1) + \rho\theta.P_2\beta_2)S^*}$$

$$R^* = \frac{u_1S^* + (\beta_3 + u_2)C^* + (1 - P_2)\beta_2I^*}{(v + \delta_2)}$$

### Kestabilan Titik Keseimbangan

Setelah diperoleh titik keseimbangan, selanjutnya akan dianalisa kestabilan dari titik keseimbangan tersebut. Kestabilan titik keseimbangan Persamaan (1)-(4) dapat didekati dengan melakukan linearisasi menggunakan matrik Jacobian, dimana masing-masing fungsi diturunkan secara parsial terhadap variabel pada fungsi tersebut. Sehingga diperoleh sebagai berikut :

$$J = \begin{bmatrix} -\rho(I + \theta C) - (v + u_1 + \delta_2) & 0 & -\rho S & -(vP_1 + \rho\theta S) & 0 \\ \rho(I + \theta C) & -(v + \beta_1 + \delta_2) & \rho S & \rho\theta S & 0 \\ 0 & \beta_1 & -(v + \beta_2 + \delta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_2\beta_2 & vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2) & 0 \\ u_1 & 0 & (1 - P_2)\beta_2 & \beta_3 + u_2 & -(v + \delta_2) \end{bmatrix} \quad (5)$$

### Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

**Teorema 1** Jika :

- (a)  $v + \beta_3 + u_2 + \delta_2 > vP_1$
- (b)  $\beta_1\rho\hat{S}vP_1 + (v + \beta_1 + \delta_2)(v + \beta_2 + \delta_2)((v + \beta_3 + u_2 + \delta_2) - vP_1) > \beta_1\rho\hat{S}((v + \beta_3 + u_2 + \delta_2) + \theta P_2\beta) + u_2 + \delta_2vP_1$
- (c)  $(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2))^2 > \beta_1\rho\hat{S}$

maka titik keseimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal.

**Bukti :**

Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh dengan cara mensubstitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit  $(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \hat{C}, \hat{R}) = \left( \frac{v + \delta_1}{(v + u_1 + \delta_2)}, 0, 0, 0, \frac{u_1(v + \delta_1)}{(v + \delta_2)(v + u_1 + \delta_2)} \right)$  ke

matriks Jacobian pada Persamaan (5). Sehingga diperoleh  $|J_{(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \hat{C}, \hat{R})} - \lambda|$  sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & (-(v + \delta_2) - \lambda)(-(v + u_1 + \delta_2) - \lambda)(\lambda^3 \\ & \quad + ((v + \beta_1 + \delta_2) + (v + \beta_2 + \delta_2) - (vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)))\lambda^2 \\ & + \left( (v + \beta_1 + \delta_2)(v + \beta_2 + \delta_2) - (v + \beta_1 + \delta_2)(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)) \right. \\ & \quad \left. - (v + \beta_2 + \delta_2)(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)) - \beta_1\rho\hat{S} \right. \\ & \quad \left. + \delta_2 \right) \lambda - (v + \beta_1 + \delta_2)(v + \beta_2 \\ & (vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)) + \beta_1\rho\hat{S}(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)) - \beta_1P_2\beta_2\rho\theta\hat{S} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Berdasarkan Persamaan (6) diperoleh nilai untuk  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  yaitu  $\lambda_1 = -(v + \delta_2)$  dan  $\lambda_2 = -(v + u_1 + \delta_2)$  yang mempunyai nilai eigen bernilai negatif. Selanjutnya akan dicari nilai eigen untuk  $\lambda_3, \lambda_4$ , dan  $\lambda_5$  sebagai berikut :

Misalkan :

$$A = \begin{bmatrix} -(v + \beta_1 + \delta_2) - \lambda & \rho\hat{S} & \rho\theta\hat{S} \\ \beta_1 & -(v + \beta_2 + \delta_2) - \lambda & 0 \\ 0 & P_2\beta_2 & vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2) - \lambda \end{bmatrix}$$

Untuk  $\lambda_3, \lambda_4$ , dan  $\lambda_5$  didapat dari determinan matriks  $A$ , diperoleh persamaan karakteristik dari matriks  $A$  sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & (-\alpha_1 - \lambda)((-\alpha_2 - \lambda)(\alpha_3 - \lambda)) - \beta_1(\alpha_3\rho\hat{S} - \rho\hat{S}\lambda - P_2\beta_2\rho\theta\hat{S}) = 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda^3 + (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)\lambda^2 + (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3 - \beta_1\rho\hat{S})\lambda - (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \beta_1\rho\hat{S}\alpha_3 + \beta_1P_2\beta_2\rho\theta\hat{S}) = 0, \end{aligned}$$

dengan:

$$\alpha_1 = (v + \beta_1 + \delta_2)$$

$$\alpha_2 = (v + \beta_2 + \delta_2)$$

$$\alpha_3 = vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)$$

Persamaan diatas dapat diubah menjadi bentuk berikut:

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad (7)$$

dengan:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = (v + \beta_1 + \delta_2) + (v + \beta_2 + \delta_2) - (vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2))$$

$$a_2 = (v + \beta_1 + \delta_2)(v + \beta_2 + \delta_2) - (v + \beta_1 + \delta_2)(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2))$$

$$- (v + \beta_2 + \delta_2)(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)) - \beta_1\rho\hat{S}$$

$$a_3 = \beta_1\rho\hat{S}(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)) - (v + \beta_1 + \delta_2)(v + \beta_2 + \delta_2)(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2))$$

$$- \beta_1\rho\theta\hat{S}P_2\beta_2$$

Berdasarkan kriteria Routh Horwitz, dengan menggunakan persamaan karakteristik (7), yaitu

jika  $a_1 > 0$ ,  $a_3 > 0$ , dan  $a_1a_2 > a_3$  titik kesetimbangan bebas penyakit  $(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \hat{C}, \hat{R})$  adalah stabil asimotik. Hal ini menunjukkan bahwa pada populasi tidak terjadi penyebaran penyakit.

### Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit

**Teorema 2** Jika :

(a)  $v + \beta_3 + u_2 + \delta_2 > vP_1$

(b)  $v + \delta_1 > (v + u_1 + \delta_2)S^*$

(c)  $\rho^2\beta_1S^*(I^* + \theta C^*) + b_1b_2b_3 + (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)((v + \beta_3 + u_2 + \delta_2) - vP_1) > \rho\beta_1S^*(\theta P_2\beta_2 + b_1 + ((v + \beta_3 + u_2 + \delta_2) - vP_1))$

(d)  $\rho\beta_1(I^* + \theta C^*)(P_2\beta_2vP_1 + \rho\theta S^* + \rho S^*((v + \beta_3 + u_2 + \delta_2) - vP_1)) + b_1b_2b_3((v + \beta_3 + u_2 + \delta_2) - vP_1) > \rho\beta_1b_1S^*((v + \beta_3 + u_2 + \delta_2) - vP_1) + \theta P_2\beta_2$ , dan

(e)  $f_3(f_1f_2 - f_3) > f_1^2f_4$

dengan :

$$b_1 = \rho(I^* + \theta C^*) + (v + u_1 + \delta_2)$$

$$b_2 = (v + \beta_1 + \delta_2)$$

$$b_3 = (v + \beta_2 + \delta_2) \quad b_4 = vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)$$

$$f_1 = b_1 + b_2 + b_3 - b_4$$

$$f_2 = b_1b_2 + b_1b_3 - b_1b_4 + b_2b_3 - b_2b_4 - b_3b_4 - \rho\beta_1S^*$$

$$f_3 = \rho\beta_1\theta C^*S^* + b_1b_2b_3 - b_1b_2b_4 - b_2b_3b_4 - \rho\beta_1\theta S^*P_2\beta_2 - \rho\beta_1S^*b_1 + \rho\beta_1S^*b_4 + \rho^2\beta_1I^*S^*$$

$$f_4 = \rho\beta_1\theta C^*P_2\beta_2vP_1 + \rho\beta_1I^*P_2\beta_2vP_1 + \rho^2\beta_1\theta I^*S^*P_2\beta_2 + \rho^2\beta_1\theta^2 C^*S^*P_2\beta_2 + \rho\beta_1S^*b_1b_4 - \rho^2\beta_1\theta C^*S^*b_4 - b_1b_2b_3b_4 - \rho\beta_1\theta S^*P_2\beta_2b_1 - \rho^2\beta_1I^*S^*b_4$$

Maka titik kesetimbangan endemic penyakit stabil asimtotik lokal.

**Bukti :**

Kestabilan titik kesetimbangan endemic penyakit diperoleh dengan cara mensubstitusikan titik kesetimbangan endemic penyakit  $(S^*, E^*, I^*, C^*, R^*)$  ke matriks Jacobian pada Persamaan (5).

Sehingga diperoleh  $|J_{(S^*, E^*, I^*, C^*, R^*)} - \lambda|$  sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & (-v + \delta_2) - \lambda)(-\rho(I^* + \theta C^*) - (v + u_1 + \delta_2) - \lambda)(-v + \beta_1 + \delta_2) - \lambda)(-v + \beta_2 + \delta_2) - \lambda)(vP_1 - \\ & (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2) - \lambda) - \beta_1\rho S^*(-\rho(I^* + \theta C^*) - (v + u_1 + \delta_2) - \lambda)(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2) - \lambda) + \\ & \beta_1\rho\theta S^*P_2\beta_2(-\rho(I^* + \theta C^*) - (v + u_1 + \delta_2) - \lambda) - \beta_1\rho^2 S^*(I^* + \theta C^*)(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2) - \\ & \lambda) + \beta_1P_2\beta_2(\rho(I^* + \theta C^*)(vP_1 + \rho\theta S^*)) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Berdasarkan Persamaan (8) diperoleh nilai untuk  $\lambda_1$  yaitu  $\lambda_1 = -(v + \delta_2)$  yang mempunyai nilai eigen bernilai negatif. Selanjutnya akan dicari nilai eigen untuk  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4,$  dan  $\lambda_5$  sebagai berikut :

Misalkan :

$B$

$$= \begin{bmatrix} -\rho(I^* + \theta C^*) - (v + u_1 + \delta_2) - \lambda & 0 & -\rho S^* & -(vP_1 + \rho\theta S^*) \\ \rho(I^* + \theta C^*) & -(v + \beta_1 + \delta_2) - \lambda & \rho S^* & \rho\theta S^* \\ 0 & \beta_1 & -(v + \beta_2 + \delta_2) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & P_2\beta_2 & vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2) - \lambda \end{bmatrix}$$

Untuk  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4,$  dan  $\lambda_5$  didapat dari determinan matriks  $B$ , sehingga diperoleh persamaan karakteristik dari matriks  $B$  sebagai berikut :

$$\begin{aligned} & (-b_1 - \lambda)(-b_2 - \lambda)(-b_3 - \lambda)(b_4 - \lambda) - (-b_1 - \lambda)\beta_1\rho S^*(b_4 - \lambda) + (-b_1 - \lambda)\beta_1\rho\theta S^*P_2\beta_2 \\ & - \rho(I^* + \theta C^*)\beta_1\rho S^*(b_4 - \lambda) + \rho(I^* + \theta C^*)\beta_1P_2\beta_2(vP_1 + \rho\theta S^*) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \lambda^4 + (b_1 + b_2 + b_3 - b_4)\lambda^3 + (b_1b_2 + b_1b_3 - b_1b_4 + b_2b_3 - b_2b_4 - b_3b_4 - \beta_1\rho S^*)\lambda^2 + (\rho^2\beta_1\theta C^*S^* + b_1b_2b_3 - b_1b_2b_4 - b_1b_3b_4 - b_2b_3b_4 - \rho\beta_1\theta S^*P_2\beta_2 - b_1\beta_1\rho S^* + \beta_1\rho S^*b_4 + \rho^2\beta_1I^*S^*)\lambda + (\rho\beta_1\theta C^*P_2\beta_2vP_1 + \rho\beta_1I^*P_2\beta_2vP_1 + \rho^2\beta_1\theta I^*S^*P_2\beta_2 + \rho^2\beta_1\theta^2 C^*S^*P_2\beta_2 + \rho\beta_1S^*b_1b_4 - \rho^2\beta_1\theta C^*S^*b_4 - b_1b_2b_3b_4 - \rho\beta_1\theta S^*P_2\beta_2b_1 - \rho^2\beta_1I^*S^*b_4) = 0$$

dengan :

$$\begin{aligned} b_1 &= \rho(I^* + \theta C^*) + (v + u_1 + \delta_2) & b_3 &= (v + \beta_2 + \delta_2) \\ b_2 &= (v + \beta_1 + \delta_2) & b_4 &= vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2) \end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat diubah menjadi bentuk berikut:

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \quad (9)$$

dengan:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = (\rho(I^* + \theta C^*) + (v + u_1 + \delta_2)) + (v + \beta_1 + \delta_2) + (v + \beta_2 + \delta_2) - (vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2))$$

$$\begin{aligned} a_2 &= (\rho(I^* + \theta C^*) + (v + u_1 + \delta_2))(v + \beta_1 + \delta_2) + (\rho(I^* + \theta C^*) + (v + u_1 + \delta_2))(v + \beta_2 + \delta_2) \\ &\quad - (\rho(I^* + \theta C^*) + (v + u_1 + \delta_2))(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)) \\ &\quad + (v + \beta_1 + \delta_2)(v + \beta_2 + \delta_2) - (v + \beta_1 + \delta_2)(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)) \\ &\quad - (v + \beta_2 + \delta_2)(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)) - \beta_1\rho S^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= \rho^2\beta_1\theta C^*S^* + (\rho(I^* + \theta C^*) + (v + u_1 + \delta_2))(v + \beta_1 + \delta_2)(v + \beta_2 + \delta_2) \\ &\quad - (\rho(I^* + \theta C^*) + (v + u_1 + \delta_2))(v + \beta_1 + \delta_2)(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)) \\ &\quad - (\rho(I^* + \theta C^*) + (v + u_1 + \delta_2))(v + \beta_2 + \delta_2)(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)) \\ &\quad - (v + \beta_1 + \delta_2)(v + \beta_2 + \delta_2)(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)) - \rho\beta_1\theta S^*P_2\beta_2 \\ &\quad - (\rho(I^* + \theta C^*) + (v + u_1 + \delta_2))\beta_1\rho S^* + \beta_1\rho S^*(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)) + \rho^2\beta_1I^*S^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_4 = & \rho\beta_1\theta C^*P_2\beta_2vP_1 + \rho\beta_1I^*P_2\beta_2vP_1 + \rho^2\beta_1\theta I^*S^*P_2\beta_2 + \rho^2\beta_1\theta^2C^*S^*P_2\beta_2 \\
 & + \rho\beta_1S^*(\rho(I^* + \theta C^*) + (v + u_1 + \delta_2))(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)) \\
 & - \rho^2\beta_1\theta C^*S^*(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)) \\
 & - (\rho(I^* + \theta C^*) + (v + u_1 + \delta_2))(v + \beta_1 + \delta_2)(v + \beta_2 + \delta_2)(vP_1 \\
 & - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2)) - \rho\beta_1\theta S^*P_2\beta_2(\rho(I^* + \theta C^*) + (v + u_1 + \delta_2)) \\
 & - \rho^2\beta_1I^*S^*(vP_1 - (v + \beta_3 + u_2 + \delta_2))
 \end{aligned}$$

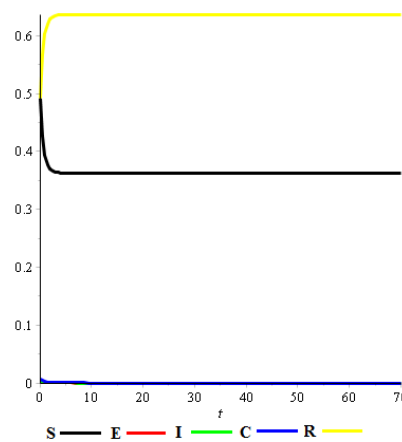
Berdasarkan kriteria Routh Horwitz, dengan menggunakan persamaan karakteristik (9), yaitu jika  $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ , dan  $a_1a_2a_3 > a_3^2 + a_1^2a_4$  titik kesetimbangan endemic penyakit adalah stabil asimotik. Hal ini menyatakan bahwa selalu ada individu yang terinfeksi di dalam populasi.

### 3. Simulasi

#### Simulasi Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Nilai parameter yang digunakan pada simulasi titik kesetimbangan bebas penyakit model epidemik SEICR, yaitu sebagai berikut :

Parameter	Nilai
$v$	0,0121
$\rho$	0.8
$\theta$	0,5
$\beta_1$	6 per tahun
$\beta_2$	4 per tahun
$\beta_3$	0,025 per tahun
$P_1$	0.11
$P_2$	0.5
$u_1$	0.9
$u_2$	0.9
$\delta_1$	0.5
$\delta_2$	0.5
$S_0$	0.493
$E_0$	0.0035
$I_0$	0.0035
$C_0$	0.007
$R_0$	0.493



Gambar 1. Simulasi Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

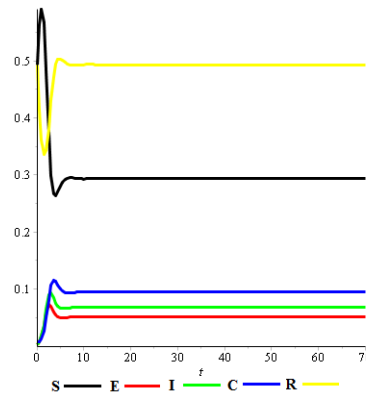
Berdasarkan Gambar 1 terlihat bahwa populasi  $S$  mengalami penurunan karena terjadinya emigrasi, kematian alami, serta adanya populasi yang terjangkit virus hepatitis B, serta berpindahnya populasi ke kelas recovered karena adanya vaksinasi. Penurunan populasi pada kelas *exposed* disebabkan karena adanya kematian alami, emigrasi dan laju perubahan individu yang terjangkit menjadi terinfeksi. Sementara itu populasi pada kelas *infective* ( $I$ ), dan juga kelas *chronic carrier* ( $C$ ) mengalami penurunan secara signifikan menuju nol yang disebabkan karena populasi berada dalam kondisi bebas penyakit sehingga penyakit tidak dapat bertahan didalam populasi, artinya dalam waktu tertentu individu yang terinfeksi akan hilang dari populasi. Populasi  $R$  mengalami peningkatan karena terjadinya perpindahan dari kelas *susceptible*, *Infected*, serta *Chronic Carrier*.

#### Simulasi Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit

Parameter	Nilai
$v$	0,0121
$\rho$	9,845
$\theta$	0,5

$\beta_1$	6 per tahun
$\beta_2$	4 per tahun
$\beta_3$	0,025 per tahun
$P_1$	0.11
$P_2$	0.5
$u_1$	0.1
$u_2$	0.9
$\delta_1$	0.5
$\delta_2$	0.5
$S_0$	0.493
$E_0$	0.0035
$I_0$	0.0035
$C_0$	0.007
$R_0$	0.493

Nilai parameter yang digunakan pada simulasi titik kesetimbangan endemik penyakit model epidemic SEICR, yaitu sebagai berikut :



Gambar 2. Simulasi Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit

Berdasarkan Gambar 2 terlihat bahwa populasi  $S$  mengalami penurunan karena terjadinya emigrasi, kematian alami, serta adanya populasi yang terjangkit virus hepatitis B, serta berpindahnya populasi ke kelas recovered karena adanya vaksinasi. Sementara itu populasi pada kelas *exposed* ( $E$ ), *infective* ( $I$ ), dan *chronic carrier* ( $C$ ) meningkat namun selanjutnya mengalami penurunan karena adanya pengobatan terhadap individu yang sudah terjangkit virus hepatitis B. Populasi  $R$  mengalami peningkatan karena terjadinya perpindahan dari kelas *susceptible*, *Infected*, serta *Chronic Carrier*, selanjutnya masing-masing kelas bergerak konstan menuju titik kesetimbangan endemik penyakit. Hal ini menunjukkan bahwa di dalam populasi tersebut selalu terdapat individu yang terinfeksi virus hepatitis B.

#### 4. Kesimpulan

Model SEICR penyebaran virus hepatitis B di bawah pengaruh vaksinasi dan pengobatan dengan adanya migrasi memiliki dua titik kesetimbangan yaitu,

a Titik kesetimbangan bebas penyakit  $(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \hat{C}, \hat{R}) = \left( \frac{v+\delta_1}{(v+u_1+\delta_2)}, 0, 0, 0, \frac{u_1(v+\delta_1)}{(v+\delta_2)(v+u_1+\delta_2)} \right)$ . Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal jika memenuhi Teorema 1, yang artinya dalam waktu yang lama penyakit akan hilang dari populasi.

b Titik kesetimbangan endemik penyakit  $(S^*, E^*, I^*, C^*, R^*)$ , dengan :

$$S^* = \frac{(v + \beta_1 + \delta_2)(v + \beta_3 + u_2 + \delta_2 - vP_1)(v + \beta_2 + \delta_2)}{\rho\beta_1((v + \beta_3 + u_2 + \delta_2 - vP_1) + \theta P_2\beta_2)}$$

$$E^* = \frac{(v + \delta_1 - (v + u_1 + \delta_2)S^*)(v + \beta_3 + u_2 + \delta_2 - vP_1)(v + \beta_2 + \delta_2)}{\beta_1(vP_1.P_2\beta_2 + (\rho(v + \beta_3 + u_2 + \delta_2 - vP_1) + \rho\theta.P_2\beta_2)S^*)}$$

$$I^* = \frac{(v + \delta_1 - (v + u_1 + \delta_2)S^*)(v + \beta_3 + u_2 + \delta_2 - vP_1)}{(vP_1.P_2\beta_2 + (\rho(v + \beta_3 + u_2 + \delta_2 - vP_1) + \rho\theta.P_2\beta_2)S^*)}$$

$$C^* = \frac{P_2\beta_2.(v + \delta_1 - (v + u_1 + \delta_2)S^*)}{vP_1.P_2\beta_2 + (\rho(v + \beta_3 + u_2 + \delta_2 - vP_1) + \rho\theta.P_2\beta_2)S^*}$$

$$R^* = \frac{u_1S^* + (\beta_3 + u_2)C^* + (1 - P_2)\beta_2I^*}{(v + \delta_2)}$$

Titik kesetimbangan endemik penyakit stabil asimtotik local jika memenuhi Teorema2, berarti dalam waktu yang lama penyakit akan terus ada dalam populasi.

## DaftarPustaka

- [1] Abdalla, Hasim Obaid Ahmed. “*Construction and Analysis of Efficient Numerical Methods to Solve Mathematical Models of TB and HIV Co-infection*”. Department of Mathematics and Applied Mathematics at the Faculty of Natural Sciences, University of the Western Cape:2011.
- [2] Anton, Howard. *Aljabar Linear Elementer*. Edisi Kelima. Jakarta: Erlangga. 1987.
- [3] Braun, M. *Differential Equations and Their Applications*. New York: Springer-Verlag. 1978.
- [4] Conte, S.D. & De Boor, C. *Dasar-dasar Analisis Numerik: Suatu Pendekatan Algoritma*. Erlangga: Jakarta. 1993.
- [5] Finizo dan Ladaz. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga. 1998.
- [6] Hale, J. K. dan H. Kocak. *Dynamic Bifurcation*, Springer-Verlag, New York. 1991.
- [7] J. Pang, J.-A. cui, and X. Zhou. “*Dynamical Behavior of a Hepatitis B Virus Transmissions Model with Vaccination*”. Journal of Heoretical Biology Vol. 265, No. 4, pp. 572-578. 2010.
- [8] Kamyad, Ali Vahidin, dkk. “*Mathematical Modeling of Transmission Dynamics and Optimal Control of Vaccination and Treatment for hepatitis B Virus*”. Hindawi publishing corporation Vol. 2014, Article ID 475451. 2014.
- [9] Olsder, G.J, and J. W. Woude. *Mathematical System Theory*. Delftse Uitgevers Maatschappij. Netherlands. 2003.
- [10] Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems Third Edition*.Springer-Verlag, New York. 2001.
- [11] Waluyo, S.B. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu. 2006.
- [12] WHO, *Hepatitis B Fact Sheet No. 204*, the World Health Organization, Geneva, Switzerland. 2013.
- [13] Zhang, Suxia and Y. Zhou. “*The Analysis and Application of an HBV Model*”. Applied Mathematical Modelling Vol. 36, No. 3, pp. 1302-1312. 2012.