ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Invers Matriks Toeplitz-Hessenberg Bentuk Khusus Menggunakan Metode Faddeev

Rahmawati[1], Saniyah[2], Ade Novia Rahma[3]
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
e-mail: rahmawati@uin-suska.ac.id, saniyahniyah02@gmail.com, ade.novia.rahma@uin-suska.ac.id

Abstrak

Salah satu metode untuk menentukan invers suatu matriks adalah metode metode dalam Faddeev. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan invers matriks Toeplitz-Hessenberg bentuk khusus menggunakan metode tersebut. Langkah-langkah yang dilakukan dalam pembentukan rumus umum invers matriks Toeplitz-Hessenberg bentuk khusus yang pertama menentukan nilai invers matriks tersebut dimulai dari ordo 2×2 *sampai ordo* 7×7*, yang kedua menentukan bentuk umum invers matriks Toeplitz-Hessenberg bentuk khusus dan membuktikannya dengan menggunakan pembuktian langsung. Hasil akhir dari penelitian ini diperoleh bentuk umum invers matriks Toeplitz-Hessenberg bentuk khusus.*

Kata kunci: *invers matriks , matriks Toeplitz, matriks Toeplitz-Hessenberg, metode Faddeev*

Abstract

The One of method for determining the inverse of matrix is Faddeev's method. This research purpose to determine inverse matrix of the special form of Toeplitz-Hessenberg using this method. The steps taken in the general formation inverse matrix of the special form of Toeplitz-Hessenberg starting from the order 2×2 *to order* 7×7*, the second step determine the general form inverse matrix of the special form of Toeplitz-Hessenberg and prove it using direct evidence. The final results of this study obtained general form of inverse matrix of the special form of Toeplitz-Hessenberg.*

Keywords*: inverse matrices, matrix Toeplitz, matrix Toeplitz-Hessenberg , Faddeev method*

1. Pendahuluan

Menurut [1], suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks. Terdapat beberapa jenis matriks diantaranya adalah matriks Toeplitz, matriks Hessenberg, matriks Toeplitz-Hessenberg dan lain sebagainya. Menurut [4], sebuah matriks Toeplitz adalah matriks berukuran $n\times n$ dinotasikan sebagai $T_n=[t_{kj};k,j=0,1,\cdots,n-1]$, dengan $t_{kj}=t_{k-j}$ sebuah matriks dengan formula :

$$T_n=\begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Matriks Hessenberg merupakan matriks bujur sangkar yang hampir menyerupai matriks segitiga. Perbedaannya adalah pada matriks segitiga (atas/bawah) entri-entri di bawah atau di atas diagonal utamanya bernilai *0*, sedangkan pada matriks Hessenberg (atas/bawah) entri-entri di bawah atau di atas diagonal kedua (di atas/di bawah diagonal utama) yang bernilai *0*. Mengenai matriks Hassenberg atas dijelaskan dalam [3] dan matriks Hassenberg bawah yang hanya disebut sebagai matriks Hassenberg dijelaskan dalam [6]. Sebuah matriks berukuran $n\times n$, $K_n=[h_{ij}]$ disebut matriks Hessenberg jika $h_{ij}=0$ untuk $j-i>1$, yaitu :

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$K_n = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \cdots & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n-1,1} & h_{n-1,2} & h_{n-1,2} & \cdots & h_{n-1,n} \\ h_{n,1} & h_{n,2} & h_{n,2} & \cdots & h_{n,n} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Gabungan dari matriks Toeplitz pada Persamaan (1) dan matriks Hassenberg pada Persamaan (2) disebut matriks Toeplitz-Hassenberg. Menurut [7], bentuk umum matriks Teoplitz-Hessenberg adalah sebagai berikut :

$$H_n = \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \cdots & h_1 & h_0 \\ h_n & h_{n-1} & h_{n-2} & \cdots & h_2 & h_1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

dimana $h_0, h_k \neq 0$ untuk setiap $k = 1,2,\cdots,n$.

Terdapat beberapa pengoperasian matriks diantaranya penjumlahan matriks, perkalian matriks, determinan matriks dan invers matriks. Untuk menentukan invers matriks, terdapat beberapa metode diantaranya adalah metode ekspansi kofaktor, metode adjoin, dekomposisi Adomian, metode Faddev dan lain sebagainya. Beberapa penelitian mengenai invers matriks telah dilakukan oleh beberapa peneliti terdahulu seperti halnya, pada tahun 2014, [9] meneliti mengenai invers matriks Toeplitz bentuk khusus menggunakan metode Adjoin. Pada tahun 2015, [10] membahas mengenai invers drazin dari suatu matriks *singular* menggunakan metode Laverrier Faddev. Metode Laverrier Faddev ini merupakan metode yang digunakan untuk menentukan invers suaru matriks singular maupun non singular dengan cara menyederhanakan perhitungan koefisien polynomial karakteristik dari suatu matriks. Dalam penelitian tersebut disimpulkan bahwa matriks singular juga memiliki invers sama halnya dengan matriks non singular. Pada tahun 2016, [8] melakukan penelitian mengenai penyelesaian sistem persamaan linier kompleks dengan Invers matriks menggunakan metode Faddeev. Hasil yang diperoleh adalah solusi dari sistem persamaan linier kompleks dengan metode invers matriks menggunakan metode Faddeev yaitu $x = A^{-1}b$. Selanjutnya, Pada tahun 2017, [5] meneliti Invers dari suatu matriks positif menggunakan metode Adjoin. Dalam penelitian tersebut diperoleh hasil berupa bentuk umum determinan dan invers dari matriks positif bentuk khusus berorde *n* .

2. Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, dibentuk suatu matriks Toeplitz-Hessenberg bentuk khusus, sebagai berikut :

$$H_n = \begin{bmatrix} b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ b & b & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & b & a \\ b & b & b & \cdots & b & b \end{bmatrix} \quad \text{untuk } a,b \in R \tag{4}$$

dengan mengganti $h_0 = a \neq 0$ dan $h_k = b \neq 0,\ k = 1,2,\cdots,n$ pada Persamaan (3). Selanjutnya dalam penelitian ini akan ditentukan invers matriks Toeplitz-Hessenberg H_n pada Persamaan (4) yang dimulai dari ordo 2 x 2 sampai ordo 6 x 6 menggunakan Metode Faddev. Setelah itu, dengan melihat pola rekursif dari hasil-hasil invers matriks yang didapatkan persamaan umum invers

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

matriks Toeplitz-Hessenberg H_n Persamaan (4). Adapun beberapa landasan teori yang berkaitan dalam penelitian ini diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.1 [1] Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks.

Definisi 2.2 [1] Jika A adalah matriks bujur sangkar, dan jika terdapat matriks *B* yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga *AB=BA=I*, maka *A* disebut dapat dibalik (*invertible*) dan *B* disebut sebagai invers (*inverse*) dari *A*. Jika matriks *B* tidak dapat didefinisikan, maka *A* dinyatakan sebagai matriks *singular*.

Definisi 2.3 [1] Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka *trace* dari A yang dinyatakan sebagai $Tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama dari A. *Trace* dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks bujur sangkar.

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{5}$$

Definisi 2.4 [2] Metode Faddeev adalah metode yang dimodifikasi khusus dari metode Leverrier-Takeno oleh Faddeev dkk. untuk menentukan invers dengan cara menyederhanakan perhitungan koefisien polinomial karakteristik dari suatu matriks.
Bentuk dari metode Faddeev adalah sebagai berikut :

$$\begin{array}{llllll}
A_1 = A & ; & q_1 = \dfrac{tr(A_1)}{1} & ; & B_1 = A_1 - q_1 I \\
A_2 = B_1 A & ; & q_2 = \dfrac{tr(A_2)}{2} & ; & B_2 = A_2 - q_2 I \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
A_{n-1} = B_{n-2} A & ; & q_{n-1} = \dfrac{tr(A_{n-1})}{n-1} & ; & B_{n-1} = A_{n-1} - q_{n-1} I \\
A_n = B_{n-1} A & ; & q_n = \dfrac{tr(A_n)}{n}; & ; & B_n = A_n - q_n I
\end{array}$$

Dengan inversnya yaitu :

$$A^{-1} = \frac{1}{q_n} B_{n-1} \tag{6}$$

3. Hasil Pembahasan

Pembahasan ini bertujuan mendapatkan bentuk umum invers matriks Toeplitz-Hessenberg bentuk khusus pada Persamaan (4) dengan menggunakan metode Faddeev . Penelitian ini dimulai dengan mengamati pola dari nilai B_{n-1} dan q_n dari matriks Toeplitz-Hessenberg pada Persamaan (4) yang berordo 2×2 sampai 6×6. Selanjutnya untuk mencari H_n^{-1}, digunakan rumus persamaan (5). Berikut diberikan langkah-langkahnya :
Untuk ordo $n = 2,$ dengan menggunakan Metode Faddev diperoleh matriks Toeplitz-Hesssenberg bentuk khusus Persamaan (4) ordo 2×2 yaitu:

$$H_2 = A_1 = \begin{bmatrix} b & a \\ b & b \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan Definisi 2.3, maka diperoleh $tr(A_1) = 2b$ dan didapat

$$q_1 = \frac{tr(A_1)}{1} = \frac{2b}{1} = 2b$$

Selanjutnya, dicari nilai B_1 yaitu

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$
\begin{aligned}
B_1 &= A_1 - q_1 I \\
&= \begin{bmatrix} b & a \\ b & b \end{bmatrix} - 2b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -b & a \\ b & -b \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya menentukan A_2 yaitu :

$$
\begin{aligned}
A_2 &= B_1 A_1 \\
&= \begin{bmatrix} -b & a \\ b & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & a \\ b & b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -b^2 + ab & 0 \\ 0 & -b^2 + ab \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

dengan menggunakan Definisi 2.2, maka diperoleh:

$$tr(A_2) = 2\,(-b^2 + ab)$$

sehingga didapat q_2 yaitu :

$$
\begin{aligned}
q_2 &= \frac{tr(A_2)}{2} \\
&= \frac{2\,(-b^2 + ab)}{2} \\
&= -b^2 + ab
\end{aligned}
$$

maka invers dari matriks H_2 dengan menggunakan rumus Persamaan (6) yaitu:

$$H_2^{-1} = \frac{1}{q_2} B_1 = \frac{1}{(-b^2 + ab)} \begin{bmatrix} -b & a \\ b & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b}{b^2 - ab} & \dfrac{-a}{b^2 - ab} \\ -\dfrac{b}{b^2 - ab} & \dfrac{b}{b^2 - ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(-1)^0}{(b-a)} & \dfrac{(-1)^1 a}{b(b-a)} \\ \dfrac{(-1)^1}{(b-a)^1} & \dfrac{(-1)^0}{(b-a)} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Dengan menggunakan cara yang sama, untuk ordo $n = 3, n = 4, n = 5,$ dan $n = 6$ diperoleh

$$H_3^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{(-1)^0}{(b-a)} & \dfrac{(-1)^1 a}{(b-a)^2} & \dfrac{(-1)^2 a^2}{b(b-a)^2} \\ \dfrac{(-1)^1}{(b-a)} & \dfrac{(-1)^0 b}{(b-a)^2} & \dfrac{(-1)^1 a}{(b-a)^2} \\ 0 & \dfrac{(-1)^1}{(b-a)} & \dfrac{(-1)^0}{(b-a)} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$H_4^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{(-1)^0}{(b-a)} & \dfrac{(-1)^1 a}{(b-a)^2} & \dfrac{(-1)^2 a^2}{(b-a)^3} & \dfrac{(-1)^3 a^3}{b(b-a)^3} \\ \dfrac{(-1)^1}{(b-a)} & \dfrac{(-1)^0 b}{(b-a)^2} & \dfrac{(-1)^1 ab}{(b-a)^3} & \dfrac{(-1)^2 a^2}{(b-a)^3} \\ 0 & \dfrac{(-1)^1}{(b-a)} & \dfrac{(-1)^0 b}{(b-a)^2} & \dfrac{(-1)^1 a}{(b-a)^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{(-1)^1}{(b-a)} & \dfrac{(-1)^0}{(b-a)} \end{bmatrix} \tag{9}$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$H_5^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{(b-a)} & \frac{(-1)^1 a}{(b-a)^2} & \frac{(-1)^2 a^2}{(b-a)^3} & \frac{(-1)^3 a^3}{(b-a)^4} & \frac{(-1)^4 a^4}{b(b-a)^4} \\ \frac{(-1)^1}{(b-a)} & \frac{(-1)^0 b}{(b-a)^2} & \frac{(-1)^1 ab}{(b-a)^3} & \frac{(-1)^2 a^2 b}{(b-a)^4} & \frac{(-1)^3 a^3}{(b-a)^4} \\ 0 & \frac{(-1)^1}{(b-a)} & \frac{(-1)^0 b}{(b-a)^2} & \frac{(-1)^1 ab}{(b-a)^3} & \frac{(-1)^2 a^2}{(b-a)^3} \\ 0 & 0 & \frac{(-1)^1}{(b-a)} & \frac{(-1)^0 b}{(b-a)^2} & \frac{(-1)^1 a}{(b-a)^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(-1)^1}{(b-a)} & \frac{(-1)^0}{(b-a)} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$H_6^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{(b-a)} & \frac{(-1)^1 a}{(b-a)^2} & \frac{(-1)^2 a^2}{(b-a)^3} & \frac{(-1)^3 a^3}{(b-a)^4} & \frac{(-1)^4 a^4}{(b-a)^5} & \frac{(-1)^5 a^5}{b(b-a)^5} \\ \frac{(-1)^1}{b(b-a)} & \frac{(-1)^0 b}{(b-a)^2} & \frac{(-1)^1 ab}{b(b-a)^3} & \frac{(-1)^2 a^2 b}{(b-a)^4} & \frac{(-1)^3 a^3 b}{(b-a)^5} & \frac{(-1)^4 a^4}{(b-a)^5} \\ 0 & \frac{(-1)^1}{(b-a)} & \frac{(-1)^0 b}{(b-a)^2} & \frac{(-1)^1 ab}{(b-a)^3} & \frac{(-1)^2 a^2 b}{(b-a)^4} & \frac{(-1)^3 a^3}{(b-a)^4} \\ 0 & 0 & \frac{(-1)^1}{(b-a)} & \frac{(-1)^0 b}{(b-a)^2} & \frac{(-1)^1 ab}{(b-a)^3} & \frac{(-1)^2 a^2}{(b-a)^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(-1)^1}{(b-a)} & \frac{(-1)^0 b}{(b-a)^2} & \frac{(-1)^1 a}{(b-a)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(-1)^1}{(b-a)} & \frac{(-1)^0}{(b-a)} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Dengan mengamati pola rekursif dari Persamaan (6) sampai Persamaan (11), maka didapatkan bentuk umum invers dari matriks Toeplitz-Hessenberg bentuk khusus Persamaan (4) seperti yang diberikan pada Teorema 1 sebagai berikut.

Teorema 1. Diberikan H_n suatu matriks Toeplitz-Hessenberg bentuk khusus berorde $n \geq 2$ pada Persamaan (3) dengan $a,b \neq 0 \in R$ maka invers dari matriks H_n adalah :

$$H_n^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{(b-a)} & \frac{(-1)^1 a}{(b-a)^2} & \frac{(-1)^2 a^2}{(b-a)^3} & \cdots & \frac{(-1)^{n-2} a^{n-2}}{(b-a)^{n-1}} & \frac{(-1)^{n-1} a^{n-1}}{b(b-a)^{n-1}} \\ \frac{(-1)^1}{(b-a)} & \frac{(-1)^0 b}{(b-a)^2} & \frac{(-1)^1 ab}{(b-a)^3} & \cdots & \frac{(-1)^{n-3} a^{n-3} b}{(b-a)^{n-1}} & \frac{(-1)^{n-2} a^{n-2}}{(b-a)^{n-1}} \\ 0 & \frac{(-1)^1}{(b-a)} & \frac{(-1)^0 b}{(b-a)^2} & \cdots & \frac{(-1)^{n-4} a^{n-4} b}{(b-a)^{n-2}} & \frac{(-1)^{n-3} a^{n-3}}{(b-a)^{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{(-1)^0 b}{(b-a)^2} & \frac{(-1)^1 a}{(b-a)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{(-1)^1}{(b-a)} & \frac{(-1)^0}{(b-a)} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Bukti :

Untuk membuktikan Persamaan (12), maka dilakukan dengan menggunakan Pembuktian Langsung, yaitu cukup dengan menggunakan sifat dari invers matriks yaitu $H_n.H_n^{-1} = H_n^{-1}.H_n = I$. Selanjutnya akan dibuktikan pembuktian invers kanan $H_n.H_n^{-1} = I$.

 ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$H_n \cdot H_n^{-1} = \begin{bmatrix} b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ b & b & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & b & a \\ b & b & b & \cdots & b & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{(-1)^0}{(b-a)} & \frac{(-1)^1 a}{(b-a)^2} & \frac{(-1)^2 a^2}{(b-a)^3} & \cdots & \frac{(-1)^{n-2} a^{n-2}}{(b-a)^{n-1}} & \frac{(-1)^{n-1} a^{n-1}}{b(b-a)^{n-1}} \\ \frac{(-1)^1}{(b-a)} & \frac{(-1)^0 b}{(b-a)^2} & \frac{(-1)^1 ab}{(b-a)^3} & \cdots & \frac{(-1)^{n-3} a^{n-3} b}{(b-a)^{n-1}} & \frac{(-1)^{n-2} a^{n-2}}{(b-a)^{n-1}} \\ 0 & \frac{(-1)^1}{(b-a)} & \frac{(-1)^0 b}{(b-a)^2} & \cdots & \frac{(-1)^{n-4} a^{n-4} b}{(b-a)^{n-2}} & \frac{(-1)^{n-3} a^{n-3}}{(b-a)^{n-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{(-1)^0 b}{(b-a)^2} & \frac{(-1)^1 a}{(b-a)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{(-1)^1}{(b-a)} & \frac{(-1)^0}{(b-a)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I$$

Hal ini dapat dianalisa sebagai berikut,

a. Untuk entri i_{11} , jika diperhatikan perkalian dua matriks tersebut, untuk baris pertama pada matriks H_n dengan kolom pertama pada matriks H_n^{-1} mempunyai dua entri yang bernilai, selebihnya nol. Apabila baris dan kolom tersebut dikalikan, maka akan menghasilkan nilai satu.

b. Untuk entri i_{22} , jika diperhatikan perkalian dua matriks tersebut, untuk baris ke-2 pada matriks H_n dengan kolom ke-2 pada matriks H_n^{-1} mempunyai tiga entri yang bernilai, selebihnya nol. Apabila baris dan kolom tersebut dikalikan, maka akan menghasilkan nilai satu.

c. Untuk entri i_{33}, jika diperhatikan perkalian dua matriks tersebut, untuk baris ke-3 pada matriks H_n dengan kolom ke-3 pada matriks H_n^{-1} mempunyai tiga entri yang bernilai, selebihnya nol. Apabila baris dan kolom tersebut dikalikan, maka akan menghasilkan nilai satu.

d. Begitu seterusnya hingga untuk entri i_{nn}, jika diperhatikan perkalian dua matriks tersebut, untuk baris ke-*n* pada matriks H_n dengan kolom ke-*n* pada matriks H_n^{-1} mempunyai *n* entri yang bernilai, selebihnya nol. Apabila baris dan kolom tersebut dikalikan, maka akan menghasilkan nilai satu.

e. Untuk entri lainnya selain entri pada diagonal utama, yaitu entri i_{jk} dengan $j \neq k$, jika diperhatikan perkalian dua matriks tersebut, untuk baris ke-*j* pada matriks H_n dengan kolom ke-*k* pada matriks H_n^{-1} maka akan menghasilkan nilai yang sama dengan tanda yang berbeda sehingga apabila dijumlahkan maka akan menghasilkan nilai nol.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Dengan menggunakan cara yang sama, diperoleh pembuktian Invers Kiri yaitu $H_n^{-1}.H_n = I$, sehingga dapat disimpulkan $H_n.H_n^{-1} = I = H_n^{-1}.H_n$. Persamaan (12) terbukti.

4. Kesimpulan

Invers Matriks Toeplitz-Hessenberg bentuk khusus berordo $n \geq 2$ pada Persamaan (4) diberikan pada Persamaan (12).

5. Saran

Dalam penelitian ini dibahas mengenai bentuk umum invers matriks Toeplitz-Hessenberg bentuk khusus menggunakan metode Faddeev. Disarankan kepada pembaca untuk dapat melanjutkan penelitian yang berhubungan dengan invers matriks dengan matriks dan metode yang berbeda.

Daftar Pustaka

[1] Anton, Howard., dan Rorres, Chris., "*Dasar-Dasar Aljabar Linear Versi Aplikasi"*, Edisi Ketujuh, Erlangga, Jakarta, 2004.
[2] Caltenco, J.H. " Characteristic polynomial of A and Faddeev's method for A^{-1}", *Educatia Matematica*, 3, 107-112, 2007
[3] Fiedler, M dan Vavrin, Z. " Generalized Hessenberg Matrices". *Linear Algebra and it's Applications*, 38, 95-105, 2004
[4] Gray, Robert M., *Toeplitz and Circulan Matrices*, Stanford 94305, De-partment of Electrical Engineering Stanford, USA. 2005.
[5] Karnain, Eka. "Invers Matriks Tak Negatif Menggunakan Metode Adjoin". *Skripsi*. UIN Sultan Syarif Kasim Riau. 2017
[6] Kaygisiz, K dan Sahin, A. " Determinants and Permanents of Hessenberg Matrices and Generalized Lucas Polynomials". *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 39, 6, 1065-1078, 2013
[7] Merca, M. "A note on the determinant of a Toeplitz-Hessenberg matrix", *Spec. Matrices*, 2 , 10-16, 2014
[8] Rizkiani, Tika. "Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Kompleks dengan Invers Matriks Menggunakan Metode Faddeev". *Skripsi*. UIN Sultan Syarif Kasim Riau. 2016.
[9] Siregar, Bakti. "Invers Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin". *Skripsi*. UIN Sultan Syarif Kasim Riau. 2014
[10] Suhendry, Irma S. "Menentukan Invers Drazin dari Matriks Singular dengan Metode Laverrier Faddev". JSMS Vol 1 No.1, Januari 2015