ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Kendali Optimal Model Persediaan Tanpa Kekurangan Barang Dengan Penurunan Mutu

Suci Rahmadayanti[1], Nilwan Andiraja[2]
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru
e-mail: sucirahmadayanti97@gmail.com, nilwanandiraja@uin-suska.ac.id

Abstrak

Pada artikel ini dibahas tentang bagaimana menentukan tingkat persediaan dan tingkat produksi pada persamaan diferensial dinamik tingkat persediaan dan fungsi tujuan untuk model persediaan tanpa kekurangan barang yang mengalami penurunan mutu. persamaan diferensial dinamik tingkat persediaan dipengaruhi oleh tingkat produksi, tingkat permintaan dan tingkat kerusakan suatu barang. Sementara fungsi tujuan di pengaruhi oleh biaya penyimpanan dan biaya produksi. Berdasarkan persamaan diferensial dinamik dan fungsi tujuan serta syarat optimal yang diberikan diperoleh persamaan tingkat persediaan dan tingkat produksi yang optimal. Berdasarkan pembahasan dan simulasi yang telah diberikan diperoleh bahwa tingkat persediaan tidak akan terjadi kekurangan barang walaupun terdapat permintaan dan penurunan mutu barang.

Kata kunci*: Persediaan, Produksi, Penurunan mutu, Persamaan diferensial, Teori kendali.*

Abstract

In this article the researcher discusses about how to determine the rate of inventory and production on inventory models without deteriorating items that has decreasing of quality, where the rate of inventory is determined by demand and damage to item by applying control theory. Based on the dynamic differential equations, the objective functions and the optimal conditions that have been given can be formed second order-differential equations. Thus, it is obtained the optimal equations of rate inventory and production. Based on discussion and the example, it is obtained that the analysis of the inventory is stable where there will be not deteriorating items even though there is demand and the decrease of quality items.

Keywords: *Inventory, Production, Decreasing of quality, Differential equations, Control theory.*

1. Pendahuluan

Suatu perusahaan yang bergerak dibidang usaha pada umumnya memiliki persediaan barang dalam proses produksi, baik persediaan barang jadi maupun bahan baku. Persediaan barang pada perusahaan kadang mengalami penurunan dan peningkatan. Penurunan persediaan barang dapat menghambat kelancaran proses produksi sedangkan peningkatan barang merupakan suatu pemborosan bagi perusahaan tersebut. Persediaan dalam bentuk barang jadi maupun bahan baku dikemudian hari dapat mengalami penurunan mutu atau kemerosotan mutu.

Proses produksi dapat berjalan lancar apabila jumlah penyimpanan persediaan barang bisa diatur sesuai dengan kebutuhan produksi agar barang-barang yang tersedia tidak mengalami kemorosotan mutu. Barang persediaan yang ada disimpan pada sebuah gudang sehingga akan menambah biaya yang harus dikeluarkan oleh perusahaan yaitu berupa biaya penyimpanan. Maka salah satu cara mengatasi permasalahan tersebut adalah dengan menerapkan ilmu teori kendali dimana teori tersebut dapat menyelesaikan persoalan tingkat persediaan.

Selanjutnya, untuk memperjelas tentang penerapan teori kendali pada persediaan bisa dilihat dalam jurnal penelitian yang berkaitan dengan hal tersebut yaitu penelitian yang dilakukan oleh Affandi dkk. (2015) penelitian tersebut membahas tentang sistem inventori yang dapat mengalami penurunan dan peningkatan yang diselesaikan dengan menggunakan teknik control optimal, sehingga diperoleh nilai optimal tingkat inventori dan rata-rata produksi optimal, Tadj dkk. (2008) pada penelitian tersebut dibahas mengenai model matematika dari masalah persediaan yang mengalami peningkatan dan penurunan barang serta menyelesaikan bentuk persediaan barang menggunakan teknik kendali optimal, sehingga diperoleh persamaan tingkat persediaan yang optimal, untuk waktu berhingga. Selain itu ada pula penelitian yang dilakukan oleh Benhadid dkk. (2008) membahas tentang bagaimana memecahkan masalah persediaan produksi barang yang rusak dan biaya dinamis dengan memanfaatkan teori kendali optimal agar memperoleh kondisi yang cukup untu solusi optimal.

Pada jurnal ini, akan dilakukan penelitian dimana tingkat persediaan barang ditentukan berdasarkan pada penurunan mutu dari barang tersebut. Dengan menggunakan fungsi tujuan persediaan tanpa kekurangan barang yang terdapat pada jurnal Affandi (2012) dan menggunakan

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

fungsi dinamik untuk masalah persediaan barang yang mengalami penurunan mutu pada jurnal Affandi (2016) serta menentukan kestabilan dari tingkat persediaan barang.

Metode Penelitian

Jurnal ini membahas tentang penerapan teori kendali pada model persediaan tanpa kekurangan barang yang mengalami penurunan mutu. Dalam penelitian ini akan dilakukan tahapan-tahapan sebagai berikut:

1. Diketahui persamaan differensial dinamik untuk persediaan barang yang mengalami penurunan mutu yaitu:
$$\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t) - \theta(t, I(t)) \text{ dengan } I(0) = I_0, I(T) = I_T.$$
Kemudian diketahui fungsi tujuan untuk model persediaan tanpa kekuarangan barang sebagai berikut:
$$J(P,I) = \int_0^T e^{-\rho t}\left(h(I(t)) + K(P(t))\right)dt.$$
2. Dibentuk Persamaan *Hamilton* berdasarkan persamaan diferensial dinamik dan fungsi tujuan pada langkah no 1.
3. Persamaan *Hamilton* yang diperoleh pada langkah no 2 dapat dibentuk Persamaan Lagrange
4. Selanjutnya berdasarkan Persamaan Lagrange pada langkah no 3, ditentukan
$$\frac{-d}{dt}\lambda(t) = \frac{\partial}{\partial I}L(t, I, P, \lambda, \mu) \text{ dan } \frac{\partial}{\partial P}L(t, I, P, \lambda, \mu) = 0.$$
5. Hasil pada langkah no 4 akan disubstitusikan pada dua kasus di bawah ini
$$P(t) - D(t) - \theta(t, I) = 0 \text{ dan } P(t) - D(t) - \theta(t, I) > 0$$
Untuk memperoleh $\lambda(t)$.
6. Kemudian diferensialkan hasil pada langkah no 5.
7. Mengkombinasikan persamaan yang didapat pada langkah no 5 dan no 6 berdasarkan persamaan diferensial dinamik maka diperoleh persamaan tingkat persediaan $I(t)$.
8. Mensubstitusikan $I(0) = I_0$, $I(T) = I_T$ pada langkah no 1 ke persamaan $I(t)$ untuk menghitung konstanta a_1 dan a_2.
9. Kemudian mensubstitusikan persamaan $I(t)$ ke persamaan diferensial dinamik pada langkah no 1 untuk mendapatkan persamaan tingkat produksi $P(t)$.
10. Persamaan yang diperoleh pada langkah no 7 dapat digunakan untuk menganalisa kestabilannya.

2. Hasil dan Analisis

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai persediaan tanpa kekurangan barang yang mengalami penurunan mutu dan menyelesaikannya dengan menerapkan ilmu teori kendali. Selanjutnya akan di analisa kestabilan dari persamaan persediaan tanpa kekurangan barang yang mengalami penurunan mutu.

2.1 Penerapan Teori Kendali pada Model Persediaan Tanpa Kekurangan Barang yang Mengalami Penurunan Mutu

Pada masalah persediaan barang yang mengalami penurunan mutu telah diberikan persamaan diferensial dinamik yaitu:

$$\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t) - \theta(t, I(t)) \text{ dengan } I(0) = I_0, I(T) = I_T. \tag{1}$$

dan persamaan fungsi tujuan untuk masalah persediaan tanpa kekurangan barang yang akan diminimumkan dengan syarat $P \geq D(t, I(t))$ yaitu:

$$J(P,I) = \int_0^T e^{-\rho t}\left(h(I(t)) + K(P(t))\right)dt. \tag{2}$$

Berdasarkan Persamaan diferensial dinamik (1) dan Persamaan fungsi tujuan (2) maka dapat dibentuk Persamaan *Hamilton* sebagai berikut:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$H(t,I,P,\lambda) = -e^{-\rho t}\left(h(I(t)) + K(P(t))\right) + \lambda(t)\left(P(t) - D(t) - \theta(t,I(t))\right). \tag{3}$$

Kemudian dari Persamaan (3) di atas dibentuk Persamaan Lagrange sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L(t,I,P,\lambda,\mu) = -e^{-\rho t}\left(h(I(t)) + K(P(t))\right) + [\lambda(t) + \mu(t)] \\ \left(P(t) - D(t) - \theta(t,I(t))\right). \end{aligned} \tag{4}$$

untuk menentukan tingkat produksi dan tingkat persediaan pada masalah persediaan tanpa kekurangan barang yang mengalami penurunan mutu maka diberikan syarat kondisi optimal yaitu:

$$\frac{-d}{dt}\lambda(t) = \frac{\partial}{\partial I}L(t,I,P,\lambda,\mu), \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial P}L(t,I,P,\lambda,\mu) = 0, \tag{6}$$

$$P(t) - D(t) - \theta(t,I(t)) \geq 0,\ \ \mu(t) \geq 0,\ \ \mu(t)\left[P(t) - D(t) - \theta(t,I(t))\right] = 0. \tag{7}$$

Persamaan (5) dapat diuraikan menggunakan Persamaan (4) sehingga menjadi,

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = e^{-\rho t}\frac{d}{dI}h(I(t)) + \left[\lambda(t) + \mu(t)\right]\frac{\partial}{\partial I}\theta(t,I(t)). \tag{8}$$

Persamaan (8) juga dapat diuraikan menjadi,

$$\left[\lambda(t) + \mu(t)\right] = e^{-\rho t}\frac{d}{dP}K(P(t)) \tag{9}$$

Berdasarkan Persamaan (7) akan diamati dua kasus yaitu $P(t) - D(t) - \theta(t,I(t)) = 0$ dan $P(t) - D(t) - \theta(t,I(t)) > 0.$

1. Kasus $P(t) - D(t) - \theta(t,I(t)) = 0$, untuk $t \in [0,T].$

Pada interval untuk $t \in [0,T]$ dengan asumsi $\frac{d}{dt}I(t) = 0$ dimana I konstan dan

$$P(t) = D(t) + \theta(t,I(t)). \tag{10}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (9) ke Persamaan (8) maka diperoleh,

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = e^{-\rho t}\left(\frac{d}{dI}h(I(t)) + \frac{d}{dP}K(P(t))\frac{\partial}{\partial I}\theta(t,I(t))\right) \tag{11}$$

2. Kasus $P(t) - D(t) - \theta(t,I(t)) > 0$.

Dengan $t \in [0,T]$ dan $\mu = 0$ pada kasus ini maka kondisi Persamaan (8) dan (9) menjadi,

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = e^{-\rho t}\frac{d}{dI}h(I(t)) + \lambda(t)\frac{\partial}{\partial I}\theta(t,I(t)) \qquad \text{dan} \tag{12}$$

$$\lambda(t) = e^{-\rho t}\frac{d}{dP}K(P(t)) \tag{13}$$

Selanjutnya, diturunkan Persamaan (13) sebagai berikut:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\rho e^{-\rho t}\frac{d}{dP}K(P(t)) + e^{-\rho t}\frac{d^2}{dP^2}K(P(t))\frac{d}{dt}P(t). \tag{14}$$

Kemudian substitusikan Persamaan (13) ke Persamaan (12) maka diperoleh,

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = e^{-\rho t}\left(\frac{d}{dI}h(I(t)) + \frac{d}{dP}K(P(t))\frac{\partial}{\partial I}\theta(t, I(t))\right) \tag{15}$$

Mengkombinasikan Persamaan (14) dan Persamaan (4.15) berdasarkan persamaan diferensial dinamik (4.1) untuk memperoleh hasil persamaan diferensial orde dua:

$$\frac{d}{dI}h(I(t)) = \frac{d}{dt}P(t)\frac{d^2}{dP^2}K(P(t)) - \left(\rho + \frac{\partial}{\partial I}\theta(t, I(t))\right)\frac{d}{dP}K(P(t)) \tag{16}$$

Kemudian diasumsikan $K(P) = \frac{KP^2}{2}, h(I) = \frac{hI^2}{2}$ dan $\theta(t, I(t)) = \theta_1(t) + \theta_2 I$ dimana, K, h dan $\theta_i, i = 1,2$ adalah konstanta positif. Kemudian dari bentuk persamaan diferensial dalam P pada Persamaan (4.16) di atas menjadi persamaan diferensial orde dua sehingga,

$$\frac{d^2}{dt^2}I(t) - \rho\frac{d}{dt}I(t) - \rho\theta_2 I(t) - \theta_2\frac{d}{dt}I(t) - \theta_2\theta_2 I(t) - \frac{h}{K}I(t) = -\frac{d}{dt}D(t) + \rho D(t)$$
$$+\rho\theta_1(t) + \theta_2 D(t) + \theta_2\theta_1(t),$$

dengan:

$\alpha(t) = -\frac{d}{dt}D(t) + (\rho + \theta_2)D(t) + (\rho + \theta_2)\theta_1(t)$, maka

$$\frac{d^2}{dt^2}I(t) - [\rho + \theta_2]\frac{d}{dt}I(t) - \left[\frac{h}{K} + \theta_2(\rho + \theta_2)\right]I(t) = \alpha(t). \tag{17}$$

Persamaan (17) di atas merupakan persamaan diferensial orde dua nonhomogen. Langkah awal yang harus dilakukan yaitu dengan menyelesaikan persamaan homogen.

$$m^2 - [\rho + \theta_2]m - \left[\frac{h}{K} + \theta_2(\rho + \theta_2)\right] = 0. \tag{18}$$

Sehingga diperoleh akar-akar real dan berbeda sebagai berikut:

$m_1 = \frac{1}{2}\left((\rho + \theta_2) + \sqrt{(\rho + \theta_2)^2 + 4\left[\frac{h}{K} + \theta_2(\rho + \theta_2)\right]}\right)$ dan

$$m_2 = \frac{1}{2}\left((\rho + \theta_2) - \sqrt{(\rho + \theta_2)^2 + 4\left[\frac{h}{K} + \theta_2(\rho + \theta_2)\right]}\right)$$

Jadi, solusi untuk Persamaan (18) tingkat persediaan yang optimal untuk masalah persediaan tanpa kekurangan barang yang mengalami penurunan mutu yaitu:

$$I^*(t) = a_1 e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + Q(t), \tag{19}$$

dimana $Q(t)$ adalah solusi khusus dari Persamaan (17).

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Untuk menghitung nilai konstanta a_1 dan a_2 maka disubstitusikan $I(0) = I_0$ dan $I(T) = I_T$ ke Persamaan (19) di atas sehingga,

$$a_1 + a_2 = I_0 - Q(0) \quad \text{dan} \quad a_1 e^{m_1 T} + a_2 e^{m_2 T} = I_T - Q(T).$$

Menggunakan cara eliminiasi untuk mendapatkan nilai a_1 dan a_2 dengan memisalkan
$b_1 = I_0 - Q(0)$ dan $b_2 = I_T - Q(T)$
Sehingga diperoleh,

$$a_2 = \frac{b_1 e^{m_1 T} - b_2}{e^{m_1 T} - e^{m_2 T}} \quad \text{dan} \quad a_1 = \frac{b_2 - b_1 e^{m_2 T}}{e^{m_1 T} - e^{m_2 T}}$$

Selanjutnya, untuk memperoleh $P(t)$ yaitu dengan mensubstitusikan Persamaan (19) ke Persamaan diferensial dinamik menjadi,

$$P(t) = a_1 m_1 e^{m_1 t} + a_2 m_2 e^{m_2 t} + \frac{d}{dt} Q(t) + D(t) + \theta(t, I(t))$$

Karena $\theta(t, I(t)) = \theta_1(t) + \theta_2 I(t)$, diperoleh persamaan tingkat produksi yang optimal untuk masalah persediaan tanpa kekurangan barang yang mengalami penurunan mutu sebagai berikut:

$$P(t) = a_1(m_1 + \theta_2) e^{m_1 t} + a_2(m_2 + \theta_2) e^{m_2 t} + \frac{d}{dt} Q(t) + \theta_2 Q(t) + D(t) + \theta_1(t) \tag{20}$$

dimana $Q(t)$ adalah solusi khusus.

2.2 Analisa Kestabilan Tingkat Persediaan

Kestabilan model persediaan pada artikel ini di analisa dari Persamaan tingkat persediaan (19) dengan,

$$m_1 = \frac{1}{2}\left((\rho + \theta_2) + \sqrt{(\rho + \theta_2)^2 + 4\left[\frac{h}{K} + \theta_2(\rho + \theta_2)\right]} \right) \text{dan}$$

$$m_2 = \frac{1}{2}\left((\rho + \theta_2) - \sqrt{(\rho + \theta_2)^2 + 4\left[\frac{h}{K} + \theta_2(\rho + \theta_2)\right]} \right)$$

Dimana $Q(t)$ adalah solusi khusus, serta nilai a_1 dan a_2 adalah sebagai berikut:

$$a_1 = \frac{b_2 - b_1 e^{m_2 T}}{e^{m_1 T} - e^{m_2 T}} \quad \text{dan} \quad a_2 = \frac{b_1 e^{m_1 T} - b_2}{e^{m_1 T} - e^{m_2 T}}$$

Pada waktu $t \to T$.

<u>Contoh</u>

Diasumsikan $I(0) = 0$, $I(5) = 80$, $\rho = 0{,}001,$ $h(t) = 2,$ $K(t) = 4,$ dengan tingkat permintaan sebesar $D(t) = 10t,$ serta penurunan mutu $\theta_1(t) = t^2 + 1$ dan $\theta_2 = 0{,}1$. Tunjukkan tingkat persediaan $I(t)$ dan tingkat produksi $P(t)$ yang optimal untuk menentukan nilai fungsi tujuan yang optimal.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Penyelesaian :

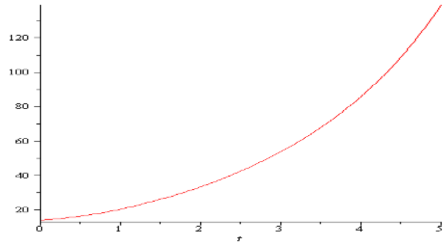
Diperoleh tingkat persediaan yang optimal untuk persediaan tanpa kekurangan barang yang mengalami penurunan mutu adalah:

$$I^*(t) = 1{,}6499e^{0{,}7665t} - 20{,}6563e^{-0{,}6655t} - 0{,}1980t^2 - 1{,}9018t + 19{,}0063.$$

tingkat produksi yang optimal untuk persediaan tanpa kekurangan barang yang mengalami penurunan mutu adalah:

$$P^*(t) = 1{,}4296e^{0{,}7665t} + 11{,}6811e^{-0{,}6655t} + 0{,}9802t^2 + 9{,}41382t + 0{,}9988.$$

Tingkat produksi yang optimal pada masalah persediaan tanpa kekurangan barang yang mengalami penurunan mutu dapat pula di lihat pada grafik berikut:

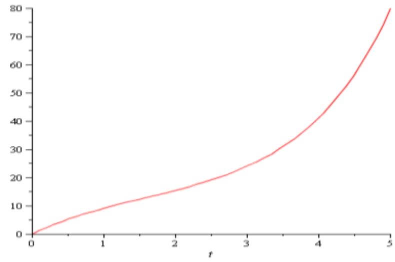


Gambar 3.1 $P(t) = \frac{d}{dt}I(t) + D(t) + \theta(t, I(t))$

Berdasarkan gambar 3.1 di atas dapat dilihat bahwa tingkat produksi mengalami peningkatan untuk waktu $t \to 5$.

Dari persamaan tingkat persediaan dan tingkat produksi yang telah diperoleh selama waktu $t \in [0{,}5]$ dengan tingkat persediaan sebesar 80 unit dan tingkat produksi sebesar 139,0069 unit barang. Maka diperoleh biaya minimum yang dikeluarkan berdasarkan persamaan fungsi tujuan yang optimal adalah sebesar 1314,9172.

Tingkat pesediaan dapat di analisa dari grafik yang dapat dilihat dari gambar berikut:



Gambar 3.2 $I^*(t) = a_1e^{m_1t} + a_2e^{m_2t} + Q(t)$

Berdasarkan gambar 3.2 di atas dapat dilihat bahwa tingkat persediaan mengalami peningatan yang stabil. Sehingga, tidak terjadi kekurangan barang walaupun terdapat tingkat permintaan sebesar $10t$ dan penurunan mutu barang sebesar $t^2 + 1{,}1I$.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

3. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang dilakukan, maka diperoleh kesimpulan bahwa persamaan tingkat persediaan yang optimal untuk masalah persediaan tanpa kekurangan barang yaitu:

$$I^*(t) = a_1 e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + Q(t),$$

dimana $Q(t)$ adalah solusi khusus, dengan $a_1$dan a_2 sebagai berikut:

$$a_1 = \frac{b_2 - b_1 e^{m_2 T}}{e^{m_1 T} - e^{m_2 T}} \quad \text{dan} \quad a_2 = \frac{b_1 e^{m_1 T} - b_2}{e^{m_1 T} - e^{m_2 T}}$$

Berdasarkan persamaan diferensial dinamik dan persamaan tingkat persediaan diperoleh persamaan tingkat produksi yaitu:

$$P^*(t) = a_1(m_1 + \theta_2)e^{m_1 t} + a_2(m_2 + \theta_2)e^{m_2 t} + \frac{d}{dt}Q(t) + \theta_2 Q(t) + D(t) + \theta_1(t),$$

dengan $Q(t)$ adalah solusi khusus.

Daftar Pustaka

Jurnal :

[1] Affandi, P. Perluasan Model Kendali Optimal pada Masalah Inventori yang Mengalami Penurunan Mutu. *Proseding Seminar Nasional Matematika II*. 2016: 2406-9868.
[2] Affandi, P., Faisal., & Y. Yulida. Penerapan Teori Kendali pada Masalah Inventori. *Jurnal Matematika dan Terapan*. Vol 6, No.2, hal. 38-46, 2012.
[3] Affandi, P., Faisal., & Y. Yulida. Kendali Optimal dari Sistem Inventori dengan Peningkatan dan Penurunan Barang. *Jurnal MIA.* Vol 38, No.1, hal. 79-88, 2015.
[4] Alfares, H.K. Integrating Quality and Maintenance Decisions in a Production-inventory Model for Deteriorating Items. *International Journal of Production Research*. Vol 4, No.5, hal. 899-911, 2005.
[5] Benhadi, Y., L. Tadj., & M. Bounkhel. Optimal Control of Production Inventory Systems with Deteriorating Items and Dynamic Costs. *Applied Mathematics E-Notes*. Vol 8, hal. 194-202, 2008.
[6] Tadj, L., Sarhan AM., & El-Gohary. Optimal Control of an Inventory System with Ameliorating and Deteriorating Items. *Applied Sciences*. Vol 10, hal. 243-255, 2008.

Buku :

[7] Olsder, G.J. “*Mathematical Sistem Theory*”. Delft : University Of Technology. 1994.