ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online ) : 2579-5406

# Analisa Persediaan Model Inventory Dengan Weibull Deterioration dan Pemangkasan Biaya Penyimpanan

**Nilwan Andiraja**[1]
[1]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: nilwanandiraja@uin-suska.ac.id

***Abstrak***

*Analisa persediaan pada model inventory dengan terapan teori kendali optimal telah dibuat oleh Affandi (2015). Sementara itu, Weibul deterioration dapat ditemui di Sarma (2013), tapi dalam artikel tersebut tidak menggunakan terapan teori kendali. Artikel ini membahas tentang analisa tingkat persediaan pada model inventory dengan weibull deterioration dan pemangkasan biaya penyimpanan. Oleh karena itu, artikel ini dimulai dengan merubah tingkat kerusakan pada persamaan dinamik pada Affandi (2015) dengan weibull deterioration, kemudian memberikan faktor diskon ke biaya penyimpanan pada fungsi tujuan. Selanjutnya dengan aplikasi teori kendali maka di peroleh persamaan tingkat persediaan untuk dua kasus. Persamaan tingkat persediaan tersebut di analisa dengan menggunakan simulasi parameter. Berdasarkan hasil diperoleh, tingkat persediaan dapat meningkat dan dapat menurun*.

***Katakunci****: Kendali, model persediaan barang, sistem persamaan diferensial, Weibull deterioration.*

***Abstract***

*The analyze of stock in inventory model with application of optimal control theory made by Affandi (2015). Meanwhile, Weibull deterioration can find on Sharma (2013), but in that article did not use application of optimal control theory. This article discus about analyze of the inventory level on inventory model with Weibull deterioration and cut off holding cost. Therefore, this article will begin with change of the deterioration level on the dynamic equation in affandi (2015) with Weibull deterioration, then it will give discount factor to holding cost on the objective function. Next, with using application of the control theory, it will get the equation of inventory level for two case. The inventory level analyze with using parameter simulation. Base on the result, the inventory level can ascent and can descent.*

***Keywords****: Control, goods inventory model, differential equation system, Weibull deterioration*

## 1. Pendahuluan

Teori kendali merupakan teori yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persoalan tingkat persediaan. Menurut Widodo (2009) tingkat persediaan adalah pengendalian yang menentukan tingkat persediaan yang harus dijual, kapan persediaan harus diisi, dan berapa besar pesanan yang harus dilakukan. Sehingga sistem dan model persediaan bertujuan untuk meminimalkan biaya total tahunan dengan menentukan banyaknya pemesanan yang dilakukan. Permasalahan yang sering terjadi dalam menentukan tingkat persediaan adalah bagaimana menentukan banyaknya persediaan barang yang harus disimpan untuk mengatasi permintaan barang yang tinggi di masa yang akan datang. Lebih memperjelas tentang penerapan teori kendali pada persediaan bisa dilihat dalam jurnal penelitian yang berkaitan dengan hal tersebut yaitu penelitian yang dilakukan oleh Affandi (2015) pada artikel Affandi (2015) membahas tentang " Kendali Optimal dari Sistem *Inventory* dengan Peningkatan dan Penurunan Barang". Penelitian tersebut membahas model matematika dari masalah persediaan yang mengalami peningkatan dan penurunan barang serta menyelesaikan bentuk persediaan barang tersebut menggunakan teknik kendali optimal, dan dalam penelitian ini membahas peningkatan dan penururnan barang untuk waktu berhingga. Namun penelitian yang dilakukan Tandj (2008) dan Affandi (2015) belum memberikan tingkat kerusakaan dengan distribusi weibull dan belum memberikan pemangkasan biaya penyimpanan. Tingkat kerusakan Weibull dapat di temukan di penelitian yang dilakukan oleh dilakukan oleh Sharma dkk. (2013). Pada artikelnya Sharma dkk membahas tentang *"An Inventory Model for deteriorating items with Weibull Deterioration with Time Dependent Demand and Shortages".* Penelitian tersebut membahas model matematika dari masalah persediaan yang mengalami kenaikan dan penurunan barang yang mengikuti distribusi Weibull untuk permintaan tergantung pada waktu, namun penelitian tersebut belum menggunakan teori kendali optimal. Oleh karena itu, artikel ini akan merubah persamaan persediaan yang terdapat di Affandi (2015) dan Tadj (2008) dengan memberikan Weribull deterioration yang terdapat di Sharma (2013), kemudian pada fungsi tujuan biaya penyimpanan akan diberikan faktor diskon sebagai bentuk pemangkasan pada biaya penyimpanan. Berdasarkan perubahan pada persamaan diferensial persediaan dan

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online ) : 2579-5406

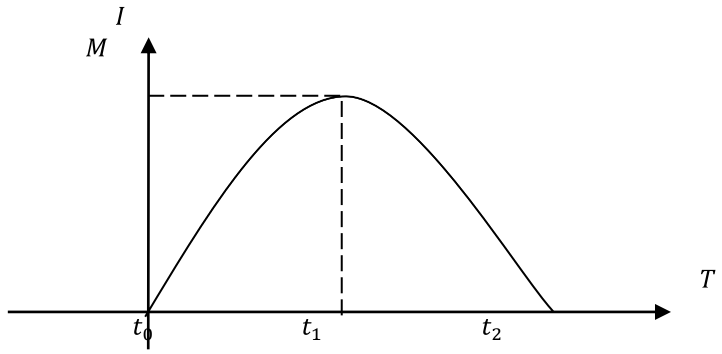
fungsi tujuan akan ditentukan persamaan tingkat persediaan barang. Kemudian dengan menggunakan simulasi dengan parameter akan digambarkan arah kurva persamaan tingkat persediaan barang pada waktu berhingga untuk menganalisa persamaan tingkat persediaan.

## 2. Metode Penelitian

Sebelum dibahas metode penelitian, terlebih dahulu diberikan beberapa teori yang mendukung pembahasan pada penelitian ini :

### 2.1. Kendali Optimal pada Masalah Persediaan Barang

Pembentukan model ini didasarkan pada sistem persediaan dimana ditinjau persediaan saat terjadi peningkatan dan penurunan barang. Di asumsikan bahwa fase pertama dari $t_0$ hingga $t_1$ untuk tingkat persedian yang meningkat, kemudian fase kedua yaitu $t_1$ hingga $t_2$ untuk tingkat persediaan yang menurun. Berikut ini digambarkan model persediaan




Gambar 1. Model *Inventory* Menurut Lotf Tadj (2008)

Selanjutnya dari Affandi (2015) diberikan persamaan differensial dinamik untuk kasus penurunan untuk model inventory pada gambar 1 yaitu

$$\dot{I} = P(t) - D(t) + v(t)I(t) \quad t \in [t_1, t_2] \tag{1}$$

dengan $P(t) \geq 0$. Kemudiaan untuk menjamin tingkat persediaan menurun dari $t_1$ hingga $t_2$, maka lebih lanjut persamaan (1) memenuhi.

$$P(t) - D(t) + v(t)I(t) > 0 \quad t \in [t_1, t_2] \tag{2}$$

dengan
$I(t)$ : tingkat fungsi persediaan.
$P(t)$ : tingkat fungsi produksi.
$D(t)$ : fungsi permintaan.
$I_0$ : tingkat nilai awal persediaan.
*v* (*t*) : fungsi tingkat penurunan.
Selanjutnya, fungsi tujuan dari model persediaan barang yang mengalami penurunan yaitu sebagai berikut:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^t \left\{h\left[I(t) - \hat{I}\right]^2 + K\left[P(t) - \hat{P}\right]^2\right\} dt \tag{3}$$

dengan
$\hat{P}$ : tingkat produksi tujuan
$\hat{I}$ : tingkat persediaan tujuan
$h$ : koefisien biaya penyimpanan
$K$ : koefisien biaya produksi

1. **Model Persediaan dengan Distribusi Weibull**

Menurut Sharman (2013) tingkat penurunan pada model persediaan dapat mengikuti distribusi Weibull dengan dua parameter. Distribusi Weibull dua parameter didefenisikan sebagai berikut:

$$\theta(t) = \alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\beta t^c} \tag{4}$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online ) : 2579-5406

Dimana $0 < \alpha < 1$ adalah skala parameter dan $\beta > 0$ adalah bentuk parameter.

Selanjutnya, metode penelitian yang dipakai sebagai berikut :

1. Fungsi tingkat penurunan pada persamaan diferensial dinamik untuk penurunan barang pada Persamaan (1) di rubah dengan distribusi Weibull pada Persamaan (4).
2. Koefisien biaya penyimpanan pada fungsi tujuan (3) diberikan faktor diskon $e^{-\theta t}$ sebagai bentuk pemangkasan biaya.
3. Dibentuk persamaan Hamilton berdasarkan diferensial dinamik pada langkah no 1 dan fungsi tujuan pada langkah no 2, selanjutnya di cari $H_p = 0$.
4. Kemudian dibentuk fungsi Lagrangenya berdasarkan diferensial dinamik pada langkah no 1 dan fungsi tujuan pada langkah no 2.
5. Dari langkah no 4, ditentukan $L_I = -\dot{\lambda}$ , $L_P = 0$
6. Dari $H_P = 0$ pada nomor 3 didapatkan fungsi kendali yaitu tingkat produksi $P(t)$
7. Selanjutnya, $P(t)$ dari langkah no 6 di substitusikan ke persamaan diferensial dinamik pada langkah no 1.
8. Persamaan hasil substitusi pada langkah no 7, di turunkan sehingga diperoleh persamaan diferensial orde dua non homogen.
9. Selanjutnya, persamaan orde dua pada langkah no 8 di tentukan solusinya dengan dua kasus tingkat penurunan.
10. Solusi pada langkah no 9 sebagai persamaan tinngkat persediaan yang akan di analisa dengan menggunakan simulasi.

## 3. Pembahasan

### 3.1. Model inventory dengan Weibull Deterioration dan Pemangkasan Biaya Penyimpanan.

Persamaan diferensial dinamik untuk model inventory dengan Weibull Deterioration untuk penurunan yaitu

$$\dot{I} = P(t) - D(t) + \alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\beta t^{c}} \; I(t) \tag{1}$$

Fungsi tujuan dengan pemangkasan biaya penyimpanan yaitu:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^t \left\{ (e^{-\theta t} h)\left[I(t) - \hat{I}\right]^2 + K\left[P(t) - \hat{P}\right]^2 \right\} dt \tag{2}$$

Kemudian dari Persamaan (1) dan (2), dibentuk persamaan Hamilton yaitu,

$$H = \frac{1}{2}\left[(e^{-\theta t} h)(I - \hat{I})^2 + K(P - \hat{P})^2\right] + \lambda(P - D + \alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\beta t^{c}} I) \tag{3}$$

Selanjutnya dari $H_p = 0$ maka di peroleh tingkat produksi sebagai berikut:

$$0 = K\left(P - \hat{P}\right) + \lambda \tag{4}$$

Kemudian dari Persamaan (1) dan (2) dibentuk persamaan Lagrange yaitu

$$L = \frac{1}{2}\left[(e^{-\theta t} h)\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + (\lambda - \mu)(P - D + \lambda\alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\beta t^{c}} I) \tag{5}$$

Selanjutnya $L_I = -\dot{\lambda}$ sebagai berikut:

$$\dot{\lambda} = -(e^{-\theta t} h)\left(I - \hat{I}\right) + (\mu - \lambda)\alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\beta t^{c}}, \tag{6}$$

dan $L_P = 0$ yaitu,

$$0 = K\left(P - \hat{P}\right) + (\lambda - \mu) \tag{7}$$

Berdasarkan Persamaan (4) didapat tingkat produksi untuk model inventory ini yaitu

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online ) : 2579-5406

$$P = \hat{P} - \frac{\lambda}{K} \tag{8}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (8) ke Persamaan diferensial dinamik (1) diperoleh:

$$\dot{I} = \left(\hat{P} - \frac{\lambda}{K}\right) - D + \alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}I \tag{10}$$

Selanjutnya Persamaan (10) di deferensialkan, maka diperoleh,

$$\ddot{I} = -\frac{\dot{\lambda}}{K} - \dot{D} - \left(\frac{d}{dt}\left(\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}\right)\right)I + \alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}\dot{I} \tag{11}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (6) dan Persamaan (10) ke Persamaan (11), maka diperoleh,

$$\ddot{I} - \left(\frac{(e^{-\theta t}h)}{K} + \left(\frac{d}{dt}\left(\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}\right)\right) + \left(\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}\right)^2\right)I = \alpha_1(t) \tag{12}$$

Dengan $\alpha_1(t) = -\frac{(e^{-\theta t}h)}{K}\hat{I} + \alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}\left(\hat{P} - D\right) - \dot{D}$.

Selanjutnya, untuk mendapatkan persamaan tingkat inventory maka di tentukan solusi Persamaan (12). Penyelesaian Persamaan (12) akan dilakukan untuk dua kasus yaitu

1. Kasus fungsi $\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}$ adalah Konstanta.
   Ketika fungsi $\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}$ dalam bentuk konstanta maka persamaan differensial dari persamaan (4.9) akan diperoleh sebagai berikut:

$$\ddot{I} - \left(\frac{(e^{-\theta t}h)}{K} + \left(\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}\right)^2\right)I = -\frac{(e^{-\theta t}h)}{K}\hat{I} + \alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}(\hat{P} - D) \tag{13}$$

   Akar-akar persamaan karakteristik dari persamaan diferensial (13) memiliki solusi sebagai berikut:

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{(e^{-\theta t}h)}{K} + (\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}})^2\right)} = r \text{ dan } r_2 = -\sqrt{\left(\frac{(e^{-\theta t}h)}{K} + (\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}})^2\right)} = -r$$

   Sehingga solusi dari persamaan (12) akan diberikan dalam bentuk:

$$I(t) = c_1e^{rt} + c_2e^{-rt} + Q(t) \tag{14}$$

   Dengan $Q(t) = \frac{(e^{-\theta t}h)\hat{I} - \alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}K(\hat{P}-D)}{(e^{-\theta t}h) + K(\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}})^2}$.

   Persamaan (14) sebagai persamaan tingkat persediaan.

2. Kasus fungsi $\frac{(e^{-\theta t}h)}{K} + \left(\frac{d}{dt}\left(\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}\right)\right) + \left(\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}\right)^2$ adalah Konstanta
   Jika fungsi $\frac{(e^{-\theta t}h)}{K} + \left(\frac{d}{dt}\left(\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}\right)\right) + \left(\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}\right)^2$ dalam bentuk konstanta, maka dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{(e^{-\theta t}h)}{K} + \left(\frac{d}{dt}\left(\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}\right)\right) + \left(\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\beta t^{c}}\right)^2 = {k_1}^2 \tag{15}$$

   Sehingga persamaan diferensial dari persamaan (12) akan berubah menjadi:

*ISSN (Printed) : 2579-7271*
*ISSN (Online ) : 2579-5406*

$$\ddot{I} - \left({k_1}^2\right) I = -\frac{(e^{-\theta t} h)\hat{I}}{K} + \alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\beta t^c}\left(\hat{P} - D\right) \tag{16}$$

Selanjutnya, untuk menyelesaikan Persamaan (16), terlebih dahulu di hitung faktor penurunan Weibull ($\alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\beta t^c}$), dengan aturan integral di peroleh,

$$\alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\beta t^c}(t) = \frac{a(e^{2at}+1)}{(e^{2at}-a)} \tag{17}$$

Kemudian, Persamaan (17) di substitusikan ke Persamaan (16), maka di peroleh solusi Persamaan (16) yaitu

$$I(t) = c_1 e^{rt} + c_2 e^{-rt} + Q(t) \tag{18}$$

Dengan $r_1 = r$ , $r_2 = -r$ dan $Q(t) = \frac{e^{-\theta t} h\hat{I}}{K{k_1}^2}$.

Persamaan (18) sebagai persamaan tingkat persediaan.

## 3.2. Analisa Persamaan tingkat persediaan.

Pada sub bab ini, akan di analisa persamaan tingkat persediaan dengan melihat arah kurva persediaan berdasarkan parameter-parameter yang diberikan pada contoh kasus.

Contoh kasus :
Berdasarkan jurnal Lotfi Tadj dkk (2008) dan jurnal Vikas Sharma dkk (2013) diketahui sebuah perusahaan $X$ memproduksi sebuah barang dengan rata-rata fungsi kenaikan sebesar $0.01$, tingkat persediaan tujuan sebesar $20$, tingkat produksi tujuan sebesar $18$, tingkat fungsi persediaan sebesar $10$, tingkat persediaan maksimum sebesar $30$, koefisien biaya penyimpanan sebesar $1.6$, fungsi permintaan sebesar $26$, koefisien biaya produksi sebesar $60$, dengan parameter untuk persamaan Weibull adalah $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.3$ dan $c = 1$ dengan $\theta = 0{,}1$. Tentukan nilai optimal tingkat persediaan ($I(t)$) dan analisis tingkat persediaannya pada saat $t \in [0{,}10]$.
Di tentukan terlebih dahulu akar-akar persamaan karakteristik yaitu,

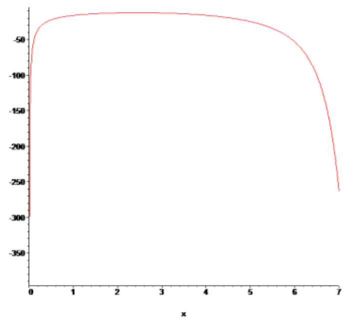
$$r_1 = \sqrt{\frac{1.6e^{-0.1t}}{60} + \left(\frac{3}{100} t^{-0.7} e^{-0.3t}\right)^{\mathbf{2}}} \text{ dan } r_2 = -\sqrt{\frac{1.6e^{-0{,}1t}}{60} + \left(\frac{3}{100} t^{-0.7} e^{-0.3t}\right)^{\mathbf{2}}}$$

Dengan, $Q(t) = \frac{1.6\,.20 - 0.1\,.\ 0.3\,.\ t^{0.3-1} e^{-0.3t^1}.60\ (18-26)}{1.6 + 60\left(0.1\,.\ 0.3\,.\ t^{0.3-1} e^{-0.3t^1}\right)^2}$.

Selanjutnya dengan persamaan tingkat persediaan yaitu

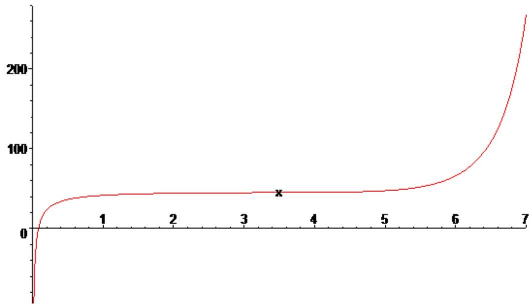
$$I(t) = c_1 e^{rt} + c_2 e^{-rt} + Q(t)$$

maka kurva persamaan tingkat persediaan diperoleh sebagai berikut,



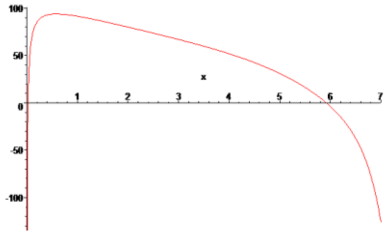

Gambar 2. Kurva persamaan tingkat persediaan untuk $c_1$ dan $c_2$ bernilai negatif

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online ) : 2579-5406

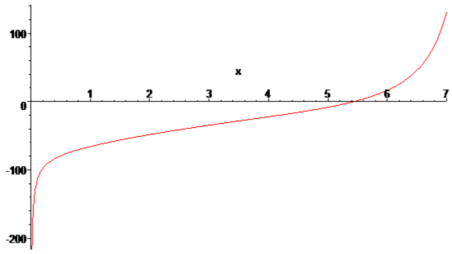



Gambar 3. Kurva persamaan tingkat persediaan untuk $c_1$ dan $c_2$ bernilai positif

Selanjutnya, jika salah satu $c_1$ atau $c_2$ negatif maka kurva berubah. Jika nilai $c_1$ negatif dan $c_2$ positif maka kurva menurun. Jika $c_1$ positif dan $c_2$ negatif maka kurva tetap naik.



Gambar 4. Kurva persamaan tingkat persediaan untuk $c_1 < 0$ dan $c_2 > 0$.




Gambar 5. Kurva persamaan tingkat persediaan untuk $c_1 > 0$ dan $c_2 < 0$.

## 4. Kesimpulan.

Berdasarkan uraian pada pembahasan yang telah diberikan, maka diperoleh kesimpulan bahwa persamaan tingkat persediaan yaitu

$$I(t) = c_1 e^{rt} + c_2 e^{-rt} + Q(t)$$

Dengan $Q(t)$ pada kasus pertama yaitu $Q(t) = \frac{(e^{-\theta t}h)\hat{I} - \alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\beta t^{c}} K(\hat{P}-D)}{(e^{-\theta t}h) + K(\alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\beta t^{c}})^2}$ dan pada kasus kedua yaitu $Q(t) = \frac{e^{-\theta t}h\hat{I}}{K{k_1}^2}$. Selanjutnya, arah kurva tingkat persediaan dapat naik atau turun yang bergantung kepada nilai $c_1$ dan $c_2$. Jika koefisien dari eksponen positif untuk pemangkasan biaya penyimpanan bernilai negatif maka kurva menurun, tapi Jika koefisien dari eksponen positif untuk pemangkasan biaya penyimpanan bernilai positif maka kurva meningkat.

## Daftar Pustaka

**Jurnal :**

[1] Affandi, P., Faisal dan Y. Yulida. Kendali Optimal dari Sistem Inventory dengan Peningkatan dan Penurunan Barang. *Jurnal MIPA*. 2015, 79-88.

*ISSN (Printed) : 2579-7271*
*ISSN (Online ) : 2579-5406*

[2] Sharma, V dan R. R. Chaudhary. An Inventory for Deteriorating items with Weibull Deterioration with Time Dependent Demand and Shortages. *Jurnal of Management Sciences*. 2013. Vol.2(3),28-29.

**Buku Teks :**

[3] Lewis, F.L. Optimal Control. Toronto : John Wiley & Sons, Inc. 1995.
[4] Muhaijir, M. N. Persamaan Diferensial Biasa dengan MAPLE. Pekanbaru. 2014.
Purcell, E. J dan Varbeg, D. Kalkulus dan Geometri Analitis. Jakarta : Erlangga. 2005.
[5] Xie, W. C. ”Differential Equations For Engineers”. Amerika : Cambrigde University Press, 2010.