# PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR KOMPLEKS MENGGUNAKANMETODE
## DEKOMPOSISI *QR*

**Fitri Aryani dan Iis Erianti**
Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Suska Riau
baihaqi_fatimah78@yahoo.com

***Abstrak***

*Sistem persamaan linear kompleks merupakan sistem persamaan linear yang koefisiennya berbentuk bilangan kompleks.. Penyelesaian sistem persamaan linear kompleks terlebih dahulu akan ditentukan matriks kompleks yang berukuran* $6 \times 6$ *dan selanjutnya akan dipisahkan antara bilangan real dan kompleks, dan akan menghasilkan matriks yang berukuran* $12 \times 12$. *Untuk matriks kompleks yang berukuran* $7 \times 7$ *akan menghasilkan matriks yang berukuran* $14 \times 14$. *Kemudianditentukan solusi penyelesaian dari sistem persamaan linear kompleks.Sistem persamaan linearkompleks dapat diselesaikan dengan menggunakan metode dekomposisi QR. Metodedekomposisi QR merupakan suatu metode yang mendekomposisikan suatu matriks A menjadi matriks Q dan R, denganQ adalah matriks yang vektor kolomnya ortonormal dan R adalah matriks segitiga atas.*

**Katakunci:***basis ortogonal, basis ortonormal, dekomposisi QR, sistem persamaan linear kompleks*.

## 1. Pendahuluan
### 1.1 Latar Belakang

Sistem persamaan linear merupakan sekumpulan persamaan linear yang terdiri dari koefisien dan variabel. Koefisien pada persamaan linear ada yang berbentuk bilangan real, ada yang berbentuk bilangan interval, ada yang berbentuk bilangan *fuzzy* dan ada juga yang berbentuk bilangan kompleks. Kajian dalam makalah ini adalah sistem persamaan linear kompleks.Penelitian masalah sistem persaman linear telah banyak dilakukan oleh para matematikawan.Banyak metode yang dikembangkan untuk menentukan solusi dari sistem persaman linear. Sistem persamaan linear pada dasarnya memiliki tujuan yang sama yaitu mencari solusi yang memenuhi dari sistem persamaan linear tersebut.

Penyelesaian masalah sistem persaman linear dapat diselesaikan dengan cara Operasi Baris Elementer (OBE), Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss-Jordan, aturan Cramer,dan metode dekomposisi. Beberapa jenis dekomposisi matriks adalah Dekomposisi Nilai Singular, Dekomposisi Schur, Dekomposisi Dolete, Dekomposisi Cholesky, Dekomposisi LU, Dekomposisi *QR*. Metode Dekomposisi *QR* adalah suatu metode yang membagi suatu matriks $A$ menjadi suatu hasil perkalian matriks *Q* dan *R*, dengan *Q* merupakan matriks dengan vektor kolom yang ortonormal dan *R* merupakan matriks segitiga atas yang dapat dibalik. Maka *A* dapat difaktorkan sebagai *A =QR*.

Metode dekomposisi *QR* telah banyak digunakan oleh peneliti-peneliti sebelumnya, pada skripsi Sugeng Widodo yang berjudul *"Kajian DekomposisiMatriks"* pada tahun 2003.Sugeng Widodo dalam penelitiannya memaparkan bahwa terdapat hubungan antara Dekomposisi Nilai Singular dan Dekomposisi *QR*. Selanjutnya Purbandini dengan judul *"Sistem PengenalanWajah pada Subruang Orthogonal Dengan Menggunakan LaplacianfaceTerdekomposisi QR,* tahun 2006. Penelitian oleh Purbandini memberikan hasil bahwa dengan mengkombinasikan Algoritma LPP dan *QR* akan dihasilkan keakuratan hasil dan biaya komputasi yang murah dalam pengklasifikasian pengenalan wajah. Penyelesaian sistem persamaan linear kompleks sudah dibahas sebelumnya oleh Nicholson tahun 2001. Selanjutnya Skripsi Dewi Yulianti yang berjudul "*Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Kompleks menggunakan Metode dekomposisi SVD"* pada tahun 2012.

### 1.2 Tinjauan Pustaka
### 1.2.1 Sistem Persamaan Linear

**Definisi 1 (Schaum's, 2006):**Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan linear yang terdiri dari $m$ persamaanlinear $L_1, L_2, \dots, L_m$, dengan $n$ variabel yang tidak diketahui $x_1, x_2, \dots, x_n$, yang disusun dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (2.1)$$

dengan$a_{ij}$ adalah koefisien dari variabel yang tidak diketahui $x_j$ pada persamaan $l_i$, dan bilangan $b_i$ adalah konstanta dari persamaan $l_i$.

Sistem persamaan linear pada persamaan (2.1) yang terdiri dari $m$ persamaan linear dengan $n$ variabel ekuivalen dengan persamaan matriks $AX = B$ , yaitu :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

dengan$A = [a_{ij}]$ adalah matriks koefisien, $X = [x_j]$ adalah vektor kolom dari variabel-variabel yang tidak diketahui, dan $B = [b_i]$ adalah vektor kolom dari konstanta.

### 1.2.2 Sistem Persamaan Linear Kompleks

Sebelum membahas mengenai sistem persamaan linear kompleks, akan dijelaskan terlebih dahulu pengertian bilangan kompleks. Bilangan kompleks adalah bilangan yang terdiri dari bilangan real dan imajiner. Berikut akan diberikan definisi dari bilangan kompleks.

**Definisi 2 (Hasugian, M. 2006):** *Bilangan kompleks z adalah pasangan terurut dari bilangan nyata $x$ dan $y$, ditulis sebagai berikut :*

$$z = (x, y) = x + iy. \qquad (2.3)$$

*notasi $i$ disebut sebagai satuan imajiner, $i = \sqrt{-1}$, maka $i^2 = -1$, dengan $x$ disebut sebagai bagian nyata (real) dari $z$ ,dan $y$ disebut sebagai bagian imajiner dari $z$,*

$$x = Re(z),\ y = Im(z) \qquad (2.4)$$

Jika suatu bilangan kompleks $z = x + iy$ , maka konjugat dari $z$ adalah $\bar{z} = x - iy$. Selanjutnya,berlaku sifat sebagai$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**Definisi 3 (Lipschutz, S. 2006):** *Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.*

Matriks kompleks yaitu matriks dengan entri-entri bilangan kompleks.Misalkan $A$ adalah matriks kompleks, jika $z = x + iy$ adalah bilangan kompleks, maka $\bar{z} = x - iy$ adalah konjugatnya. Konjugat dari matriks kompleks $A$, yang ditulis $\bar{A}$, adalah matriks yang diperoleh dari $A$ dengan cara menghitung konjugat dari setiap entri $A$.

Dari Definisi (2.2) maka sistem persamaan linear kompleks merupakan sistem persamaan linear dengan koefisien atau konstantanya adalah bilangan kompleks.Menurut [5] bahwa sistem persaman linear kompleks dapat juga diselesaikan dengan menggunakan Operasi Baris Elementer.

**Definisi 2.5 (Rahgooy, dkk. 2009)** *Suatu sistem persamaan linear kompleks* $n \times n$ .

$$\begin{aligned} C_{11}Z_1 + C_{12}Z_2 + \cdots + C_{1n}Z_1 &= W_1 \\ C_{21}Z_1 + C_{12}Z_2 + \cdots + C_{1n}Z_1 &= W_2 \\ \vdots\vdots\vdots\vdots \\ C_{n1}Z_1 + C_{n2}Z_2 + \cdots + C_{nn}Z_n &= W_n \end{aligned} \tag{2.5}$$

dengan koefisien matriks $C = (c_{ij}), 1 \leq i,j \leq n$ adalah matriks kompleks $n \times n$ . Bentuk pada Persamaan (2.5) dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut :

$$\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, Z_j = W_i \ \ , i = 1,2,\dots,n$$

dengan,

$$C_{ij} = a_{ij} + ib_{ij}\ ,\ \ Z_j = p_j + iq_j,\ \ \ W_i = u_i + iv_i$$

penjabarannyadapat dibentuk sebagai berikut:

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} + ib_{ij}\right)\left(p_j + iq_j\right) = u_i + iv_i \tag{2.6}$$

sehingga solusi sistem persamaan linearnya dapat ditulis sebagai berikut:

$$U = [u_i], V = [v_i],\ \ D = [a_{ij}]\ ,\ \ E = [b_{ji}]\ ,\ \ P = [p_j], S = [q_j]\text{untuk }\ i,j = 1,2,\dots,n.$$

Selanjutnya dapat ditulis dalam bentuk matriks yaitu :

$$\begin{bmatrix} D & -E \\ E & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

## 2.2 Dekomposisi *QR*

Dekomposisi *QR* merupakan metode yang membagi suatu matriks $A$ menjadi suatu hasil perkalian matriks *Q* dan matriks *R*,dimana *Q* merupakan matriks ortonormal dan *R* merupakan matriks segitiga atas yang dapat dibalik.

Untuk menentukan suatu matriks ortonormal dan matriks segitiga atas, salah satunya dengan menggunakan proses Gram-Schmidt. Proses mengubah sebarang basis ke basis ortonormal dinamakan proses gram-schmidt. Berikut langkah-langkah proses gram-schmidt:

Langkah 1: Misalkan : $v_1 = u_1$

Langkah 2: $v_2 = u_2 - proj_{W_1}u_2 = u_2 - \frac{\langle u_2,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1$

Langkah 3: Untuk membentuk sebuah vektor $v_3$ yang ortogonal terhadap $v_1$ maupun $v_2$, maka akan di tentukan komponen $u_3$ yang ortogonal terhadap ruang $W_2$ yang di rentang oleh $v_1$ dan $v_2$, yaitu:

$$v_3 = u_3 - proj_{W_2}u_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2}v_2$$

Langkah 4: Untuk menentukan sebuah vektor $v_4$ yang ortonormal terhadap $v_1$ dan $v_2$, dan $v_3$, akan di tentukan komponen $u_4$ yang orthogonal terhadap ruang $W_3$ yang direntang oleh $v_1, v_2,$ dan $v_3$, yaitu:

$$v_4 = u_4 - proj_{W_3}u_4 = u_4 - \frac{\langle u_4, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 - \frac{\langle u_4, v_2\rangle}{\|v_2\|^2}v_2 - \frac{\langle u_4, v_3\rangle}{\|v_3\|^2}v_3.$$

Secara umum, proses gram-schmidt dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$v_i = u_i - \frac{\langle u_i, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \cdots - \frac{\langle u_i, v_{i-1}\rangle}{\|v_{i-1}\|^2} v_{i-1}, \text{ untuk } i = 2,3,4,\ldots,n.$$

Berikut diberikan teorema yang berhubungan dengan solusi system persamaan linier kompleks dengan metode dekomposisi*QR* :

**Teorema 2.2 (Anton, H. 2004):** *Jika $A$adalah sebuah mariks $m\ x\ n$ yang memiliki vektor-vektor kolom yang bebas linear, maka $A$ dapat difaktorkan sebagai*

$$A = QR$$

*dengan Q adalah sebuah matriks m x n yang memiliki vektor-vektor kolom ortonormal, dan R adalah matriks segitiga atas $n\ x\ n$ yang dapat dibalik*.

**Teorema 2.3 (Steven, j. 2001):** *Jika A adalah matriks yang diperoleh dari faktor A=QR, dimana Q adalah matriks kolom vektor dari basis ortonormal untuk kolom A dekomposisi QR maka sistemnormal untuk $Ax = b$ dapat dinyatakan sebagai,*

$$Rx = Q^T b$$

*dan solusinya dapat dinyatakan sebagai berikut :*

$$x = R^{-1}Q^T b.$$

## 2. Metodologi Penelitian

Metodologi yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka dengan mempelajari literatur-literatur yang berhubungan dengan pokok permasalahan.Untuk menyelesaiakn sistem persamaan linier kompleks, diberikan langkah-langkah penyelesaiannya sebagai berikut

1) Diberikan sistem persamaan linear kompleks.
2) Mengubah sistem persamaan linear kompleks ke dalam bentuk persamaan matriks *AX=B.*
3) Membentuk matriks $\begin{bmatrix} D & -E \\ E & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$ dari matriks *AX=B*.
4) Menentukan matriks *Q* dengan proses Gram-Schmidt sebagai berikut:

   $q_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$sehingga matriks $Q = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]$.

5) Menentukan matriks segitiga atas *R* dengan menggunakan ketentuan sebagai berikut :

$$R = \begin{bmatrix} \langle u_1, q_1\rangle\langle u_2, q_1\rangle \cdots \langle u_n, q_1\rangle \\ 0 \qquad \langle u_2, q_2\rangle \cdots \langle u_n, q_2\rangle \\ \vdots\vdots\vdots\vdots \\ 0 \qquad 0 \qquad 0 \quad \langle u_n, q_n\rangle \end{bmatrix}.$$

6) Menentukan matriks $Q^T$.
7) Menentukan matriks $R^{-1}$.
8) Menentukan solusi nilai $X$ dari operasi matriks $(QR)X = B$ dengan ketentuan $X = R^{-1}Q^T B$.

## 3. Hasil dan Pembahasan

Berikut akan diberikan dua contoh penyelesaian sistem persamaan linear kompleks dengan ukuran 6 persamaan dengan 6 variabel, dan7 persamaan dengan 7 variabel dengan menggunakan metode dekomposisi *QR.*

**Contoh 1:**

Diberikan sistem persamaan linear kompleks dengan 6 persamaan dan 6 variabel sebagai berikut :

$$(2+3i)x_1 + (1+\ i)x_2 + (4+2i)x_3 + (2+2i)x_4 + (3+i)x_5 + (1+2i)x_6 = (2+3i)$$
$$(4+2i)x_1 + (2+\ i)x_2 + (5+2i)x_3 + (1+4i)x_4 + (2+2i)x_5 + (2+2i)x_6 = (3+2i)$$
$$(1+2i)x_1 + (2+3i)x_2 + (2+i)x_3 + (3+2i)x_4 + (5+\ i)x_5 + (2+i)x_6 = (1+3i)$$
$$(2+3i)x_1 + (2+i)x_2 + (3+3i)x_3 + (4+\ i)x_4 + (3+\ i)x_5 + (1+i)x_6 = (2+2i)$$
$$(1+2i)x_1 + (1+4i)x_2 + (2+3\,i)x_3 + (2+i)x_4 + (3+i)x_5 + (2+3i)x_6 = (4+2i)$$
$$(2+i)x_1 + (3+\ 2i)x_2 + (3+i)x_3 + (2+2i)x_4 + (2+\ 2i)x_5 + (2+3i)x_6 = (3+3i)$$

Selesaikan sistem persamaan linear kompleks di atas menggunakan metode dekomposisi *QR*.

**Penyelesaian:**

**Penyelesaian:**
Dengan cara yang sama pada contoh no. 1 maka diperoleh solusinya adalah

$$X = R^{-1}Q^{T}B = \begin{bmatrix} 0.9746 \\ 0.0780 \\ 0.3887 \\ 0.4054 \\ -0.3383 \\ 0.0244 \\ -0.2481 \\ 0.2352 \\ 0.1088 \\ -0.1877 \\ 0.2509 \\ -0.0791 \\ -0.2514 \\ 0.1678 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan solusi dari sistem persamaan linear kompleks diatas adalah sebagai berikut: $X_1 = (0.9746 + 0.2352i)$, $X_2 = (0.0780 + 0.1088i)$, $X_3 = (0.3887 - 0.1877i)$, $X_4 = (0.4054 + 0.2509i)$, $X_5 = (-0.3383 - 0.0791i)$, $X_6 = (0.0244 - 0.2514i)$, $X_7 = (-0.2481 + 0.1678i)$.

## 4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab IV, maka didapat kesimpulannya adalah

1. Metode Dekomposisi *QR* dapat menyelesaikan sistem persamaan linear kompleks
2. Solusi sistem persamaan linear kompleks untuk 6 persamaan dan 6 variabel pada contoh 1 sebelumnya diperoleh

   $X_1 = (\ 0.4040 +\ 0.4240i)$, $X_2 = (-0.2775 + 0.4984i)$, $X_3 = (-0.3464 - 0.6422i)$

   $X_4 = (0.2987 - 0.1660i)$, $X_5 = (-0.0580 + 0.8629i)$, $X_6 = (1.1636 - 1.1425i)$.

3. Solusi sistem persamaan linear kompleks untuk 7 persamaan dan 7variabel pada contoh 2 sebelumnya diperoleh

   $X_1 = (0.9746 + 0.2352i)$, $X_2 = (0.0780 + 0.1088i)$, $X_3 = (0.3887 - 0.1877i)$
   $X_4 = (0.4054 + 0.2509i)$, $X_5 = (-0.3383 - 0.0791i)$, $X_6 = (0.0244 - 0.2514i)$
   $X_7 = (-0.2481 + 0.1678i)$.

## 5.1 Saran

Pada akhir kajian ini, penulis menggunakan Metode dekomposisi *QR* dalam menyelesaikan sistem persamaan linear kompleks. Bagi peneliti yang ingin melanjutkan penelitian ini, disarankan untuk menggunakan metode lain dalam menyelesaikan sistem persamaan linear kompleks.

**Daftar Pustaka**

[1] Anton, Howard. Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*,* Edisi Kedelapan. Erlangga. Jakarta. 2004
[2] Hasugian, M. Jimmy, dan Agus Prijono*.* Menguasai Analisis Kompleks dalam Matematika Teknik. Rekayasa Sains, Bandung. 2006
[3] Leon, Steven J. Aljabar Linear dan Aplikasinya, Edisi Kelima. Erlangga, Jakarta.2001
[4] Lipschutz, Seymour. Marc Lars Lipson.Aljabar Linear Schaum's*.* Edisi Ketiga. Erlangga, Jakarta. 2006
[5] Nicholson, W. Keith. Elementary Linear Algebra. First Edition. Mc Graw-Hill, Singapore. 2001.
[6] Purbandini.Sistem Pengenalan Wajah Pada Subruang Orthogonal Dengan Menggunakan Laplacianfaces Terdekomposisi QR. http://digilib.its.ac.id. (ITS) Surabaya. 2006.
[7] Taher Rahgooy, dkk. Fuzzy Complex System of Linear Equations Applied to CircuitAnalysis*International Journal of Computer and Electrical Engineering*. Vol. (1) N0 5: 1793-8163.2009.
[8] Widodo, Sugeng. Kajian Dekomposisi Matriks. (ITS) Surabaya. http://digilib.its.ac.id.2003.
[9] Yulianti, Dewi. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Kompleks menggunakan Metode Dekomposisi SVD*"*. Skripsi, UIN-SUSKA Riau. 2012.