Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI-10) *ISSN (Printed) : 2579-7271*
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau *ISSN (Online) : 2579-5406*
Pekanbaru,13 November 2018

Nilai Ketakteraturan Total dari p-*copy* Graf Theta Tak Seragam

Corry Corazon Marzuki[1], Sri Handayani[2], Fitri Aryani[1], Abdussakir[3]
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
[1,2] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
Jl. Gajayana No. 50 Malang, 65144
Email: corrazon_m@yahoo.co.id,srihandayani150696@yahoo.com,sakir@mat.uin-malang.ac.id

Abstrak

Suatu pelabelan-k total $\lambda: V(G) \cup E(G) \to \{1,2,\dots,k\}$ dikatakan pelabelan-k total tak teratur total dari graf G, jika bobot setiap titik berbeda dan bobot setiap sisi juga berbeda. Nilai k terkecil sehingga suatu graf G dapat dilabeli dengan pelabelan-k total takteratur total disebut nilai total ketakteraturan total dari graf G, dinotasikan dengan $ts(G)$. Penelitian ini membahas tentang nilai ketakteraturan total dari p-copy graf theta tak seragam, p-copy graf theta tak seragam merupakan graf yang diperoleh dengan menggandakan graf theta tak seragam sebanyak p kali, dimana himpunan titik dari setiap hasil penggandaan tidak ada yang beririsan. Dari penelitian ini diperoleh nilai ketakteraturan total dari p-copy graf theta tak seragam adalah $ts\left(p\theta\left(4,4,(1,0,1,0)\right)\right) = 2p+1$ untuk p bilangan bulat positif.

Kata kunci: *graf theta tak seragam, nilai ketakteraturan total, p-copy graf theta tak seragam, pelabelan total tak teratur total.*

Abstract

A total k-labeling $\lambda : V(G) \cup E(G) \to \{1,2,\dots,k\}$ said irregular total k-labeling of G, if the weight of the vertex is different and the weight of the edges is also different. The minimum k such that a graph G has a totally irregular total k-labeling is called the total irregularity strength of G, denoted by $ts(G)$. In this research discusses about the total irregularity strength of p-copy theta un uniform graph, p-copy theta un uniform graph is the graph obtained by duplicating the theta un uniform graph as much as p, where the set of vertices of each multiplication result is missing. In this research we determine the total irregularity strength of the theta un uniform graph obtained $ts\left(p\theta\left(4,4,(1,0,1,0)\right)\right) = 2p+1$ for p is a positive integer.

Keywords*: theta ununiform graph, total irregularity strength, p-copy theta un uniform graph, totally irregular total labeling.*

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan pokok bahasan yang sudah tua usianya namun memiliki banyak terapan sampai saat ini. Graf adalah himpunan (V,E) yang dinotasikan dengan $G=(V,E)$, dimana V adalah himpunan tak kosong dari titik-titik (*vertex*) yang dinotasikan dengan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, dan E adalah himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang titik yang dinotasikan dengan $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Penelitian tentang teori graf terus mengalami perkembangan. Salah satu pembahasan yang terus berkembang adalah pelabelan graf.

Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek pada tahun 1964. Pelabelan graf terdiri dari berbagai macam diantaranya pelabelan total tak teratur, pelabelan ajaib, pelabelan *graceful*, pelabelan harmoni dan pelabelan anti ajaib. Pelabelan total tak teratur pertama kali diperkenalkan oleh Martin Baca, dkk pada tahun 2007. Pelabelan total tak teratur terdiri dari pelabelan total tak teratur titik, pelabelan total tak teratur sisi, dan pelabelan total tak teratur total.

Pelabelan-k total pada graf G adalah suatu pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf (titik dan sisi) yang dinotasikan dengan $\lambda: V \cup E \to \{1,2,\dots,k\}$ dimana k adalah suatu bilangan bulat positif. Suatu pelabelan-k total $\lambda: V \cup E \to \{1,2,\dots,k\}$ disebut pelabelan-k total tak teratur titik dari graf G, jika untuk setiap dua titik x dan y yang berbeda maka $wt(x) \neq wt(y)$. Nilai total ketakteraturan titik (*total vertex irregularity strength*) dari G adalah bilangan bulat positif terkecil k atau label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan-k total tidak teratur titik, dinotasikan dengan $tvs(G)$.

Pelabelan-k total $\lambda: V \cup E \to \{1,2,\dots,k\}$ dikatakan pelabelan-k total tak teratur sisi dari graf G, jika untuk sebarang dua sisi $e = u_1v_1$ dan $f = u_2v_2$ yang berbeda di graf G berlaku

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$wt(e) \neq wt(f)$, dengan $wt(e) = \lambda(u_1) + \lambda(e) + \lambda(v_1)$ dan $wt(f) = \lambda(u_2) + \lambda(f) + \lambda(v_2)$. Nilai total ketakteraturan sisi (*total edge irregularity strength*) dari graf G yang dinotasikan dengan $tes(G)$, adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G memiliki pelabelan-k total tidak teratur sisi.

Pelabelan-k total $\lambda: V \cup E \rightarrow \{1,2,\dots,k\}$ dikatakan pelabelan-k total tak teratur total dari graf G, jika untuk setiap titik x dan y yang berbeda maka $wt(x) \neq wt(y)$, dan untuk setiap sisi x_1x_2 dan y_1y_2 yang berbeda maka $wt(x_1x_2) \neq wt(y_1y_2)$. Nilai k terkecil sehingga suatu graf G dapat dilabeli dengan pelabelan-k total takteratur total disebut nilai total ketakteraturan total dari graf G, dinotasikan dengan $ts(G)$.

Penelitian tentang nilai total ketakteraturan titik, nilai total ketakteraturan sisi dan nilai ketakteraturan total terus mengalami perkembangan dalam beberapa jenis graf khusus diantaranya, Rajasingh dan Arockiamary telah memperoleh nilai total ketakteraturan sisi dari graf seri paralel. Secara umum, suatu graf seri paralel memuat suatu graf theta didalamnya. Graf theta merupakan graf dengan n titik, diantaranya dua titik yaitu N dan S berderajat m sedemikian sehingga setiap titik yang lain berderajat dua terletak pada salah satu dari m lintasan yang bergabung dengan titik N dan S. Dua titik N dan S berturut-turut disebut kutub utara dan kutub selatan. Sebuah lintasan antara kutub utara dan kutub selatan disebut *longitude*. Sebuah *longitude* dinotasikan dengan L. Adapun notasi untuk suatu graf theta yaitu $\theta(n,m,r)$ dimana n adalah jumlah titik pada graf theta, m adalah banyak *longitude* dan r adalah jumlah titik pada setiap *longitude*. Sebuah graf theta dikatakan seragam jika $|L_1| = |L_2| = \cdots = |L_m|$ dimana L_i adalah *longitude* ke-i dari $\theta(n,m)$ dan $i = 1,2,\dots,m$. Jika sebaliknya maka dikatakan graf theta tak seragam.

Pada penelitian ini dibahas nilai ketakteraturan total dari p-*copy* graf theta tak seragam yang dinotasikan dengan $ts\left(p\theta\big(4,4,(1,0,1,0)\big)\right)$ dimana p adalah bilangan bulat positif yang merupakan banyaknya copian dari graf theta tak seragam, secara berturut-turut angka 4 adalah jumlah titik dan banyak *longitude* pada graf theta tak seragam sedangkan $(1,0,1,0)$ adalah jumlah titik pada setiap *longitude* graf theta tak seragam. Penelitian mengenai nilai ketakteraturan total sudah banyak diteliti oleh para ilmuwan sebelumnya, diantaranya Marzuki dkk. [4], Ramdani [8], serta Ramdani dkk.[9].

2. Metode Penelitian

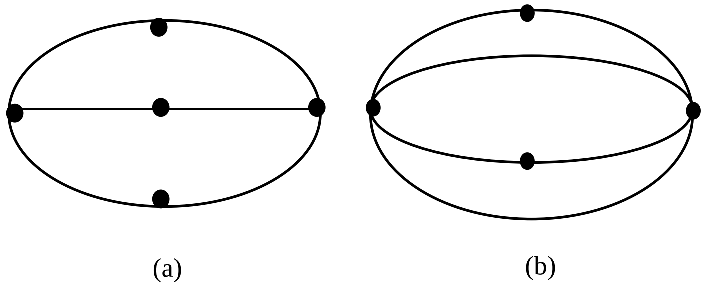
Beberapa definisi dan teorema dasar mengenai teori graf yang digunakan sebagai landasan matematis untuk menentukan nilai ketakteraturan total dari p-*copy* graf theta tak seragam disajikan sebagai berikut:

Definisi 1 [5]
Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V,E) ditulis dengan notasi $G = (V,E)$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang titik.

Definisi 2 [6]
Graf theta $\theta(n,m)$ atau graf theta dengan n titik mempunyai dua titik N dan S yang berderajat m sedemikian sehingga setiap titik yang lain berderajat dua terletak pada salah satu dari m lintasan yang bergabung dengan titik N dan S. Dua titik N dan S berturut-turut disebut kutub utara dan kutub selatan. Sebuah lintasan antara kutub utara dan kutub selatan disebut *longitude*. Sebuah *longitude* dinotasikan dengan L. Adapun notasi untuk suatu graf theta yaitu $\theta(n,m,r)$ dimana n adalah jumlah titik pada graf theta, m adalah banyak *longitude* dan r adalah jumlah titik pada setiap *longitude*. Sebuah graf theta dikatakan seragam jika $|L_1| = |L_2| = \cdots = |L_m|$ dimana L_i adalah *longitude* ke-i dari $\theta(n,m)$ dan $i = 1,2,\dots,m$. Jika sebaliknya maka dikatakan graf theta tak seragam.

Contoh dari graf theta seragam dan graf theta tak seragam dapat dilihat pada Gambar 1 sebagai berikut:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406



Gambar 1: a.) Graf Theta Seragam $(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{5},\mathbf{3},\mathbf{1}))$; b.) Graf Theta Tak Seragam $\left(\boldsymbol{\theta}\left(\mathbf{4},\mathbf{4},(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0})\right)\right)$

Banyak cara yang dapat dilakukan untuk memperoleh graf baru, salah satunya adalah dengan melakukan suatu operasi terhadap dua buah graf. Terdapat beberapa jenis operasi pada graf diantaranya: operasi *join* $(+)$, gabungan $(\cup)$, kartesian $(\times)$, korona $(\odot)$, *comb* $(\rhd)$ dan *copy*.

Berikut ini adalah definisi yang digunakan dari salah satu jenis operasi graf yaitu operasi *copy*, dengan mengoperasikan dua buah graf atau lebih maka akan diperoleh graf baru.

Definisi 3 [5]
Dua buah graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik $(G_1 \cong G_2)$, jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik keduanya dan antara sisi-sisi keduanya, sedemikian sehingga jika sisi e bersisian dengan titik u dan v di G_1 maka sisi e' yang berkoresponden di G_2 juga harus bersisian dengan titik u' dan v' di G_2.

Definisi 4 [2]
Gabungan dari dua buah graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$ adalah graf yang mempunyai $V(G_1 \cup G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2)$.

Jika $G_1 \cong G_2 \cong G$ dengan $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ maka $G_1 \cup G_2$ dinotasikan dengan $2G$ yang dinamakan dengan 2-*copy* graf G. Secara umum, jika $G_1, G_2, \dots, G_m$ adalah m graf yang isomorfik dengan G dan $V(G_i) \cap V(G_j) = \emptyset$ untuk setiap $i \neq j$, maka $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_m$ dinotasikan dengan mG yang dinamakan dengan m-*copy* graf G.

Misalkan diberikan suatu graf $G = (V, E)$, maka pelabelan pada G didefinisikan sebagai suatu pemetaan unsur-unsur G (himpunan titik dan himpunan sisi) pada himpunan bilangan bulat positif. Pelabelan dengan domain himpunan titik disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), pelabelan dengan domain himpunan sisi disebut pelabelan sisi (*edge labeling*) dan pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi disebut pelabelan total (*total labeling*).

Sampai saat ini terdapat beberapa jenis pelabelan graf yang telah dikaji, salah satunya adalah pelabelan-k total tak teratur. Pelabelan-k total tak teratur terdiri dari pelabelan-k total tak teratur titik, pelabelan-k total tak teratur sisi dan pelabelan-k total tak teratur total.

Definisi 5 [7]

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf. Pelabelan $\lambda : V \cup E \to \{1,2,\dots,k\}$ dikatakan pelabelan-k total tak teratur titik di G, jika setiap dua titik berbeda x dan y di G memenuhi $wt(x) \neq wt(y)$. Nilai total ketakteraturan titik dari graf G yaitu bilangan bulat positif terkecil k atau label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan- k total tak teratur titik, yang dinotasikan dengan $tvs(G)$. Untuk graf $G = (V, E)$ bobot titik x yaitu $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{xy \in E} \lambda(xy)$.

Teorema 6 [1]

Misalkan G adalah graf (p, q) dengan derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ maka
$$\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq p + \Delta - 2\delta + 1$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Definisi 7 [7]

Misalkan $G=(V,E)$ adalah sebuah graf. Pelabelan $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$ dikatakan pelabelan-k total tak teratur sisi di G, jika untuk setiap dua sisi berbeda $e=x_1x_2$ dan $f=y_1y_2$ pada G memenuhi $wt(e) \neq wt(f)$. Nilai total ketakteraturan sisi yaitu bilangan bulat positif terkecil k atau label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan-k total tak teratur sisi, yang dinotasikan dengan $tes(G)$. Untuk graf $G=(V,E)$ bobot sisi e yaitu: $wt(e)=\lambda(x_1)+\lambda(e)+\lambda(x_2)$.

Teorema 8 [1]

Misalkan $G=(V,E)$ sebuah graf dengan himpunan titik Vdan himpunan sisi tak kosong E maka $\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|$

Definisi 9 [7]

Misalkan $G=(V,E)$ sebuah graf dan pelabelan $\lambda : V \cup E \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$ pada G adalah pelabelan-k total tak teratur total, jika untuk setiap dua titik berbeda x dan y pada G maka $wt(x) \neq wt(y)$ dan untuk setiap dua sisi berbeda x_1x_2 dan y_1y_2 pada G maka $wt(x_1x_2) \neq wt(y_1y_2)$. Nilai ketakteraturan total yaitu bilangan bulat positif terkecil k atau label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan-k total tak teratur total, yang dinotasikan dengan $ts(G)$.

Teorema 10 [3]

Untuk setiap graf G berlaku, $ts(G) \geq max\{tes(G), tvs(G)\}$

Metodologi yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dengan mengumpulkan berbagai informasi terhadap materi-materi yang berkaitan dengan penelitian yang diperoleh dari beberapa buku dan jurnal. Berikut langkah-langkah yang digunakan dalam menentukan nilai ketakteraturan total dari p-*copy* graf theta tak seragam sebagai berikut:

1. Menentukan batas bawah dari $tes\left(p\theta\big(4,4,(1,0,1,0)\big)\right)$ dengan menggunakan Teorema 8.
2. Menentukan batas bawah dari $tvs\left(p\theta\big(4,4,(1,0,1,0)\big)\right)$ dengan menggunakan Teorema 6.
3. Menentukan batas bawah dari $ts\left(p\theta\big(4,4,(1,0,1,0)\big)\right)$ dengan menggunakan Teorema 10.
4. Menentukan pelabelan-k total tak teratur total dari graf $\left(p\theta\big(4,4,(1,0,1,0)\big)\right)$ untuk $2 \leq p \leq 10$ dengan menggunakan label terbesar sebesar batas bawah yang diperoleh pada Langkah 3.
5. Menentukan rumus pelabelan sisi dari graf $\left(p\theta\big(4,4,(1,0,1,0)\big)\right)$ untuk p bilangan bulat positif dengan mengacu pada pelabelan yang terdapat pada Langkah 4.
6. Menentukan rumus pelabelan titik dari graf $\left(p\theta\big(4,4,(1,0,1,0)\big)\right)$ untuk p bilangan bulat positif dengan mengacu pada pelabelan yang terdapat pada Langkah 4.
7. Menentukan rumus bobot sisi dari graf $\left(p\theta\big(4,4,(1,0,1,0)\big)\right)$ untuk p bilangan bulat positif menggunakan rumus yang diperoleh pada Langkah 5 dan Langkah 6.
8. Menentukan rumus bobot titik dari graf $\left(p\theta\big(4,4,(1,0,1,0)\big)\right)$ untuk p bilangan bulat positif menggunakan rumus yang diperoleh pada Langkah 5 dan Langkah 6.
9. Membuktikan bahwa pelabelan yang diperoleh merupakan pelabelan-k total tak teratur total dari graf $\left(p\theta\big(4,4,(1,0,1,0)\big)\right)$ untuk p bilangan bulat positif.

3. Hasil dan Pembahasan

Graf $p\theta\big(4,4,(1,0,1,0)\big)$ merupakan graf yang diperoleh dengan menggandakan graf $\theta\big(4,4,(1,0,1,0)\big)$ sebanyak p kali, dimana himpunan titik dari setiap hasil penggandaan tidak ada yang beririsan. Misalkan himpunan titik dari graf $\theta\big(4,4,(1,0,1,0)\big)$ hasil penggandaan ke-i adalah

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$\{v_{4i-3}, v_{4i-2}, v_{4i-1}, v_{4i}\}$ dan himpunan sisi dari graf $\theta(4,4,(1,0,1,0))$ hasil penggandaan ke-i adalah $\{e_{6i-5} = v_{4i-3}v_{4i-1}, e_{6i-4} = v_{4i-3}v_{4i}, e_{6i-3} = v_{4i-1}v_{4i}, e_{6i-2} = v_{4i-2}\, v_{4i-1}, e_{6i-1} = v_{4i-1}v_{4i}, e_{6i} = v_{4i-2}v_{4i}\}$ dimana $1 \leq i \leq p$.

Pada penelitian ini akan diperoleh rumus umum nilai ketakteraturan total dari graf $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$ untuk p bilangan bulat positif. Untuk memperoleh rumus umum nilai ketakteraturan total dari graf $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$ yang dinotasikan dengan $ts\left(p\theta(4,4,(1,0,1,0))\right)$, maka langkah awal yang harus kita lakukan yaitu pemberian nama pada masing-masing sisi dan titik. Pemberian nama sisi dan nama titik pada graf $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$ ini bertujuan untuk memudahkan dalam merumuskan pelabelan sisi, merumuskan pelabelan titik, merumuskan bobot sisi dan merumuskan bobot titik.

Selanjutnya, hasil dari penelitian ini dipaparkan sebuah teorema tentang rumus umum nilai ketakteraturan total dari graf $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$ dimana p adalah bilangan bulat positif sebagai berikut:

Teorema 11

Misalkan $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$ adalah p–*copy* graf theta tak seragam dengan p bilangan bulat positif maka berlaku

$$ts\left(p\theta(4,4,(1,0,1,0))\right) = 2p + 1$$

Bukti :

Perhatikan bahwa banyaknya sisi dan banyaknya titik pada graf $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$ berturut-turut adalah $\left|E\left(p\theta(4,4,(1,0,1,0))\right)\right| = 6p$ dan $\left|V\left(p\theta(4,4,(1,0,1,0))\right)\right| = 4p$ serta derajat maksimum (Δ) dan derajat minimum (δ) pada graf $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$ adalah 4 dan 2. Berdasarkan Teorema 8 diperoleh bahwa $tes\left(p\theta(4,4,(1,0,1,0))\right) \geq \left\lceil\frac{6p+2}{3}\right\rceil$. Selanjutnya, berdasarkan Teorema 6 diperoleh $tvs\left(p\theta(4,4,(1,0,1,0))\right) \geq \left\lceil\frac{4p+2}{5}\right\rceil$.

Berdasarkan Teorema10, diperoleh $ts\left(p\theta(4,4,(1,0,1,0))\right) \geq max \left\{tes\left(p\theta(4,4,(1,0,1,0))\right), tvs\left(p\theta(4,4,(1,0,1,0))\right)\right\}$. Karena $\left\lceil\frac{6p+2}{3}\right\rceil > \left\lceil\frac{4p+2}{5}\right\rceil$ untuk setiap p bilangan bulat positif, maka diperoleh $ts\left(p\theta(4,4,(1,0,1,0))\right) \geq \left\lceil\frac{6p+2}{3}\right\rceil = 2p + 1$.

Selanjutnya akan dibuktikan $ts\left(p\theta(4,4,(1,0,1,0))\right) \leq 2p + 1$. Hal ini dibuktikan dengan menunjukkan adanya pelabelan-$(2p + 1)$ total tak teratur total pada graf $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$. Adapun rumus pelabelan sisi dan pelabelan titik pada graf $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$ untuk p bilangan bulat positif sebagai berikut:

a) Pelabelan sisi (*edge*) pada graf $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$ untuk p bilangan bulat positif dan $1 \leq i \leq p$

1. $\lambda(e_{6i-5}) = 2i - 1$
2. $\lambda(e_{6i-4}) = \begin{cases} 5 & \text{untuk } i = 2 \\ 2i - 1 & \text{untuk } i \neq 2 \end{cases}$
3. $\lambda(e_{6i-3}) = 2i - 1$
4. $\lambda(e_{6i-2}) = 2i$
5. $\lambda(e_{6i-1}) = 2i + 1$
6. $\lambda(e_{6i}) = 2i + 1$

b) Pelabelan titik (*vertex*) pada graf $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$ untuk p bilangan bulat positif dan $1 \leq i \leq p$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

1. $\lambda(v_{4i-3}) = \begin{cases} 4 & \text{untuk } i = 2 \\ 2i-1 & \text{untuk } i \neq 2 \end{cases}$
2. $\lambda(v_{4i-2}) = 2i + 1$
3. $\lambda(v_{4i-1}) = \begin{cases} 3 & \text{untuk } i = 2 \\ 2i & \text{untuk } i \neq 2 \end{cases}$
4. $\lambda(v_{4i}) = 2i + 1$

Berdasarkan rumus pelabelan sisi dan pelabelan titik di atas, diperoleh juga rumus untuk bobot sisi dan bobot titik pada graf $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$ untuk p bilangan bulat positif sebagai berikut:

a) Rumus bobot sisi pada graf $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$ untuk p bilangan bulat positif dan $1 \leq i \leq p$

1. $wt(e_{6i-5}) = \begin{cases} 10 & \text{untuk } i = 2 \\ 6i-2 & \text{untuk } i \neq 2 \end{cases}$
2. $wt(e_{6i-4}) = \begin{cases} 14 & \text{untuk } i = 2 \\ 6i-1 & \text{untuk } i \neq 2 \end{cases}$
3. $wt(e_{6i-3}) = \begin{cases} 11 & \text{untuk } i = 2 \\ 6i & \text{untuk } i \neq 2 \end{cases}$
4. $wt(e_{6i-2}) = \begin{cases} 12 & \text{untuk } i = 2 \\ 6i+1 & \text{untuk } i \neq 2 \end{cases}$
5. $wt(e_{6i-1}) = \begin{cases} 13 & \text{untuk } i = 2 \\ 6i+2 & \text{untuk } i \neq 2 \end{cases}$
6. $wt(e_{6i}) = 6i + 3$

b) Rumus bobot titik pada graf $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$ untuk p bilangan bulat positif dan $1 \leq i \leq p$

1. $wt(v_{4i-3}) = \begin{cases} 12 & \text{untuk } i = 2 \\ 6i-3 & \text{untuk } i \neq 2 \end{cases}$
2. $wt(v_{4i-2}) = 6i + 2$
3. $wt(v_{4i-1}) = \begin{cases} 18 & \text{untuk } i = 2 \\ 10i-1 & \text{untuk } i \neq 2 \end{cases}$
4. $wt(v_{4i}) = \begin{cases} 23 & \text{untuk } i = 2 \end{cases}$

$10i + 1$ untuk $i \neq 2$

Berdasarkan rumus bobot sisi dari graf $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$ dimana p adalah bilangan bulat positif diperoleh bahwa bobot sisi dari graf $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$ adalah bilangan bulat positif berbeda dari $6i - 2$ sampai $6i + 3$. Oleh karena itu, dapat di simpulkan bahwa bobot setiap sisinya berbeda. Kemudian berdasarkan rumus bobot titik dari graf $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$ dimana p adalah bilangan bulat positif diperoleh bahwa untuk $i = 2$ bobot titik dari graf $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$ adalah bilangan bulat positif berbeda dari 12 sampai 23. Lalu, untuk $i \neq 2$ bobot titik dari graf $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$ adalah bilangan bulat positif berbeda dari $6i - 3$ sampai $10i + 1$. Oleh karena itu, dapat di simpulkan bahwa bobot setiap titiknya berbeda. Hal ini menunjukkan bahwa terbukti $ts\left(p\theta(4,4,(1,0,1,0))\right) \leq 2p + 1$.

Oleh karena $ts\left(p\theta(4,4,(1,0,1,0))\right) \geq 2p + 1$ dan $ts\left(p\theta(4,4,(1,0,1,0))\right) \leq 2p + 1$, maka dapat disimpulkan bahwa $ts\left(p\theta(4,4,(1,0,1,0))\right) = 2p + 1$.

4. Kesimpulan

Berdasarkan uraian di atas tentang nilai ketakteraturan total dari p-*copy* graf theta tak seragam dapat disimpulkan bahwa $ts\left(p\theta(4,4,(1,0,1,0))\right) = 2p + 1$ dengan p adalah bilangan bulat positif. Hal ini dibuktikan dengan menunjukkan bahwa $ts\left(p\theta(4,4,(1,0,1,0))\right) \geq 2p + 1$ dan $ts\left(p\theta(4,4,(1,0,1,0))\right) \leq 2p + 1$. Untuk $ts\left(p\theta(4,4,(1,0,1,0))\right) \leq 2p + 1$ dibuktikan dengan cara menunjukkan adanya pelabelan-$(2p + 1)$ total tak teratur total pada graf $p\theta(4,4,(1,0,1,0))$.

References

[1] Baca, M., Jendrol J., Miller, M., dan Ryan, J. "On Irregular Total Labellings*," Discrete Math*. Vol. 307, halaman 1378-1388. 2007.

[2] Handayani, Dwi. "Pelabelan-*k* Total Tak Teratur Sisi dan Nilai Ketakteraturan Total Sisi dari Graf Lintang", halaman 6. *Skripsi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Sebelas Maret*, Surakarta. 2007.

[3] Marzuki, C.C., Salman, A.N.M., dan Miller, M. "On The Total Irregularity Strength of Cycles and Paths*," Far East Journal of Mathematical Science*. Vol. 82, halaman 1-21. 2013.

[4] Marzuki, C.C., Febrinanda,Y. "Nilai Ketakteraturan Total dari Graf Hasil Kali Comb P_m dan C_4,"*Jurnal Sains Matematika dan Statistika*. Vol. 3, halaman 8-15. 2017.

[5] Munir, R. "*Matematika Diskrit*". Revisi Kelima, halaman 356-358, 377-380, 386-387. Informatika Bandung, Bandung. 2012.

[6] Rajasingh,I., Arockiamary,S.T. "Total Edge Irregularity Strength of Series Parallel Graphs," *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. Vol. 99, halaman 11-21. 2015.

[7] Ramdani, R. "Nilai Total Ketakteraturan Total dari Dua *Copy* Graf Bintang". Vol. 8, halaman 1-16. 2014.

[8] Ramdani, R., Salman, A. N. M., dan Assiyatun, H. "On The Total Irregularity Strength of Regular Graph," *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*. Vol. 47, halaman 281-295. 2015.