Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI-10) *ISSN (Printed) : 2579-7271*
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau *ISSN (Online) : 2579-5406*
Pekanbaru,13 November 2018

Determinan Matriks $FLDcirc_r$ Bentuk Khusus Menggunakan Ekspansi Kofaktor

Fitri Aryani[1], Rysfan[2], Corry Corazon Marzuki[3], Sri Basriati[4]
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
Email: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id, rysfanrfn12@gmail.com

Abstrak

Determinan mempunyai peranan penting dalam menyelesaikan beberapa persoalan dalam matriks dan banyak dipergunakan dalam ilmu matematika maupun ilmu terapannya. Salah satu cara sederhana dalam menentukan determinan suatu matriks menggunakan ekspansi kofaktor. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan determinan dari suatu matriks $FLDcirc_r$ berbentuk khusus dengan menggunakan ekspansi kofaktor. Matriks $FLDcirc_r$ merupakan jenis matriks circulant tipe baru. Dalam menentukan determinan suatu matriks $FLDcirc_r$ berbentuk khusus tersebut, terdapat beberapa langkah yang dikerjakan. Pertama diperhatikan bentuk pola determinan dari matriks $FLDcirc_r$ berbentuk khusus orde 2×2 sampai 11×11. Kedua membuktian bentuk umum dari determinan menggunakan metode induksi matematika. Hasil yang diperoleh adalah didapatkannya bentuk umum determinan dari matriks $FLDcirc_r$ berbentuk khusus. Aplikasi juga dibahas dalam bentuk contoh.

Kata kunci: *determinan, ekspansi kofaktor, induksi matematika, matriks circulant , matriks $FLDcirc_r$.*

Abstract

Determinants have an important role in solving several problems in the matrix and are widely used in mathematics and applied sciences. One simple way of determining the determinant of a matrix is by cofactor expansion. This study aims to determine the determinant of a specially $FLDcirc_r$ matrix by using cofactor expansion. $FLDcirc_r$ matrix is new type of circulant matrix. In determining the determinant of a special $FLDcirc_r$ matrix, there are steps. First, attention the determinant of a specially $FLDcirc_r$ matrix in the form of 2×2 to 11×11. Second, prove of the general form of determinants using mathematical induction methods. The result obtained is the determination of the general determinant form of a special $FLDcirc_r$ matrix.

Keywords: *determinant, cofactor expansion, mathematical induction, $FLDcirc_r$matrix, circulant matrix.*

1. Pendahuluan

Berdasarkan teori matriks terdapat berbagai jenis matriks, salah satunya matriks *circulant* dan matriks $FLDcirc_r$. Menurut [4] matriks *circulant* adalah matriks bujur sangkar yang setiap elemen dari baris identik dengan baris sebelumnya, namun dipindahkan satu posisi ke kanan. Bentuk umum dari matriks *circulant* adalah sebagai berikut.

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 a_3 \ldots & a_n \\ a_n & a_1 a_2 \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n a_1 \ldots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots \ \vdots \cdots & \vdots \\ a_2 & a_3 a_4 \cdots & a_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Menurut [6], matriks $FLDcirc_r$ adalah sebuah tipe baru dari matriks *circulant.* Bentuk umum dari matriks $FLDcirc_r$ adalah sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ ra_{n-1} & a_0 - ra_{n-1} & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ ra_{n-2} & ra_{n-1} - ra_{n-2} & a_0 - ra_{n-1} & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ra_2 & ra_3 - ra_2 & ra_4 - ra_3 & \cdots & a_0 - ra_{n-1} & a_1 \\ ra_1 & ra_2 - ra_1 & ra_3 - ra_2 & \cdots & ra_{n-1} - ra_{n-2} & a_0 - ra_{n-1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

dapat ditulis dengan $A = FLDcirc_r(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$.

Salah satu pembahasan dalam teori matriks adalah menentukan determinan suatu matriks. Determinan mempunyai peranan penting dalam menyelesaikan beberapa persoalan dalam matriks dan banyak dipergunakan dalam ilmu matematika maupun ilmu terapannya. Nilai determinan suatu matriks dapat menentukan invers matriks. Jika nilai determinan matriks tidak

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

nol, maka matriks tersebut punya invers. Namun jika nilai detrminannya nol, maka matrisk punya invers. Nilai determinan juga dapat menyelesaikan sistem persamaan linier. Sistem persamaan linier ini banyak digunakan oleh bidang ilmu optimasi, ekonomi, dan lainnya.

Menghitung nilai determinan suatu matriks dapat menggunakan beberapa metode, diantaranya, Metode Sarrus, Metode Ekspansi Kofaktor, Metode CHIO, Metode Eliminasi Gauss, Metode Dekomposisi. Pada makalah ini metode yang akan digunakan adalah Metode Ekspansi Kofaktor. Menentukan nilai determinan matriks denagn ukuarn yang kecil, tidaklah begitu sulit. Namun jika matriksnya berukuran besar, maka menentukan determinannya lumayan sulit. Artinya diperlukan formula yang tepat untuk memudahkan menentukan determinannya. Tujaunnya, untuk memudahkan mendapatkan nilai determinan matriks. Hanya dengan mensubsitusi entri-entri matriks maka nilai detrminananya didapat tanpa melalui proses yang panjang. Makalah ini membahas determinan matriks yang berukuran $n \times n$ dengan bentuk khusus. Pembahasan mengenai determinan dari matriks berbentuk khusus telah dibahas oleh [7] dalam makalahnya dengan judul "Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin". Makalah tersebut selain merumuskan formula invers dari suatu matriks toeplitz dengan bentuk khusus juga menentukan determinan matriks toeplitz dengan bentuk khusus seperti berikut ini:

$$T_n = \begin{bmatrix} 0 & x & \cdots & x \\ x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & 0 \end{bmatrix} \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Adapun hasil determinan matriks toeplitz beorde n pada Persamaan (3) yang di peroleh pada makalah tersebut adalah sebagai berikut.

$$|T_n| = (-1)^n (n-1) x^n \quad (4)$$

Selain itu, [3] telah melakukan penelitian mengenai invers matriks toeplitz tridiagonal dalam bentuk khusus seperti berikut:

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1/a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1/a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 1/a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 1/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 & 1/a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

dengan $a \neq 0 \in \mathbb{R}$. Berdasarkan penelitian tersebut diperoleh bentuk umum determinan dari matriks toepliz berbentuk khusus pada Persamaan (6) sebagai berikut:

$$|A_n| = \begin{cases} 0, & jika\ n \equiv 6 (mod\ 2)\ atau\ n = 6\ (mod\ 5) \\ 1, & jika\ n \equiv 6 (mod\ 0)\ atau\ n = 6\ (mod\ 1) \\ -1, & jika\ n \equiv 6 (mod\ 3)\ atau\ n = 6\ (mod\ 4) \end{cases} \quad (6)$$

Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, maka penulis tertarik untuk menentukan determinan dari matriks yang lain, yaitu matriks $FLDcirc_r A_n$. Penulis menggunakan matriks $FLDcirc_r A_n$ ini disebabkan matriks ini merupakan matriks tipe baru dari matriks *circulant*. Tujuan penelitian ini adalah mendapatkan bentuk umum determinan dari suatu matriks $FLDcirc_r A_n$ yang sesuai Persamaan (7) menggunakan ekspansi kofaktor dengan mengamati polanya.

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dengan } x, r \in \mathbb{R} \qquad (7)$$

Persamaaan (7) dapat ditulis dengan $A_n = FLDcirc_r(0, x, 0,0, \dots ,0)$.

2. Metode dan Bahan Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah metode studi literatur. Penulis menggunakan langkah yang persis sama dengan penelitian [3]. Terdapat beberapa langkah yang dikerjakan dalam menentukan determinan suatu matriks $FLDcirc_r$ berbentuk khusus pada Persamaan (7). Pertama, diperhatikan bentuk pola determinan dari matriks $FLDcirc_r$ berbentuk khusus orde 2×2 sampai 11×11. Kedua, membuktian bentuk umum dari determinan menggunakan metode induksi matematika. Berikut diberikan materi-materi yang diperlukan dalam pembahasan selanjutnya.

2.1 Matriks *Circulant*

Definisi 1 [4] Matriks *circulant* adalah matriks bujur sangkar berorde $n \times n$ yang setiap elemen dari baris identik dengan baris sebelumnya, namun dipindahkan satu posisi ke kanan seperti pada Persamaan (1).

Ada beberapa tipe dari matriks *circulant*, salah satu tipe dari matriks *circulant* adalah matriks $FLDcirc_r$. Berikut diberikan definisi dari matriks $FLDcirc_r$.

Definisi 2 [6] Suatu matriks bujur sangkar dikatakan matriks $FLDcirc_r$ (*the first and the last differencer-circulant matrix*) jika memenuhi formulapada Persamaan (2).

2.2 Determinan

Definisi 3 [1] Misalkan A adalah matriks bujur sangkar. Fungsi determinan dinotasikan dengan $\det(A)$ atau $|A|$ sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda dari A. Angka $\det(A)$ disebut determinan dari A.

Teorema 1 [2] Jika A adalah suatu matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal) maka determinan A adalah hasil kali dari entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut, yaitu $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}$

Teorema 2 [2] Misalkan A adalah suatu matriks bujur sangkar. Jika A memiliki satu baris atau satu kolom bilangan nol, maka $|A| = 0$.

Metode untuk menentukan determinan matriks pada makalah ini adalah ekspansi kofaktor. Berikut diberikan teorema yang berhubungan dengan metode ekaspansi kofaktor tersebut.

Teorema 3 [2] Determinan dari matriks A berukuran $n \times n$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali yang diperoleh, dimana setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekpansi kofaktor sepanjang kolom ke-j)

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(ekpansi kofaktor sepanjang baris ke-i)

Pembuktian pernyataan matematika yang digunakan pada makalah ini adalah induksi matematika. Berikut diberikan definisi mengenai induksi matematika. Materi yang berhubungan dengan induksi matematika berdasarkan [5]. Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan akan dibuktikan bahwa $p(n)$ tersebut benar untuk semua

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

bilangan bulat $n \geq 1$, maka untuk membuktikan pernyataan ini, cukup dengan menunjukkan bahwa:

1. $p(1)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar, untuk setiap $n \geq 1$.

4. Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan langkah-langkah untuk mendapatkan determinan matriks $FLDcirc_r$, maka yang pertama kali dilakukan adalah memperhatikan bentuk pola determinan dari matriks $FLDcirc_r$ berbentuk khusus pada Persamaan (7) orde 2×2 sampai 11×11. Bentuk dari matriks $FLDcirc_r\ A$ berorde 2×2 sampai 11×11 adalah sebagai berikut:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & x \\ rx & -rx \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_7 = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_9 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{10} = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai determinan matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor. Nilai determinan matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus berorde 2×2 sampai 11×11 yang disajikan dalam tabel 1 sebagai berikut:

Tabel 1. Nilai Determinan Matriks $FLDcirc_r$ Berbentuk Khusus A_n

NO	Matriks $FLDcirc_r$ Berbentuk Khusus A_n	Nilai Determinan
1	A_2	$-x^2r$
2	A_3	x^3r
3	A_4	$-x^4r$
4	A_5	x^5r
5	A_6	$-x^6r$
6	A_7	x^7r
7	A_8	$-x^8r$
8	A_9	x^9r
9	A_{10}	$-x^{10}r$
10	A_{11}	$x^{11}r$

Setelah mendapatkan nilai-nilai determinan dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus orde 2×2 sampai 11×11 yaitu pada Tabel 1, maka dapat diduga bentuk umum dari determinan matriks $FLDcirc_r$ berbentuk khusus tersebut berdasarkan pola rekursifnya, yaitu $|A_n| = (-1)^{n+1}x^n r$. Berdasarkan dugaan tersebut, maka bentuk umum determinan matriks $FLDcirc_r$ orde $n \times n$ disajikan pada Teorema 1 berikut.

Teorema 1 Diberikan A_n suatu matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus pada Persamaan (7), maka nilai determinan matriks A_n adalah

$$|A_n| = (-1)^{n+1}x^n r, \qquad n \geq 2$$

Bukti:

Pembuktian teorema tersebut menggunakan induksi matematika

1. Basis induksi. Akan ditunjukkan $p(2)$ benar.
   Perhatikan bahwa:
   $p(2)$:$|A_2| = (-1)^{2+1}x^2 r = -x^2 r$
   dengan memperhatikan Tabel 1 maka $p(2)$ benar.
2. Langkah induksi. Asumsikan $p(k)$ benar, yaitu
   $p(k)$: $|A_k| = (-1)^{k+1}x^k r$, $k \geq 2$. Selanjutnya akan dibuktikan $p(k+1)$ juga benar, yaitu:
   $p(k+1)$: $|A_{k+1}| = (-1)^{k+2}x^{k+1} r$ (8)

Pembuktian dimulai dari:

$$|A_{k+1}| = \begin{vmatrix} 0 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{k+1}$$

dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris ketiga diperoleh

$$= -x \begin{vmatrix} 0 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & x \\ rx & -rx & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{k}$$

dengan memperhatikan Persamaan (7) maka di peroleh

$$= -x|A_k|$$

$$= -x(-1)^{k+1}x^k r$$

$$= (-1)^{k+2}x^{k+1} r$$

dengan memperhatikan Persamaan (8) maka $p(k+1)$ benar. Berdasarkan langkah 1 dan langkah 2 maka Teorema 1 terbukti.

Aplikasi Teorema 1 di atas dalam bentuk contoh. Contoh berikut menggambarkan begitu mudahnya mendapatkan nilai determinan dari matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus pada Persamaan (7). Sebab telah didapatkannya formula secara umum untuk menentukan niali determinannya.

Contoh 1 Tentukan determinan dari matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan soal dapat ditulis $A_6 = FLDcirc_3(0,2,0,0,0,0)$, dengan $n = 6, r = 3$ dan $x = 2$. Berdasarkan Teorema 1 maka determinannya adalah

$$|A_n| = (-1)^{n+1}x^n r$$
$$|A_6| = (-1)^{6+1}2^6 3$$
$$= -192$$

Contoh 2 Tentukan determinan dari matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan soal dapat ditulis $A_7 = FLDcirc_2(0,1/2,0,0,0,0)$, dengan $n = 7, r = 2$ dan $x = 1/2$. Berdasarkan Teorema 1 maka determinannya adalah

$$|A_n| = (-1)^{n+1}x^n r$$
$$|A_7| = (-1)^{7+1}(1/2)^7 2$$
$$= 1/64$$

5. Kesimpulan dan Saran

Bentuk umum determinan suatu matriks $FLDcirc_r$ bentuk khusus pada Persamaan (7) adalah sebagai berikut.

$$|A_n| = (-1)^{n+1}x^n r, \qquad n \geq 2$$

Ucapan Terimakasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada reviewer, mahasiswa dan teman sejawat yang telah memberikan masukan dalam peningkatan kualitas makalah ini.

Daftar pustaka

[1] Anton H. Aljabar Linier Elementer Edisi Kelima. Jakarta: Erlangga. 2000.
[2] Anton H, Rorres, Crhris. Aljabar Linier Elementer, Edisi Kedelapan. Jakarta: Erlangga. 2004.
[3] Aryani F, Corazon MC. *Invers Matriks Toepliz dengan Bentuk Khusus Menggunakan Metode Adjoin*. Pekanbaru. 2017

[4] Davis PJ. Circulant Matrices, Division of Applied Mathematics Brown University. New York: 1979.
[5] Munir R. Matematika Diskrit, Edisi Ketiga. Bandung:Informatika Bandung. 2007
[6] Pan X, Qin M.The Discriminance for FLDcircr Matricesand the Fast Algorithm of Their Inverseand Generalized Inverse. Shanghai. 2015
[7] Siregar B, Tulus, Sawaluddin. Invers Suatu Matriks Toeplitz Menggunakan Metode Adjoin. *Saintia Matematika*.2014; 02 (01): 85-94.