Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI-10) *ISSN (Printed) : 2579-7271*
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau *ISSN (Online) : 2579-5406*
Pekanbaru,13 November 2018

Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde 4 Berdasarkan Kombinasi Linier Rata-Rata Aritmatik, Rata-Rata Harmonik dan Rata-Rata Geometri

M. N. Muhaijir[1], T. Indriyani[2], Khairunnisa[3], Rysfan[4], Aljarizi[5], M. Soleh[6]
[1,2,3,4,5,6]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
e-mail: *nizam_ys86@yahoo.com*

Abstrak

Penelitian ini membahas modifikasi metode Runge-Kutta orde-4 (RK-4) dengan melibatkan metode Runge-Kutta berdasarkan rata-rata aritmatik, rata-rata harmonik dan rata-rata geometri . Metode RK-4 adalah salah satu metode iterasi yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa. Metode baru yang dihasilkan secara analitik dapat ditunjukkan bahwa sebanding dengan metode lain. Berdasarkan hasil kajian diperoleh bahwa metode modifikasi RK-4 kombinasi linear mempunyai galat orde 5 $(O(h^5))$ *. Hasil simulasi numerik untuk beberapa kasus menunjukkan RK-4 yang telah dimodifikasi lebih baik dibandingkan RK-4 berdasarkan rata-rata harmonik dan rata-rata geometri.*

Kata kunci: *Metode Runge-Kutta, galat, rata-rata aritmatik, rata-rata geometri , rata-rata harmonik*

Abstract

This study discusses the modification method of Runge-Kutta order-4 (RK-4) using involving the Runge-Kutta method of arithmetic mean, harmonic mean and geometric mean. The RK-4 method is one of the iteration methods commonly used for ordinary differential equations. A new method that can be used to compare with other methods. Based on the results of the study, it was found that the modification of RK-4 linear combination had error of order 5 $(O(h^5))$ *. The numerical simulation results for some cases showed that the RK-4 had been done better than the RK-4 did the harmonic mean and geometry mean.*

Keywords*: artimetic mean, error, geometry mean, harmonic mean, Runge-Kutta method*

1. Pendahuluan

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan seperti dalam bidang Fisika, Kimia, Ekonomi, atau pada persoalan rekayasa yang diberikan dalam bentuk persamaan differensial.

Persamaan diferensial merupakan persamaan fungsi turunan yang ada dalam permasalahan matematika. Metode yang digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial adalah metode analitik, tetapi ada banyak kasus yang tidak dapat diselesaikan seacara analitik sehingga diperlukan metode lain untuk menyelesaikan kasus tersebut. Penyelesain tersebut dilakukan dengan cara mendekati nilai sebenarnya yaitu dengan menggunakan metode numerik.

Metode numerik merupakan metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial dengan menggunakan bantuan komputer sebagai alat hitungnya. Beberapa perhitungan numerik satu langkah yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial adalah metode Euler, metode Heun, metode deret Taylor dan metode Runge-Kutta. Metode Runge-Kutta dikenal sebagai metode yang memiliki keakurasian lebih baik dibandingkan dengan ketiga metode lainnya yang telah disebutkan. Metode Runge-Kutta merupakan alternatif lain dari metode Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang tinggi dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi $f(x, y)$ pada titik terpilih setiap selang. Secara umum bentuk metode Runge-Kutta orde 4 adalah

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{1}$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Modifikasi metode Runge-Kutta orde 4 telah banyak dilakukan oleh peneliti, seperti yang dilakukan oleh Evans [3] memodifikadi metode tersebut berdasarkan rata-rata aritmatik sehingga diperoleh bentuk

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3}\left(\frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2} + \frac{k_3 + k_4}{2}\right). \tag{2}$$

Tahun 1991, Evans [4] memodifikasi metode Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata geometri sehingga menghasilkan

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3}\left(\sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_2 k_3} + \sqrt{k_3 k_4}\right). \tag{3}$$

Selanjutnya, Sanugi dan Evans [8] melakukan modifikasi Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata harmonic dan mereka menghasilkan metode baru dengan bentuk persamaan

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3}\left(\frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2} + \frac{2k_2 k_3}{k_2 + k_3} + \frac{2k_3 k_4}{k_3 + k_4}\right). \tag{4}$$

Selain bentuk modifikasi Runge-Kutta orde 4 berdasarkan ketiga rata-rata yang telah dikemukan di atas. Modifikasi juga telah dilakukan berdasarkan rata-rata centroidal [5], rata-rata contra-harmonic [6], rata-rata heronian [6] dan rata-rata akar kuadrat [9]. Kemudian, Khattri [8] memperkenalkan modifikasi metode Runge Kutta orde tiga berdasarkan kombinasi linier dari rata-rata aritmatik (AM), rata-rata harmonik (HM) dan rata-rata geometri (GM) untuk permasalahan persamaan diferrensial biasa dengan bentuk persamaan

$$RM(k_1, k_2) = \frac{14\, AM(k_1, k_2) - HM(k_1, k_2) + 32\, GM(k_1, k_2)}{45}. \tag{5}$$

Berdasarkan penelitian-penelitian yang telah dilakukan sebelumnya untuk memodifikasi metode Runge Kutta, maka penelitian ini mengembangkan modifikasi yang dilakukan Khattri [8] dengan mengaplikasikan metode Runge-Kutta berdasarkan rata-rata aritmatik (RA), rata-rata harmonik (RH) dan rata-rata geometri (RG).

2. Metodelogi dan Bahan Penelitian

Metodelogi enelitian ini menggunakan studi literatur yang berfungsi untuk mengumpulkan informasi yang dibutuhkan berupa buku-buku, artikel-artikel, maupun sumber-sumber dari internet. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Metode Runge-Kutta orde empat dibentuk ke dalam rumusan yang memuat unsur aritmatik.
2. Metode Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata aritmatik disubsitusikan pada rata-rata harmonik.
3. Langkah selanjutnya ekspansikan Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata harmonik pada deret geometri untuk menghindari polinomial dalam bentuk pecahan.
4. Metode Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata aritmatik disubsitusikan pada rata-rata geometri.
5. Langkah selanjutnya ekspansikan Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata geometri pada deret binomial untuk menghindari polinomial dalam bentuk akar.
6. Memperkenalkan rumusan modifikasi Runge-Kutta orde 2 berdasarkan kombinasi linier rata-rata aritmatik, rata-rata harmonik dan rata-rata geometri yang dilakukan oleh Khatri [Khatri].
7. Berdasarkan rumusan modifikasi yang diperkenalkan oleh Khatri (2001), peneliti melakukan pengembangan modifikasi Runge-Kutta orde 4 berdasarkan kombinasi linier rata-rata aritmatik.
8. Kemudian bandingkan Runge-Kutta modifikasi (RKKL) yang diperoleh dengan deret Taylor, sehingga menghasilkan persamaan-persamaan non linier.
9. Langkah selanjutnya, mencari nilai parameter $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ dengan menyelesaikan persamaan-persamaan non linier yang diperoleh menggunakan perangkat lunak Maple.
10. Simulasi numerik dengan menggunakan perangkat lunak Maple.

Selanjutnya, bagian ini juga menyajikan beberapa definisi dan teorema dasar yang dibutuhkan sebagai landasan teori untuk uraian-uraian pada bagian berikutnya. Adapun defenisi dan teorema tersebut disajikan berikut ini.

Definisi 1 [7] Misalkan $y(x)$ adalah solusi eksak untuk pesamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)),\ x \in (x_0, x_n)$. Jika persamaan tersebut diselesaikan menggunakan deret Taylor disekitar titik awal di masing-masing interval x_n untuk mendapatkan nilainya pada akhir interval $x_{n+1} = x_n + h$ yaitu sebagai berikut

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i, y(x_i)) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(x_i, y(x_i))$$

$$+ \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i)),$$

untuk $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Definisi 2 [12] Metode Runge-kutta eksplisit orde-*p* secara umum dapat ditulis

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{p} b_i k_i,$$

untuk

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j,\ i = 1, \ldots, p,$$

dengan $h = \Delta x$ adalah panjangnya langkah, $x_n = nh$ dan u_n adalah aproksimasi untuk $u(t_n)$.

Teorema 3 [7] Jika metode Taylor orde *n* digunakan untuk memperkirakan solusi untuk *initial value problem* (IVP) $y'(f(x, y(x)),\ x \in (x_0, y_0),\ y(x_0) = y_0$ dengan ukuran interval *h* dan $y \in C^{n+1}[x_0, y_0]$, maka kesalahan pemotongan lokal (*local truncation error*) adalah $O(h^n)$.

3. Hasil dan Pembahasan

Persamaan (2), (3), dan (4) diubah ke dalam bentuk kombinasi linear dengan menggunakan persamaan (5) sehingga diperoleh bentuk

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{135}\left(\begin{array}{c} 7(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) - \left(\frac{2k_1k_2}{k_1 + k_2} + \frac{2k_2k_3}{k_2 + k_3} + \frac{2k_3k_4}{k_3 + k_4} \right) \\ + 32\left(\sqrt{k_1 + k_2} + \sqrt{k_2 + k_3} + \sqrt{k_3 + k_4}\right) \end{array} \right) \tag{6}$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + a_1 h, y_n + a_1 hk_1)$$

$$k_3 = f(x_n + (a_2 + a_3)h, y_n + a_2 hk_1 + a_3 hk_2)$$

$$k_4 = f(x_n + (a_4 + a_5 + a_6)h, y_n + a_4 hk_1 + a_5 hk_2 + a_6 hk_3)$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Kemudian, berdasarkan persamaan (6) akan ditentukan nilai-nilai parameter $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,$ dan a_6 untuk mendapatkan bentuk metode yang telah modifikasi. Untuk mendapatkan nilai-nilai parameter-parameter tersebut, nilai $k_1, k_2, k_3,$ dan k_4 diekspansi menggunakan deret Taylor, sehingga diperoleh

$$k_1 = f$$

$$k_2 = f + f_y a_1 hf + \frac{1}{2} f_{yy} a_1^2 h^2 f^2 + \frac{1}{6} f_{yyy} a_1^3 h^3 f^3$$

$$k_3 = \left(f_{yyy} f^3 A^3 + 6 f_{yy} a_3^2 f^2 f_y a_1 + 6 f_{yy} a_2 f^2 a_3 f_y a_1 + 3 f_y a_3 f_{yy} a_1^2 f^2 \right) \frac{h^3}{6}$$
$$+ \left(f_{yy} f^2 A^2 + 2 f_y^2 a_3 a_1 f \right) \frac{h^2}{2} + f_y fAhf + f$$

$$k_4 = (6 f_{yy} a_5^2 f^2 f_y a_1 + 6 f_{yy} a_5 f^2 f_y a_1 a_4 + 6 f_{yy} a_6 f_y f^2 Aa_4 + 6 f_{yy} a_6 f_y f^2 Aa_5$$
$$+ 3 f_y a_6 f_{yy} f^2 A^2 + 3 f_y a_5 f_{yy} a_1^2 f^2 + 6 f_{yy} a_6^2 f_y f^2 A + 6 a_6 f_y^3 a_3 a_1 f$$
$$+ 6 f_{yy} a_5 f_y a_1 f^2 a_6 + f_{yyy} f^3 B^3) \frac{h^3}{6} + (2 a_5 f_y^2 a_1 f + f_{yy} f^2 B^2 + 2 a_6 f_y^2 fA) \frac{h^2}{2}$$
$$+ \left(f_y fB \right) h + f \qquad (7)$$

dengan $A = (a_2 + a_3)$ dan $B = (a_4 + a_5 + a_6)$.

Nilai-nilai $k_1, k_2, k_3,$ dan k_4 pada persamaan (7) disubstitusikan ke persamaan (6) dan nilai yang diperoleh dibandingkan dengan deret Taylor orde 4, sehingga diperoleh sistem persamaan nonlinier berikut

$$ff_y \quad : \frac{1}{3} a_3 + \frac{1}{3} a_2 + \frac{1}{6} a_5 + \frac{1}{6} a_6 + \frac{1}{6} a_4 + \frac{1}{3} a_1 = \frac{1}{2}$$

$$f^2 f_{yy} : \frac{1}{6} a_1^2 + \frac{1}{3} a_2 a_3 + \frac{1}{6} a_4 a_5 + \frac{1}{6} a_4 a_6 + \cdots + \frac{1}{12} a_6^2 = \frac{1}{6}$$

$$ff_y^2 \quad : \frac{2}{9} a_2 a_6 + \frac{7}{8} a_3 a_1 + \frac{1}{18} a_3 a_5 + \frac{1}{6} a_5 a_1 + \cdots - \frac{1}{18} a_3^2 = \frac{1}{6}$$

$$ff_y^3 \quad : \frac{1}{12} a_5 a_4 a_6 + \frac{1}{72} a_4^3 + \frac{1}{36} a_5^3 - \frac{1}{12} a_5 a_2 a_6 + \cdots + \frac{1}{36} a_1^3 = \frac{1}{24}$$

$$f^3 f_{yyy} : \frac{1}{36} a_4^3 + \frac{1}{18} a_3^3 + \frac{1}{36} a_5^3 + \frac{1}{12} a_5 a_4^2 + \frac{1}{6} a_2 a_3^2 + \cdots + \frac{1}{6} a_3 a_2^2 = \frac{1}{24}$$

$$f^2 f_y f_{yy} : \frac{1}{6} a_6 a_3^2 + \frac{1}{6} a_5 a_6 a_1 + \frac{7}{18} a_2 a_3 a_1 + \frac{2}{9} a_2 a_3 a_6 + \cdots + \frac{2}{9} a_3 a_5 a_6 = \frac{1}{6} \qquad (8)$$

Jika sistem persamaan (8) diselesaikan, maka diperoleh nilai $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = -\frac{1}{24},$ $a_3 = \frac{13}{24},\ a_4 = -\frac{1}{12},\ a_5 = \frac{23}{156}$ dan $a_6 = \frac{73}{78}$.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Selanjutnya, nilai-nilai a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, dan a_6 disubsitusikan ke dalam persamaan (6), sehingga diperoleh bentuk persamaan

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{135}(7(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) - (\frac{2k_1k_2}{k_1 + k_2} + \frac{2k_2k_3}{k_2 + k_3} + \frac{2k_3k_4}{k_3 + k_4}) + 32(\sqrt{k_1 + k_2} + \sqrt{k_2 + k_3} + \sqrt{k_3 + k_4}))$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{1}{24}hk_1 + \frac{13}{24}hk_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_n + h, y_n - \frac{1}{12}hk_1 + \frac{23}{156}hk_2 + \frac{73}{78}hk_3\right)$$

Bentuk persamaan terakhir merupakan bentuk persamaan hasil modifikasi metode Runge-Kutta orde 4 menggunakan kombinasi linear rata-rata aritmatik, rata-rata harmonik dan rata-rata geometri.

Berikut diberikan contoh penyelesaian persamaan differensial dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde-4 berdasarkan kombinasi linier dari metode Runge-Kutta berdasarkan rata-rata aritmatika (RKA), rata-rata harmonik (RKH) dan rata-rata geometri (RKG).

Contoh 1:

Diketatuhi persamaan differensial berikut:

$$y' = \frac{x^3}{y(x)},\ y(0) = 1 \text{, dan } 0 \le x \le 10,$$

dengan solusi eksak yang diberikan $y(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x^4 + 1}$ untuk $h = 0.1$.

Hasil eksak dan *error* yang diperoleh setiap metode untuk Contoh 1 diperlihatkan pada Tabel 1.

Tabel 1 *Error* untuk Contoh 1

i	x_i	Solusi Eksak (y_i)	*Error*			
			RKA	RKH	RKG	RKKL
0	0	1.0000000000	0	0	0	0
1	0.1	1.0000249997	6.1357E-06	3.1249E-10	9.0477E-06	1.3426E-05
2	0.2	1.0003999200	2.4904E-05	2.0320E-09	3.7090E-05	6.6225E-05
3	0.3	1.0020229538	5.6059E-05	1.3829E-08	8.3749E-05	0.0001E-01
4	0.4	1.0063796500	9.9222E-05	4.4033E-08	0.0001E-01	0.0003E-01
5	0.5	1.0155048006	0.0002E-00	1.0158E-07	0.0002E-01	0.0004E-01

Berdasarkan Tabel 1 dapat dilihat bahwa metode kombinasi yang dihasil memiliki nilai *error* yang lebih besar dibandingkan dengan ketiga metode yang lainnya.

Contoh 2:

Diketatuhi persamaan differensial berikut:

$$y' = (3x^2 + 1)y(x)^2,\ y(0) = -1 \text{, dan } 0 \le x \le 10,$$

Denga solusi eksak yang diberikan $y(x) = -(x^3 + x + 1)^{-1}$ untuk $h = 0.05$.

Hasil eksak dan *error* yang diperoleh setiap metode untuk Contoh 2 diperlihatkan pada Tabel 2.

Tabel 1 *Error* untuk Contoh 2

i	x_i	Solusi Eksak (y_i)	*Error*			
			RKA	RKH	RKG	RKKL
0	0	-1.000000000	0	0	0	0
1	0.05	-0.95226758	5.3991E-06	4.1892E-08	8.1195E-06	1.6279E-05
2	0.10	-0.90826521	8.6050E-06	6.9542E-08	1.2942E-05	2.5951E-05
3	0.15	-0.86702070	1.0470E-05	8.8519E-08	1.5749E-05	3.1584E-05
4	0.20	-0.82781456	1.1543E-05	1.0224E-07	1.7365E-05	3.4829E-05
5	0.25	-0.79012345	1.2165E-05	1.1269E-07	1.8303E-05	3.6717E-05

Tabel 2 memperlihatkan bahwa metode hasil modifikasi (RKKL) memiliki nilai *error* yang hampir sama dengan RKA dan RKH, dan memiliki nilai *error* yang lebih besar dibandingkan dengan RKG.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil simulasi numerik untuk dua kasus yang digunakan, metode hasil kombinasi menggunakan metode rata-rata aritmatik (RKA), rata-rata harmonik (RKH) dan rata-rata geometri (RKG) diketahui bahwa metode hasil modifikasi (RKKL) kurang memiliki keakuratan yang lebih baik dibandingkan dengan metode-metode RKA, RKH, dan RKG sebelum dimodifikasi.

Daftar Pustaka

[1] Ababneh, O. Y. and Rozita, R., New Third Order Runge-Kutta Method Bassed on Contraharmonic Mean for Stiff Problem, *Applied Mathematical Sciences*, 3 (2009), 365–376.
[2] Atkinson, K. E. and David, W. H., Numerical Solution of Ordinary Different Equation, 2009.
[3] Evans, D. J., New Runge-Kutta Methods for Initial Value Problem, *Applied Mathematics Letter*, 1 (1989), 25–28.
[4] Evans, D. J., A New Runge-Kutta Method for Initial Value Problem with Error Control, *International Journal Computer Mathematics*, 39 (1991), 217–227.
[5] Evans, D. J. and Yaakub, A. R., A New Fourth Order Runge-Kutta Formula Based On The Contra-Harmonic Mean, *International Journal Computer Mathematics*, 57 (1994), 249–256.
[6] Evans, D. J. and Yaacob, N., A Fourth Order Runge-Kutta Method based on Heronian Mean, *International Journal Computer Mathematics*, 58 (1995), 103–115.
[7] Gadisa, G. and Garoma, H., Comparison of Higher Order Taylor's Method and Runge-Kutta Methods for Solving First Order Oredinary Differential Equation, *Journal of Computer and Mathematical Seciences*, 8 (1) (2017), 12–23.
[8] Khattri, S.K., Euler's Number and Some Means, *Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences*, 28 (2012), 36–377 .
[9] Sanugi B. B. dan D. J. Evans, A New Fourth Order Runge-Kutta Formula Based on the Harmonic Mean, *International Journal Computer Mathematics*, 50 (1994), 113–118.
[10] Waz-Waz, A. M., A Modified Third Order Runge-Kutta Method, *Applied Mathematics Letter*, 3 (3) (1990), 123–125.
[11] Waz-Waz, A. M., A Comparison of Modified Runge-Kutta Formulas Based on a Variety of Means, *International Journal Computer Mathematics*, 50 (1994), 105–112.
[12] Zingg, D. W. and Chisholm, T. T., Runge-Kutta Methods for Linear Ordinary Differential Equations, *Applied Numerical Mathematics*, 31 (1999), 227–238.