ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Vektor Kendali Diskrit Kanonik Diagonal Matriks *n*=2 Dengan Faktor Diskon

Nilwan Andiraja
UIN Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru
Jl. H.R Soebrantas No 155 Km. 18 telp : 0761-8359937
e-mail: nilwanandiraja@uin-suska.ac.id

Abstrak

Bentuk kanonik diagonal merupakan salah satu bentuk representasi dari persamaan karakteristik untuk waktu diskrit yang dapat dicari vektor kendali. Pada tulisan ini bentuk kanonik diagonal yang dibahas untuk ukuran matriks 2x2. Bentuk kanonik diagonal dilakukan modifikasi dengan memberi faktor diskon. Faktor diskon juga diberikan kepada persamaan fungsi tujuan. Selanjutnya, vektor kendali diperoleh dengan menggunakan persamaan Hamilton. Kemudian dari persamaan Hamilton didapat persamaan Riccati untuk waktu diskrit. Solusi dari persamaan Riccati didapat vektor kendali. Berdasarkan simulasi yang diberikan diperoleh bahwa terdapat lebih dari satu solusi persamaan Riccati. Oleh karena itu didapat juga lebih dari satu vektor kendali untuk bentuk kanonik diagonal.

Kata kunci: *diagonal, kanonik, kendali, Hamilton,Riccati*

Abstract

The diagonal canonical form is one form of representation of discrete equations that can be obtined the control vector. In this paper the diagonal canonical form is discussed for a 2x2 matrix size. The diagonal canonical form is modified by giving a discount factor. The discount factor is also given to the equation of the objective function. Furthermore, the control vector got using the Hamilton equation. Then from the Hamilton equation founded the Riccati equation for discrete time. The solution of the Riccati equation used to create the control vector. Base on the simulation, there are more than one the solution of Riccati equations. Therefore, there are also more than one control vector for diagonal canonical shapes.

Keywords :*diagonal, canonic, control, Hamilton, Riccati*

1. Pendahuluan

Sistem dinamik merupakan sistem bekerja secara dinamis yang dapat ditentukan vektor kendalinya. Berdasarkan waktunya ada sistem dinamik kontinu dan sistem dinamik diskrit. Sistem dinamik diskrit merupakan sistem yang bergerak tidak statis atau bergerak dinamis yang bekerja pada waktu diskrit. Pada sistem dinamik diskrit terdapat banyak bentuk persamaan dinamik, salah satunya yaitu bentuk kanonik diagonal. Bentuk Kanonik diagonal dapat ditemukan di Ogata (1995) dan Heri (2004), pada kedua sumber tersebut diketahui bahwa bentuk kanonik diagonal merupakan bentuk representasi dari persamaan karakteristik dinamik dengan menggunakan persamaan *pulse transfer*. Namun pada Ogata (1995) dan Heri (2004), hanya dijelaskan membentuk bentuk kanonik diagonal dari persamaan karakteristik dinamik diskrit tapi belum ditemukan vektor kendali. Penentuan vektor kendali untuk sistem dinamik waktu diskrit dapat ditemukan pada Soleha (2013) yang telah membahas tentang penentuan kendali optimal pada sistem dinamik waktu diskrit dengan menggunakan persamaan Hamiltom dengan penyelesaian persamaan Riccati waktu diskrit.

Selain itu, menurut Gaitsgory dkk (2015) diketahui bahwa sistem dinamik waktu diskrit dapat diberikan faktor diskon pada persamaan dinamiknya. Namun, pada Gaitsgory dkk (2016) sistem dinamik diskrit yang diberikan belum berbentuk kanonik diagonal. Oleh karena itu, penulis akan merubahterlebih dahulu bentuk kanonik diagonal pada Ogata (1995) dan Heri (2004) dengan cara memberikan faktor diskon yang diperolah dari Gaitsgory dkk (2016). Kemudian penulis juga memberikan faktor diskon pada fungsi tujuan yang diberikan pada bentuk kanonik diagonal.

Sehingga berdasarkan uraian diatas. penulis akan menentukan vektor kendali dari bentuk kanonik diagonal dengan penambahan faktor diskon pada waktu diskrit, menggunakan pola penentuan vektor kendali pada sistem dinamik waktu diskrit pada Soleha (2013). Pada penelitian ini penulis membatasi bentuk kanonik diagonal untuk matriks ukuran *n=2*untuk satu kendali pada waktu diskrit.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

2. Metode Penelitian.

Pada bagian ini diberikan beberapa teori yang mendukung pembahasan pada penelitian ini:

2.1. Kendali Optimal Waktu Diskrit

Diberikan persamaan umum dinamik untuk masalah kendali optimal unutk waktu diskrit sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k), k = 1, 2, \dots, n \tag{1}$$

dengan kondisi awal $\boldsymbol{x}_0$dengan$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k$adalah vektor state berukuran n dan vektor kendali$\boldsymbol{u}_k$ adalah vektor berukuran *m.*
Selanjutnya diketahui fungsi tujuan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{J} = \emptyset(N, \boldsymbol{x}_n) + \sum_{\boldsymbol{k=i}}^{\boldsymbol{N-1}} L^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) \tag{2}$$

Kemudian, untuk menentukan solusi dari masalah umum kendali optimal waktu diskrit diperlukan persamaan-persamaan yang berfungsi untuk mendapatkan vektor kendali. Adapun persamaan-persamaan itu sebagai berikut:

Persamaan Hamilton : $$H^k = L^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) + \lambda_{k+1}^T \boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) \tag{3}$$

Persamaan *state* : $$\boldsymbol{x}_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_{k+1}}, \quad k = i, \dots, N-1, \tag{4}$$

Persamaan *costate* : $$-\lambda_k = \frac{\partial H^k}{\partial \boldsymbol{x_k}}, \quad k = i, \dots, N-1, \tag{5}$$

Persamaan stasioner : $$0 = \frac{\partial H^k}{\partial \boldsymbol{u}_k}, \quad k = i, \dots, N-1, \tag{6}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (3)-(6) dapat dibentuk persamaan Riccati untuk waktu diskrit untuk mendapatkan vektor kendali.

2.2. Sistem Dinamik Linier Kuadratik untuk Waktu Diskrit dengan Faktor Diskon

Berdasarkan persamaan (1) dibentuk fungsi dinamik dengan pemberian faktor diskon sebagai berikut :

$$\sqrt{\beta^{k+1}}\boldsymbol{x}_{k+1} = \sqrt{\beta^{k+1}}\left(\boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k)\right)$$
$$\sqrt{\beta^{k+1}}\boldsymbol{x}_{k+1} = \sqrt{\beta}\sqrt{\beta^k}(\boldsymbol{f^k}(\boldsymbol{x}_k)) + \sqrt{\beta}\sqrt{\beta^k}(\boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{u}_k))$$

dengan menggunakan definisi $\widehat{\boldsymbol{x}}_k = \sqrt{\beta^k}\boldsymbol{x}_k$dan $\widehat{\boldsymbol{u}}_k = \sqrt{\beta^k}\boldsymbol{u}_k$, maka diperoleh:

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \sqrt{\beta}\left(\left(\boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_k)\right) + (\boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{u}_k))\right) \tag{7}$$

Kemudian fungsi tujuan dengan pemberian faktor diskon sebagai berikut :

$$\boldsymbol{J} = \emptyset(N, \widehat{\boldsymbol{x}}_k) + \sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{N-1}} L^k(\widehat{\boldsymbol{x}}_k, \widehat{\boldsymbol{u}}_k) \tag{8}$$

2.3. Bentuk Kanonik Diagonal

Diberikan persamaan karakteristik untuk matriks ukuran 2x2 yaitu

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2)$$
$$y(z)(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) = u(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})$$
$$y(z)(z^2 + a_1 z + a_2) = u(z)(b_0 + b_1 z + b_2) \tag{9}$$

Persamaan (9) diatas dapat diubah kebentuk fungsi *pulse transfer* sebagai berikut:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} \tag{10}$$

Fungsi *pulse tranfer* pada Persamaan (10)dapat diubah ke bentuk kanonik diagonal sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \tag{11}$$

Selanjutnya, metode penelitian yang dipakai sebagai berikut :

1. Bentuk kanonik diagonal diskrit pada Persamaan (11) dan fungsi tujuan pada Persamaan (2) diberikan faktor diskon seperti pada Persamaan (7) dan (8).
2. Berdasarkan langkah (1), dibentuk persamaan Hamilton.
3. Berdasarkan Persamaan Hamilton pada langkah (2) dibentuk persamaan *state, costate* dan stasioner.
4. Dibentuk pengali lagrange dari fungsi tujuan pada langkah (1).
5. Berdasarkan langkah (4) dan persamaan *costate* pada langkah (3) dibentuk persamaan Ricccati kemudian ditentukan solusinya.
6. Solusi persamaan Riccati pada langkah (5), persamaan *costate* pada langkah (3), pengali lagrange pada langkah (4) dan persamaan stasioner pada langkah (3) digunakan untuk membentuk vektor kendali.

3. Pembahasan

3.1. Bentuk Kanonik Diagonal untuk matriks $n = 2$.

Pada bagian ini, dibentuk kanonik diagonal untuk matriks $n = 2$ pada Persamaan (11), dengan pemberian faktor diskon seperti pada Persamaan (7). Bentuk kanonik diagonal yang diperoleh sebagai berikut:

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \begin{bmatrix} p_1\sqrt{\beta} & 0 \\ 0 & p_2\sqrt{\beta} \end{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}}_k + \begin{bmatrix} \sqrt{\beta} \\ \sqrt{\beta} \end{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{u}}_k \tag{12}$$

Kemudian berdasarkan Persamaan (8) dibentuk fungsi tujuan yang telah diberikan faktor diskonuntuk waktu diskrit, yaitu:

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{2} \hat{x}_N^T S_N \widehat{\boldsymbol{x}}_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{\boldsymbol{x}}_k^T Q \widehat{\boldsymbol{x}}_k + \widehat{\boldsymbol{u}}_k^T R \widehat{\boldsymbol{u}}_k \tag{13}$$

Pada Persamaan (13) diasumsikan $Q, R,$ dan S_N adalah matriks simetri semidefinite positif dan $R_k \neq 0$ untuk semua k.

Selanjutnya, berdasarkan Persamaan (12) dan fungsi tujuan (13) dibentuk persamaan Hamilton berdasarkan persamaan (3) sebagai berikut,

$$H = \frac{1}{2}(\widehat{\boldsymbol{x}}_k^T Q \widehat{\boldsymbol{x}}_k + \widehat{\boldsymbol{u}}_k^T R \widehat{\boldsymbol{u}}_k) + \lambda_{k+1}^T \left(\begin{bmatrix} p_1\sqrt{\beta} & 0 \\ 0 & p_2\sqrt{\beta} \end{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}}_k + \begin{bmatrix} \sqrt{\beta} \\ \sqrt{\beta} \end{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{u}}_k \right), \tag{14}$$

Kemudian dari Persamaan Hamilton (14), untukmendapatkan vektor kendali yang diinginkan. Maka perlu dibentuk persamaan *state,*persamaan *costate*dan persamaan stasionerseperti pada persamaan (4)-(6) sebagai berikut:

Persamaan *state* : $$\widehat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_{k+1}} = \begin{bmatrix} p_1\sqrt{\beta} & 0 \\ 0 & p_2\sqrt{\beta} \end{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{x}}_k + \begin{bmatrix} \sqrt{\beta} \\ \sqrt{\beta} \end{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{u}}_k, \tag{15}$$

Persamaan *costate* : $$\lambda = \frac{\partial H_k}{\partial \hat{x}_k} = Q \widehat{\boldsymbol{x}}_k + \begin{bmatrix} p_1\sqrt{\beta} & 0 \\ 0 & p_2\sqrt{\beta} \end{bmatrix}^T \lambda_{k+1}, \tag{16}$$

Persamaan stasioner : $0 = \frac{\partial H_k}{\partial \hat{\boldsymbol{u}}_k} = R\hat{\boldsymbol{u}}_k + \begin{bmatrix}\sqrt{\beta}\\ \sqrt{\beta}\end{bmatrix}^T \lambda_{k+1},$ (17)

BerdasarkanPersamaan (17) maka diperolehvektor kendali yaitu

$$\hat{\boldsymbol{u}}_k = -R^{-1}\begin{bmatrix}\sqrt{\beta}\\ \sqrt{\beta}\end{bmatrix}^T \lambda_{k+1}, \quad (18)$$

Pada Persamaan (18) simbol λ_{k+1} belum diketahui nilainya. Oleh karena itu Persamaan (18) disubtitusikan ke Persamaan (15) yaitu,

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \begin{bmatrix}p_1\sqrt{\beta} & 0\\ 0 & p_2\sqrt{\beta}\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_k - \begin{bmatrix}\sqrt{\beta}\\ \sqrt{\beta}\end{bmatrix}R^{-1}\begin{bmatrix}\sqrt{\beta}\\ \sqrt{\beta}\end{bmatrix}^T \lambda_{k+1}, \quad (19)$$

Kemudian berdasarkan fungsi tujuan Persamaan (5) diturunkan terhadap $\hat{\boldsymbol{x}}_N$ untuk membentuk pengali lagrange yaitu:

$$\lambda_N = \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial \hat{x}_N} = S_N\hat{\boldsymbol{x}}_N$$

Untuk setiap k diasumsikan berlaku,

$$\lambda_k = S_k\hat{\boldsymbol{x}}_k \quad (20)$$

Kemudian diubstitusikan Persamaan (20) ke Persamaan (19) untuk mendapatkan persamaan:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \left(I + \begin{bmatrix}\sqrt{\beta}\\ \sqrt{\beta}\end{bmatrix}R^{-1}\begin{bmatrix}\sqrt{\beta}\\ \sqrt{\beta}\end{bmatrix}^T S_{k+1}\right)^{-1}\begin{bmatrix}p_1\sqrt{\beta} & 0\\ 0 & p_2\sqrt{\beta}\end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_k \quad (21)$$

selanjutnya disubstitusikan Persamaan (20) ke Persamaan (16) yaitu

$$S_k\hat{\boldsymbol{x}}_k = Q\hat{\boldsymbol{x}}_k + \begin{bmatrix}p_1\sqrt{\beta} & 0\\ 0 & p_2\sqrt{\beta}\end{bmatrix}^T S_{k+1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}. \quad (22)$$

Berikutnya, disubstitusikan persamaan (21) ke Persamaan (22) untuk mendapatkan,

$$S_k = \begin{bmatrix}p_1\sqrt{\beta} & 0\\ 0 & p_2\sqrt{\beta}\end{bmatrix}^T S_{k+1}\left(I + \begin{bmatrix}\sqrt{\beta}\\ \sqrt{\beta}\end{bmatrix}R^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}^T S_{k+1}\right)^{-1}\begin{bmatrix}p_1\sqrt{\beta} & 0\\ 0 & p_2\sqrt{\beta}\end{bmatrix} + Q \quad (23)$$

Persamaan (23) merupakan persamaan Riccati untuk waktu diskrit pada kasus bentuk kanonik diagonal dengan pemberian faktor diskon. Selanjutnya, persamaan Riccati (23) akan dicari solusi S_k. Kemudian dari persamaan (16) dan Persamaan (20)dapat dibentuk persamaan sebagai berikut:

$$\lambda_{k+1} = \left(\begin{bmatrix}p_1\sqrt{\beta} & 0\\ 0 & p_2\sqrt{\beta}\end{bmatrix}^T\right)^{-1}(S_k - Q)\hat{\boldsymbol{x}}_k, \quad (24)$$

Selanjutnya,disubstitusikan persamaan (24) ke persamaan (18) diperoleh

$$\hat{\boldsymbol{u}}_k = -R^{-1}\begin{bmatrix}\sqrt{\beta}\\ \sqrt{\beta}\end{bmatrix}^T\left(\begin{bmatrix}p_1\sqrt{\beta} & 0\\ 0 & p_2\sqrt{\beta}\end{bmatrix}^T\right)^{-1}(S_k - Q)\hat{\boldsymbol{x}}_k, \quad (25)$$

Persamaan (25) dapat disederhanakan menjadi:

$$\hat{\boldsymbol{u}}_k = -K_k \hat{\boldsymbol{x}}_{k},$$

dengan

$$K_k = -R^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\beta} \\ \sqrt{\beta} \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} p_1\sqrt{\beta} & 0 \\ 0 & p_2\sqrt{\beta} \end{bmatrix}^T \right)^{-1} (S_k - Q)$$

3.2. Simulasi Pembahasan

Pada bagian ini, diberikan sebuah simulasi untuk kasus yang dibahas pada bagian 3.1, sebagai berikut.

Berdasarkan persamaan (11) diberikan bentuk kanonik diagonal yaitu,

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 3{,}33 & 0 \\ 0 & 6{,}67 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_k + \begin{bmatrix} 3{,}33 \\ 3{,}33 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_k$$

dengan fungsi tujuan yaitu

$$J = \frac{1}{2} \boldsymbol{x}_N^T S_N \boldsymbol{x}_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{14} \left(\boldsymbol{x}_k^T \begin{bmatrix} 3{,}33 & 0 \\ 0 & 3{,}33 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k^T [1] \boldsymbol{u}_k \right)$$

Pada bentuk kanonik diagonal dan fungsi tujuan tersebut diberikan faktor diskon sebesar $\sqrt{\beta}$ dengan nilai $\beta = 10\% = 0{,}1$. Sehingga dapat dibentuk kanonik diagonal dan fungsi tujuan dengan faktor diskon berturut-turut yaitu

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}_k$$

dengan,

$$J = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{x}}_N^T S_N \hat{\boldsymbol{x}}_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{15} \left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_k + \hat{\boldsymbol{u}}_k^T R \hat{\boldsymbol{u}}_k \right)$$

Selanjutnya berdasarkan Persamaan (14) dapat dibentuk persamaan Hamilton:

$$H = \tfrac{1}{2} \left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_k + \hat{\boldsymbol{u}}_k^T [1] \hat{\boldsymbol{u}}_k \right) + \lambda_{k+1}^T \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}_k \right),$$

Kemudian dari persamaan Hamilton menghasilkan persamaan *state,*persamaan *costate*dan persamaan *stasioner* sebagai berikut:

Persamaan *state*: $\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{k+1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}_k,$

Persamaan *costate*: $\lambda_k = \frac{\partial H_k}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}_k} = Q\hat{\boldsymbol{x}}_k + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T \lambda_{k+1},$

Persamaan *stasioner*: $0 = \frac{\partial H_k}{\partial \hat{\boldsymbol{u}}_k} = \hat{\boldsymbol{u}}_k + [1 \quad 1]\lambda_{k+1},$

Berdasarkan persamaan (23), maka dapat dibentuk persamaan Riccati yaitu,

$$S_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} S_{k+1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T S_{k+1} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh persamaan Riccati dengan solusi S_k. Selanjutnya akan dicari nilai dari $S_k$dengan cara menghitung mundur dari $k = 15$ sampai $k = 0$ dengan diberikan $S_{16} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$S_{15} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}[1]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}75 & -1\\-1 & 5\end{bmatrix}$$

$$S_{14} = \begin{bmatrix}2{,}65 & -3{,}04\\-3{,}04 & 9.86\end{bmatrix}$$

Berdasarkan perhitungan mundur, diadapat bahwa iterasi ke-5 sampai iterasi ke-0, diperoleh hasil yang sama yaitu

$$S_5 = S_0 = \begin{bmatrix}4{,}82 & -8{,}24\\-8{,}24 & 22{,}31\end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil-hasil solusi persamaan Ricatti, maka dapat dibuat vektor kendali yaitu

$$K_{15} = -[1 \quad 1]\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{bmatrix}1{,}75 & -1\\-1 & 5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = [0{,}25 \quad -3]$$

dengan, $\hat{\boldsymbol{u}}_{15} = [0{,}25 \quad -3]\hat{\boldsymbol{x}}_k$

$$K_{14} = -[1 \quad 1]\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{bmatrix}2{,}65 & -3{,}04\\-3{,}04 & 9{,}86\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = [0{,}18 \quad 0{,}89]$$

dengan, $\hat{\boldsymbol{u}}_{14} = [0{,}18 \quad 0{,}89]\hat{\boldsymbol{x}}_k$

$$K_5 = K_0 = -[1 \quad 1]\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{bmatrix}4{,}82 & -8{,}24\\-8{,}24 & 22{,}31\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = [-0{,}3 \quad 2{,}42]$$

dengan, $\hat{\boldsymbol{u}}_5 = \hat{\boldsymbol{u}}_0 = [-0{,}3 \quad 2{,}42]\hat{\boldsymbol{x}}_k$

4. Kesimpulan

Berdasarkan uraian padapembahasan yang telah diberikan, maka diperoleh kesimpulan bahwa vektor kendali untuk bentuk kanonik diagonal dengan faktor diskon yaitu

$$\hat{\boldsymbol{u}}_k = -R^{-1}\begin{bmatrix}\sqrt{\beta}\\\sqrt{\beta}\end{bmatrix}^T\left(\begin{bmatrix}p_1\sqrt{\beta} & 0\\0 & p_2\sqrt{\beta}\end{bmatrix}^T\right)^{-1}(S_k - Q)\hat{\boldsymbol{x}}_k$$

Daftar Pustaka:
Jurnal :
[1] Gaitsgory, Vladimir. Stabilization With Discounted Optimal Control.*Systems and Control,Letters*. 2015; Vol 28:91-98.
[2] Heri, Robertus. Metode Penentuan Bentuk Persamaan Ruang Keadaan Waktu Diskrit. *Jurnal Matematika*. 2003; 6(2).
[3] Soleha, DM. Penggunaan Penyelesaian Persamaan Riccati Aljabar Waktu Diskrit pada Kendali Optimal Linier Kuadratik dan Sifat-Sifatnya. *Journal Mathematics and Its Aplications* 2015;12(1)
Buku Teks:
[1]. Basar T. Dynamic noncooperative game theory. Philadelphia: SIAM. 1999.
[2] Bellman R. Introduction to Matrix Analysis. Philadelphia: SIAM. 1997
[3] Engwerda J. LQ Dynamic Optimization and Differential Games. Chichester: John Wiley & Sons. 2005.
[4] Lewis FL. Applied Optimal Control and Estimation. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1992.
[5] Olsder GJ. Mathematical System Theory. Delft: University of Technology. 1994.
[6] Perko L. Differential Equations and Dynamical System. New York: Springer-Verlag. 1991.