

Kestabilan Titik Keseimbangan Model Epidemik SVEIS dengan *Saturated Incidence Rate*

Mohammad Soleh¹, Esriska², M. Nizam Muhajir³, Riry Sriningsih⁴

^{1,2,3}Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau

JL.HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru Panam, Pekanbaru, 28293

⁴Jurusan Matematika, F-MIPA, Universitas Negeri Padang

Jl. Prof. Dr. Hamka Air Tawar Padang, Sumatera Barat

Email: ¹msoleh@uin-suska.ac.id, ²esriska@gmail.com, ³m.nizam.muhammad@uin-suska.ac.id

⁴riryarningsih@fmipa.unp.ac.id

Abstrak

Pada jurnal ini dijelaskan tentang model epidemik SVEIS dengan *saturated incidence rate*. Model epidemik SVEIS membagi populasi menjadi empat kelompok yaitu kelompok *S* (*susceptible*), *V* (*vaccinated*), *E* (*exposed*), dan *I* (*infected*). Metode yang digunakan pada model ini yaitu kriteria nilai eigen atau kriteria Routh-Hurwitz. Hasil yang diperoleh dari analisis model ini terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit. Jika syarat terpenuhi, maka titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit akan stabil asimtotik.

Kata kunci : Model epidemik SVEIS, Stabil asimtotik, Titik kesetimbangan.

Abstract

In this journal discusses about the SVEIS epidemic model with *saturated incidence rate*. SVEIS epidemic model divides the population into four compartments, namely *S* (*susceptible*), *V* (*vaccinated*), *E* (*exposed*), and *I* (*infected*). The methods used in this model are the eigen value criteria or the Routh-Hurwitz criteria. The results obtained from the analysis of models has two equilibrium point, there are disease free equilibrium point and the endemic equilibrium disease point. If the condition are complete, then a disease free equilibrium point and endemic equilibrium disease point are asymptotically stable.

Keywords : Asymptotically stable, Equilibrium point, SVEIS epidemic model.

1. Pendahuluan

Penyakit menular merupakan salah satu masalah yang berbahaya bagi kesehatan masyarakat karena bisa menyebabkan kematian. Beberapa penyakit menular yang bisa menyebabkan kematian yaitu hepatitis B, tuberkulosis, polio, campak dan lain-lain. Penyakit tersebut disebabkan oleh virus, bakteri atau yang lainnya, yang dapat menyebar melalui kontak langsung dengan penderita maupun tidak langsung seperti melalui udara, makanan, pakaian atau yang lainnya.

Pencegahan penyakit menular dapat dilakukan dengan cara memberikan penyuluhan tentang suatu penyakit kepada masyarakat, menghindari terjadinya kontak, dan melakukan program vaksinasi. Selain itu, dengan memberikan pengobatan yang tepat bagi individu yang terinfeksi penyakit juga mampu mengurangi penularan suatu penyakit.

Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang matematika turut memberikan peranan dalam pencegahan penyebaran suatu penyakit. Salah satunya yaitu pemodelan matematika. Pemodelan matematika bisa membantu dalam memprediksi dan mengendalikan penyebaran penyakit di masa yang akan datang. Model matematika dapat digunakan untuk memprediksi jumlah individu yang rentan terhadap penyakit, memprediksi jumlah individu yang harus divaksinasi dan memprediksi jumlah individu yang harus diobati.

Model matematika yang sederhana adalah model epidemik SIR. Model tersebut membagi suatu populasi menjadi tiga kelompok. Kelompok *S* (*susceptible*) yaitu individu-individu yang sehat tetapi rentan terhadap infeksi penyakit. Kelompok *I* (*infected*) yaitu individu-individu yang telah terinfeksi dan mampu menularkan penyakit serta dapat sembuh dari penyakit. Kelompok *R* (*recovered*) yaitu individu-individu yang telah sembuh dari penyakit dan memiliki kekebalan permanen atau tidak akan mejadi rentan kembali.

Beberapa tahun terakhir, banyak upaya yang telah dilakukan dalam mengembangkan model epidemik SIR seperti model epidemik SIRS, SEIR, SEIV dan SVEIS. Pada model epidemik SIRS, kelompok *R* (*recovered*) yaitu individu-individu yang telah sembuh dari penyakit dan tidak memiliki kekebalan terhadap penyakit sehingga dapat menjadi rentan kembali.

Kelompok *E* (*exposed*) yaitu kelompok individu-individu yang mengalami masa inkubasi dan tidak memiliki kemampuan untuk menularkan penyakit. Dan kelompok *V* (*vaccinated*) yaitu kelompok individu telah divaksinasi.

Penelitian tentang model epidemik SEIV sudah banyak dilakukan, diantaranya yaitu Cai dan Li (2009). Cai dan Li menggunakan model epidemik SEIV (*susceptible, exposed, infected, vaccinated*) dengan laju penularan $\frac{\beta SI}{\phi(I)}$ dan vaksinasi. Selanjutnya Adebimpe (2014) juga menggunakan model epidemik SEIV. Jurnal tersebut menggunakan laju penularan *saturated incidence rate* $\frac{\beta SI}{1 + aI}$.

Sahu dan Dhar (2012) mengembangkan model epidemik SEIV menjadi model SVEIS. Sahu dan Dhar membahas tentang model epidemik SVEIS dengan laju penularan *saturated incidence rate* $\frac{\beta SI}{1 + aI}$. Jurnal tersebut mengasumsikan semua bayi yang baru lahir masuk kelompok rentan, kemudian sebagian populasi rentan divaksinasi sehingga masuk kelompok vaksinasi dan sebagian yang lainnya akan mengalami masa inkubasi. Individu yang telah divaksinasi akan mengalami pemudaran vaksin sehingga individu tersebut menjadi rentan kembali.

Berdasarkan jurnal Sahu dan Dhar (2012), penulis tertarik untuk mengembangkan penelitian tentang model epidemik SVEIS. Laju penularan dan asumsi yang awalnya $\frac{\beta SI}{1 + aI}$ dan semua bayi yang baru lahir masuk kelompok rentan, maka dalam penelitian ini penulis merubah laju penularan menjadi $\frac{\beta SI}{1 + aI^2}$ dan mengasumsikan bahwa setiap bayi yang baru lahir harus divaksinasi. Jika setiap bayi yang baru lahir divaksinasi, maka bayi akan mempunyai kekebalan tubuh yang lebih kuat dan terhindar dari suatu penyakit sehingga dapat memperkecil laju penyebaran suatu penyakit.

2. Metodologi Penelitian

Metodologi penelitian dalam jurnal ini menggunakan studi literatur dengan mempelajari buku-buku dan jurnal-jurnal yang berhubungan dengan penyebaran penyakit. Langkah-langkah yang digunakan dalam tugas akhir ini yaitu :

1. Diberikan variabel dan parameter pada model epidemik SVEIS (Sahu dan Dhar, 2012).
2. Diberikan persamaan pada model epidemik SVEIS (Sahu dan Dhar, 2012) yaitu:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S - \omega S + \theta V - \frac{\beta SI}{1 + aI} + (1 - q)\gamma I, \quad (1.1)$$

$$\frac{dV}{dt} = \omega S - \theta V - \mu V - \xi E + q\gamma I, \quad (1.2)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + aI} - \mu E - \xi E - \sigma E, \quad (1.3)$$

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - \mu I - \gamma I. \quad (1.4)$$

3. Berdasarkan pada langkah (2) dirubah laju penularan yang awalnya $\frac{\beta SI}{1 + aI}$ menjadi

$\frac{\beta SI}{1 + aI^2}$ dan dibentuk asumsi bahwa setiap bayi yang baru lahir harus divaksinasi agar dapat memperkecil laju penyebaran suatu penyakit.

4. Melengkapi model pada langkah (2) berdasarkan laju penularan dan asumsi pada langkah (3).

5. Menentukan titik kesetimbangan dari sistem persamaan diferensial yang telah diperoleh pada langkah (4), baik itu titik kesetimbangan bebas penyakit maupun titik kesetimbangan endemik penyakit.
6. Menganalisa kestabilan titik kesetimbangan dengan cara melakukan linearisasi sistem, menentukan nilai eigen dan menentukan sifat kestabilan.
7. Simulasi numerik titik kesetimbangan menggunakan *Software Maple*.

3. Pembahasan dan Hasil

Model epidemik SVEIS dibentuk dengan memerlukan beberapa asumsi. Kemudian dalam model ini akan dicari titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit serta kestabilan pada titik kesetimbangan. Populasi pada model epidemik SVEIS dibagi menjadi empat kelompok yaitu kelompok *S* (*susceptible*), *V* (*vaccinated*), *E* (*exposed*), dan *I* (*infected*).

3.1. Pembentukan Model Epidemik SVEIS

Pembentukan model epidemik SVEIS pada penelitian ini digunakan sejumlah asumsi pada model epidemik SVEIS jurnal Sahu dan Dhar, kemudian dirubah laju penularan yang awalnya $\frac{\beta SI}{1 + aI}$ menjadi $\frac{\beta SI}{1 + aI^2}$ dan dibentuk asumsi bahwa setiap bayi yang baru lahir harus divaksinasi agar dapat memperkecil laju penyebaran suatu penyakit.

Berdasarkan asumsi tersebut maka dapat dibentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = \theta V - \mu S - \omega S - \frac{\beta SI}{1 + aI^2} + (1 - q)\gamma I, \quad (1.5)$$

$$\frac{dV}{dt} = \Lambda + \omega S - \theta V - \mu V + \xi E + q\gamma I, \quad (1.6)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + aI^2} - \mu E - \xi E - \sigma E, \quad (1.7)$$

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - \mu I - \gamma I. \quad (1.8)$$

3.2. Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan dari Persamaan (1.5)–(1.8) diperoleh apabila $\frac{dS}{dt} = 0$, $\frac{dV}{dt} = 0$, $\frac{dE}{dt} = 0$, $\frac{dI}{dt} = 0$. Titik kesetimbangan terbagi menjadi dua yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit.

3.2.1. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit artinya di dalam suatu populasi tidak ada individu yang terinfeksi penyakit ($I = 0$). Titik kesetimbangan bebas penyakit pada model ini dinotasikan dengan (S_0, V_0, E_0, I_0) dengan $I_0 = 0$. Dari analisis model diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit sebagai berikut :

$$(S_0, V_0, E_0, I_0) = \left(\frac{\Lambda \theta}{(\theta + \mu + \omega)\mu}, \frac{(\mu + \omega)\Lambda}{(\theta + \mu + \omega)\mu}, 0, 0 \right)$$

3.2.2. Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit

Titik kesetimbangan endemik penyakit artinya di dalam suatu populasi selalu terdapat individu yang terinfeksi penyakit ($I \neq 0$). Titik kesetimbangan endemik penyakit pada model ini dinotasikan dengan (S^*, V^*, E^*, I^*) dengan $I^* \neq 0$. Dari analisis model diperoleh titik kesetimbangan endemik penyakit (S^*, V^*, E^*, I^*) dengan

$$S^* = \frac{(\mu + \xi + \sigma)(\mu + \gamma)(1 + aI^{*2})}{\sigma\beta}, V^* = \frac{\Lambda + \omega S^* + \xi E^* + q\gamma I^*}{\theta + \mu}, E^* = \frac{(\mu + \gamma)I^*}{\sigma},$$

dan I^* adalah akar-akar positif dari persamaan $AI^{*2} + BI^* + C = 0$ dengan

$$A = \left(\frac{\omega\theta}{\theta + \mu} - (\mu + \omega) \right) \frac{(\mu + \xi + \sigma)(\mu + \gamma)a}{\sigma\beta},$$

$$B = \left(\frac{(\mu + \gamma)\xi\theta}{(\theta + \mu)\sigma} + \frac{q\gamma\theta}{\theta + \mu} - \frac{(\mu + \xi + \sigma)(\mu + \gamma)}{\sigma} + (1 - q)\gamma \right),$$

$$C = \frac{\Lambda\theta}{\theta + \mu} + \left(\frac{\omega\theta}{\theta + \mu} - (\mu + \omega) \right) \frac{(\mu + \xi + \sigma)(\mu + \gamma)}{\sigma\beta}.$$

3.3. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Kestabilan titik kesetimbangan dari Persamaan (1.5)–(1.8) dilakukan dengan mencari hasil pelinieran menggunakan matriks Jacobian. Untuk mendapatkan matriks Jacobian masing-masing fungsi diturunkan secara parsial terhadap variabel fungsi tersebut. Sehingga diperoleh matriks Jacobian dari Persamaan (1.5)–(1.8), yaitu :

$$J = \begin{bmatrix} -(\mu + \omega) - \frac{\beta I}{1 + aI^2} & \theta & 0 & (1 - q)\gamma - \frac{\beta S - a\beta SI^2}{(1 + aI^2)^2} \\ \omega & -(\mu + \theta) & \xi & q\gamma \\ \frac{\beta I}{1 + aI^2} & 0 & -(\mu + \xi + \sigma) & \frac{\beta S - a\beta SI^2}{(1 + aI^2)^2} \\ 0 & 0 & \sigma & -(\mu + \gamma) \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

3.3.1. Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Teorema 1 Jika $\frac{\sigma\beta S_0}{(\mu + \xi + \sigma)(\mu + \gamma)} < 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit

(S_0, V_0, E_0, I_0) adalah stabil asimtotik.

Bukti

Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit dapat ditentukan dengan cara mensubstitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit

$(S_0, V_0, E_0, I_0) = \left(\frac{\Lambda\theta}{(\theta + \mu + \omega)\mu}, \frac{(\mu + \omega)\Lambda}{(\theta + \mu + \omega)\mu}, 0, 0 \right)$ ke matriks Jacobian (1.9). Sehingga

diperoleh akar-akar karekateristik dari matriks Jacobian bebas penyakit sebagai berikut:

$$\lambda_{1,2} = (\lambda^2 + (2\mu + \omega + \theta)\lambda + (\mu + \omega)(\mu + \theta) - \omega\theta). \quad (1.20)$$

$$\lambda_{3,4} = ((\lambda^2) + (2\mu + \xi + \theta + \gamma)\lambda + (\mu + \xi + \sigma)(\mu + \gamma) - \sigma\beta S_0). \quad (1.21)$$

Selanjutnya berdasarkan Persamaan (1.20) diperoleh :

$$\lambda_1 = -\mu. \quad (1.22)$$

$$\lambda_2 = -(\mu + \omega + \theta). \quad (1.23)$$

Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik, jika semua akar-akar karekteristiknya memiliki bagian *real* negatif $\text{Re } \lambda_{1,2,3,4} < 0$. Diketahui nilai eigen λ_1 dan

λ_2 memiliki bagian *real* negatif $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$, kemudian berdasarkan Persamaan (1.21)

akan dicari nilai eigen λ_3 dan λ_4 sebagai berikut :

$$\lambda_{3,4} = \frac{-(2\mu + \xi + \theta + \gamma) \pm \sqrt{(2\mu + \xi + \theta + \gamma)^2 - 4((\mu + \xi + \sigma)(\mu + \gamma) - \sigma\beta S_0)}}{2},$$

Misalkan

$$((\mu + \xi + \sigma)(\mu + \gamma) - \sigma\beta S_0) > 0,$$

$$(\mu + \xi + \sigma)(\mu + \gamma) > \sigma\beta S_0.$$

$$\frac{\sigma\beta S_0}{(\mu + \xi + \sigma)(\mu + \gamma)} < 1.$$

Karena $\frac{\sigma\beta S_0}{(\mu + \xi + \sigma)(\mu + \gamma)} < 1$, sehingga nilai eigen λ_3 dan λ_4 memiliki bagian *real* negatif $\text{Re } \lambda_{3,4} < 0$. Diketahui nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dan λ_4 memiliki bagian *real* bernilai negatif $\text{Re } \lambda_{1,2,3,4} < 0$, maka terbukti Teorema 1 bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit (S_0, V_0, E_0, I_0) adalah stabil asimtotik. Hal ini menunjukkan bahwa untuk jangka waktu yang cukup lama populasi akan terbebas dari penyakit atau di dalam suatu populasi tidak ada individu yang terinfeksi penyakit

3.3.2. Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit

Kestabilan titik kesetimbangan endemik penyakit dapat ditentukan dengan cara mensubstitusikan titik kesetimbangan endemik penyakit (S^*, V^*, E^*, I^*) ke matriks Jacobian (1.9). Sehingga diperoleh persamaan karekteristik sebagai berikut :

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0, \quad (1.24)$$

dengan

$$a_0 = 1.$$

$$a_1 = 4\mu + \xi + \sigma + \gamma + \omega + \theta + \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}}.$$

$$a_2 = \left(\mu^2 + \mu\gamma + \mu\xi + \xi\gamma + \mu\sigma + \gamma\sigma - \frac{\beta S^* - a\beta S^* I^{*2}}{(1 + aI^{*2})^2} \sigma \right) + \left(\left(2\mu + \theta + \omega + \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}} \right) (2\mu + \xi + \sigma + \gamma) \right) + \left(\mu^2 + \mu\omega + \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}} \mu + \theta\mu + 2\theta\omega + \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}} \theta \right).$$

$$a_3 = \left(\left(2\mu + \theta + \omega + \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}} \right) (\mu^2 + \mu\gamma + \mu\xi + \xi\gamma + \mu\sigma) \right) + \left(\left(\mu^2 + \mu\omega + \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}} \mu + \theta\mu \right) (2\mu + \xi + \sigma + \gamma) \right) + \left((2\mu + \theta + \omega) \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}} \theta + \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}} q\gamma\lambda + (2\mu + \theta + \omega)\gamma\sigma \right) - \left((2\mu + \theta + \omega) \frac{\beta S^* - a\beta S^* I^{*2}}{(1 + aI^{*2})^2} \sigma \right).$$

$$a_4 = \left(\left(\mu^2 + \mu\omega + \theta\mu + \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}} \theta \right) (\mu^2 + \mu\gamma + \mu\xi + \xi\gamma + \mu\sigma + \gamma\sigma) \right) + \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}} (\mu^2 + \mu\gamma + \mu\xi + \xi\gamma + \mu\sigma) \mu + \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}} (\mu^2 + \mu\gamma + \mu\sigma) \theta + \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}} \mu q \gamma \sigma - (\mu^2 + \mu\omega + \theta\omega + 2\theta\omega) \frac{\beta S^* - a\beta S^* I^{*2}}{(1 + aI^{*2})^2} \sigma.$$

Berdasarkan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, nilai-nilai eigen akan memiliki bagian *real* negative untuk $n = 4$ apabila $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $a_4 > 0$ dan $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$. Dengan menggunakan Persamaan (1.26) sehingga :

$$a_1 = 4\mu + \xi + \sigma + \gamma + \omega + \theta + \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}}.$$

Karena masing-masing parameter bernilai positif, maka $a_1 > 0$.

Selanjutnya

$a_3 > 0$, jika $b_1 > b_2$ dengan

$$b_1 = \left(\left(2\mu + \theta + \omega + \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}} \right) (\mu^2 + \mu\gamma + \mu\xi + \xi\gamma + \mu\sigma) \right) + \left(\left(\mu^2 + \mu\omega + \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}} \mu + \theta\mu \right) (2\mu + \xi + \sigma + \gamma) \right) \\
 + \left((2\mu + \theta + \omega) \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}} \theta + \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}} q\gamma\sigma\lambda + (2\mu + \theta + \omega)\gamma\sigma \right),$$

$$b_2 = - \left((2\mu + \theta + \omega) \frac{\beta S^* - a\beta S^* I^{*2}}{(1 + aI^{*2})^2} \sigma \right).$$

Secara khusus $a_3 > 0$, jika $\beta S^* - a\beta S^* I^{*2} < 0$,

$$I^* > \sqrt{\frac{1}{a}}.$$

Selanjutnya

$a_4 > 0$, jika $c_1 > c_2$ dengan

$$c_1 = \left(\left(\mu^2 + \mu\omega + \theta\mu + \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}} \theta \right) (\mu^2 + \mu\gamma + \mu\xi + \xi\gamma + \mu\sigma + \gamma\sigma) \right) \\
 + \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}} (\mu^2 + \mu\gamma + \mu\xi + \xi\gamma + \mu\sigma) \mu + \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}} (\mu^2 + \mu\gamma + \mu\sigma) \theta + \frac{\beta I^*}{1 + aI^{*2}} \mu q \gamma \sigma,$$

$$c_2 = (\mu^2 + \mu\omega + \theta\omega + 2\theta\omega) \frac{\beta S^* - a\beta S^* I^{*2}}{(1 + aI^{*2})^2} \sigma.$$

Secara khusus $a_4 > 0$, jika $\beta S^* - a\beta S^* I^{*2} < 0$,

$$I^* > \sqrt{\frac{1}{a}}.$$

Selanjutnya jika $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$ maka titik kesetimbangan endemik penyakit (S^*, V^*, E^*, I^*) stabil asimtotik. Hal ini menunjukkan bahwa untuk jangka waktu yang cukup lama di dalam populasi tersebut selalu terdapat individu yang terinfeksi penyakit.

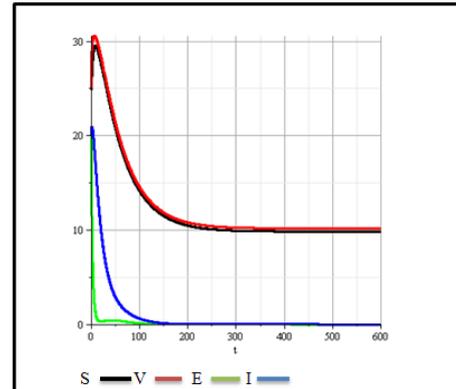
3.4. Simulasi

Simulasi dilakukan untuk memberi gambaran yang jelas mengenai model epidemik SVEIS dengan *saturated incidence rate*. Simulasi dilakukan dengan memberikan nilai untuk masing-masing parameter dan nilai awal setiap kelompok populasi. Pada bagian ini dilakukan simulasi pada titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik penyakit dengan menggunakan *Software Maple 13*.

3.4.1. Simulasi titik kesetimbangan bebas penyakit

Tabel 1. Nilai Parameter untuk Bebas Penyakit

Parameter	Nilai
Λ	0,4
μ	0,02
ω	0,6
θ	0,6
β	0,004
a	0,1
q	0,9
ξ	0,2
γ	0,033
σ	0,1



Gambar 1. Simulasi Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

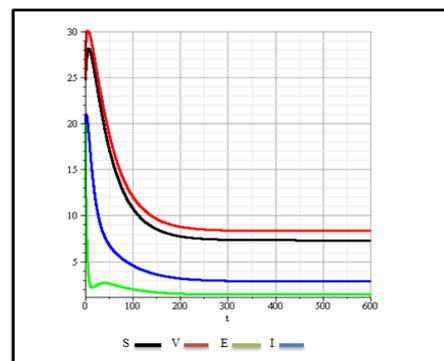
Berdasarkan Gambar 1 jumlah kelompok *susceptible* mengalami peningkatan dikarenakan adanya penambahan dari individu-individu yang mengalami pematangan vaksin. Kemudian mengalami penurunan dikarenakan adanya kematian yang disebabkan secara alami. Selain itu adanya individu rentan yang divaksinasi juga mengakibatkan menurunnya jumlah kelompok *susceptible* dan meningkatnya jumlah kelompok *vaccinated*. Jumlah kelompok *vaccinated* mengalami peningkatan juga dikarenakan adanya individu yang baru lahir. Selanjutnya Jumlah kelompok *vaccinated* ini akan mengalami penurunan dikarenakan adanya kematian alami.

Kemudian jumlah kelompok *exposed* mengalami penurunan menuju angka 0, dikarenakan adanya kematian yang disebabkan secara alami dan adanya laju perubahan individu *exposed* yang menjadi *infected*. Jumlah kelompok *infected* juga mengalami penurunan menuju angka 0 karena adanya kematian yang disebabkan secara alami serta adanya laju perubahan dari *infected* ke kelompok *susceptible* dan *vaccinated*. Penurunan jumlah kelompok *exposed* dan *infected* menuju angka 0 menunjukkan bahwa jumlah kelompok *exposed* dan *infected* akan habis sehingga tidak ada individu yang terinfeksi penyakit.

3.4.2. Simulasi titik kesetimbangan endemik penyakit.

Tabel 2. Nilai Parameter untuk Endemik Penyakit

Parameter	Nilai
Λ	0,4
μ	0,02
ω	0,6
θ	0,6
β	0,04
a	0,1
q	0,9
ξ	0,2
γ	0,033
σ	0,1



Gambar 2. Simulasi Titik Endemik Penyakit

Berdasarkan Gambar 2 jumlah kelompok *susceptible* mengalami peningkatan sampai $t = 7$ dikarenakan adanya penambahan dari individu-individu yang mengalami

pemudaran vaksin. Kemudian mengalami penurunan dikarenakan adanya kematian yang disebabkan secara alami. Selain itu adanya individu rentan yang divaksinasi juga mengakibatkan menurunnya jumlah kelompok *susceptible* dan meningkatnya jumlah kelompok *vaccinated*.

Jumlah kelompok *vaccinated* mengalami peningkatan sampai $t = 8$ dikarenakan juga adanya penambahan dari individu yang baru lahir. Meningkatnya jumlah kelompok *vaccinated* menyebabkan menurunnya jumlah kelompok *exposed* dan *infected*. Hal ini akibat dari adanya laju individu-individu sembuh dari kelompok *exposed* dan *infected* masuk ke kelompok *vaccinated*. Selanjutnya Jumlah kelompok *vaccinated* ini akan mengalami penurunan dikarenakan adanya kematian yang disebabkan secara alami.

Kemudian jumlah kelompok *exposed* mengalami peningkatan karena adanya laju infeksi pada proses penularan individu dari kelompok *susceptible* menuju *exposed*. Selanjutnya jumlah kelompok *exposed* mengalami penurunan kembali dikarenakan adanya kematian yang disebabkan secara alami dan adanya individu *exposed* yang menjadi *infected*. Jumlah kelompok *infected* juga mengalami penurunan dikarenakan adanya kematian yang disebabkan secara alami. Penurunan jumlah kelompok *susceptible*, *vaccinated*, *exposed*, dan *infected* bergerak menuju titik kesetimbangan endemik penyakit. Hal ini menunjukkan di dalam populasi tersebut selalu terdapat individu yang terinfeksi penyakit.

3.5. Kesimpulan

Titik kesetimbangan bebas penyakit (S_0, V_0, E_0, I_0) stabil asimtotik jika $\frac{\sigma\beta S_0}{(\mu + \xi + \sigma)(\mu + \gamma)} < 1$, yang berarti untuk jangka waktu yang cukup lama populasi akan terbebas dari penyakit atau di dalam suatu populasi tidak ada individu yang terinfeksi penyakit. Titik kesetimbangan endemik penyakit (S^*, V^*, E^*, I^*) stabil asimtotik jika $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $a_4 > 0$ dan $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$ yang berarti untuk jangka waktu yang cukup lama di dalam populasi tersebut selalu terdapat individu yang terinfeksi penyakit.

Referensi

- [1] Adebimpe, O. "Stability Analysis of a SEIV Epidemic Model with Saturation Incidence Rate". Sciencedomain International. *British Journal of Mathematics & Computer Science*. Vol. 4, No. 23, hal 3358-3368. 2014.
- [2] Anton, H dan Rorres, C . "*Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*". Edisi ke-8. Terjemahan Refina Indriasari dan Irzam Harmein. Erlangga, Jakarta. 2004.
- [3] Allen, Linda, J.S . "*An Introduction to Mathematical Biology*". Pearson, Inggris. 2007.
- [4] Cai, L. dan Li, X. "Analysis of a SEIV Epidemic Model with a Nonlinear Incidence Rate". *Applied Mathematical Modelling*. Vol. 33, hal. 2919-2926. 2009.
- [5] Edwards, C.H. dan Penney, D.C. "*Elementary Differential Equations*". Edisi ke-6. Pearson, Inggris. 2008.
- [6] Hale, J.K. dan Kocak, H. "*Dynamic and Bifurcations*". Springer-Verlag, New York. 1991.
- [7] Hendriana, H dkk. "*Persamaan Diferensial*". CV Pustaka Mulia, Bandung. 2002.
- [8] Olsder, G.J. & Woude, J.W. van der. "*Mathematical Sistem Theory*." Edisi ke-2. Netherlands. 2003.
- [9] Sahu, G.P. dan Dhar, J. "Analysis of an SVEIS Epidemic Model with Partial Temporary Immunity and Saturation Incidence Rate". *Applied Mathematical Modelling*. Vol. 36, hal. 908-923. 2012.
- [10] Sugiarto. "*Persamaan Diferensial*". Binafsir Publisher, Yogyakarta. 2015.