ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Modifikasi Metode Iterasi Dua Langkah dengan Satu Parameter

Sri Annisa Djumadila, Wartono*
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. H. R. Soebrantas No. 155 Km. 18 Simpang Baru Panam Pekanbaru 28293.
* E-mail: wartono@uin-suska.ac.id

Abstrak

Metode Potra-Ptak, Newton-Steffensen dan Varian Newton adalah keluarga metode iterasi berorde konvergensi tiga untuk menyelesaikan persamaan nonlinear. Pada makalah ini, penulis mengkontruksi metode iterasi dua langkah dengan menjumlahkan metode Potra Ptak-Newton Steffensen dan Varian Newton. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh persamaan iterasi baru yang memiliki orde konvergensi empat dan melibatkan tiga evaluasi fungsi pada setiap iterasinya. Indeks efisiensi metode baru tersebut adalah 1,587401. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan beberapa fungsi untuk menunjukkan efeisiensi dan performa metode iterasi baru.

Kata kunci *: Metode Potra Ptak, metode Newton-Steffensen, metode varian Newton, orde konvergensi, persamaan nonlinear,.*

Abstract

Potra-Ptak's, Newton-Steffensen's and variant of Newton's method are a family of third order of convergence iterative method to solve a nonlinear equation. In this paper, the authors construc two point iterative method by using a sum of Potra Ptak-Newton Steffensen and variant of Newton method. Based on the research results, that obtained a new iterative method with fourth-order convergence and requires three evaluation of functions each iteration. The efficiency index of the new iterative method is 1,587401. Numerical simulation is given by using several tes functions to show the effeciency and performance of the new iteration method.

Keywords *: Potra-Ptak's method, Newton-Steffensen's method, variant of Newton's method, order of convergence, nonlinear equation.*

1. Pendahuluan

Permasalahan yang sering ditemukan di dalam bidang matematika salah satunya adalah bagaimana menemukan solusi dari persamaan nonlinier dalam bentuk

$$f(x)=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinier adalah metode numerik yang menghasilkan solusi hampiran yang bersifat iterasi. Metode iterasi yang paling sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan persamaan nonlinier adalah metode Newton dengan bentuk iterasinya

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Metode Newton pada Persamaan (2) merupakan metode iterasi dengan orde konvergensi kuadratik yang dihasilkan dari pemotongan deret Taylor orde satu. Usaha untuk meningkatkan orde konvergensi terus dilakukan oleh peneliti.

Salah satu teknik yang paling sering dilakukan untuk meningkatkan orde konvergensi suatu metode iterasi adalah dengan menjadikan metode Newton menjadi metode iterasi dua langkah, dan metode iterasi tersebut akan optimal jika orde konvergensinya empat dan evluasi fungsinya tiga [4].

Secara umum, metode klasik dua langkah dihasilkan dari pemotongan deret Taylor orde dua ayng menghasilkan tiga metode klasik yang paling dikenal yaitu metode Halley [8, 12], metode

Chebyshev [9, 10] dan metode Euler atau dikenal juga dengan nama metode irasional Halley [11, 12].

Selain menggunakan pemotongan deret Taylor orde dua, metode dua langkah juga dapat dikontruksi dengan memodifikasi metode Newton seperti yang dilakukan oleh Sharma [6], Potrak-Ptak [5] dan Werakoon dan Fernando [7].

Beberapa pendekatan lain juga digunakan oleh peneliti untuk meningkatkan orde konvergensi. Salah satunya adalah dengan menjumlahkan beberapa metode iterasi yang melibatkan parameter real.

Jisheng [3] melakukan penjumlahkan Potra-Ptak dan Newton-Steffensen dengan mengunakan satu parameter, dengan bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \theta \frac{f(x_n)+f(y_n)}{f'(x_n)} - (1-\theta)\frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)(f(x_n)-f(y_n))}, \quad \text{……………………(3)}$$

Persamaan (3) memiliki orde konvergensi empat untuk $\theta = -1$.

Ezzati [2] melakukan penjumlahan dua metode modifikasi Newton dan menggunakan dua parameter, dengan bentuk

$$x_{n+1} = A\left[x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}\right] + B\left[x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(x_n)f(y_n)}{[f(x_n)-f(y_n)]f'(x_n)}\right], \quad \text{…………………(4)}$$

Selanjutnya Chun [1] melakukan penjumlahan tiga metode iterasi dan mengunakan tiga parameter, dengan bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \theta_1 \frac{f(x_n)+f(y_n)}{f'(x_n)} - \theta_2 \frac{f^2(x_n)}{[f(x_n)-f(y_n)]f'(x_n)} - \theta_3\left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{f'(x_n)f(y_n)}{f^2(x_n)f'^2(x_n)}\right], \quad \text{……(5)}$$

Pada makalah ini, penulis mengembangkan keluarga metode iterasi dua langkah dengan menggunakan penjumlahan dua metode sebagaimana yang dilakukan oleh Jisheng [3]. Kedua metode yang baru yang dijumlahan masing-masing merupakan modifikasi dari Potra Ptak-Newton Steffensen dan varian Newton.

Oleh karena pada salah satu metode masih memuat turunan pertama f dalam y_n, maka dilakukan reduksi $f\,(y_n)$ menggunakan interpolasi Hermit orde dua. Selanjutnya simulasi numerik diberikan untuk menguji performa metode iterasi baru dengan menggunakan beberapa fungsi.

2. Komposit Dua Metode dan Orde Konvergensi

Perhatikan kembali metode Potra-Ptak [5] dan metode Newton-Steffensen [6] masing-masing sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)+f(y_n)}{f'(x_n)}, \quad \text{…………………………………………(6)}$$

dan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)(f(x_n)-f(y_n))}, \quad \text{……………………………………..(7)}$$

dengan y_n didefinisikan (2).

(8)

Kemudian Penjumalahan Persamaan (6) dan (7) diperoleh modifikasi metode iterasi baru dalam bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_n)+f(y_n)}{f'(x_n)} + \frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)(f(x_n)-f(y_n))}\right)$$

atau

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\frac{2f(x_n)^2 - f(y_n)^2}{f'(x_n)(f(x_n)-f(y_n))} \quad \text{...(8)}$$

Persamaan (8) merupakan metode iterasi dengan orde konvergensi tiga, yang disingkat M_1.

Selanjutnya lihat kembali metode varian Newton [7] sebagai berikut

$$x_{n+1} = f(x_n)\frac{2}{f'(x_n)+f'(y_n)} \quad \text{..(9)}$$

Persamaan (9) merupakan bentuk varian Newton dengan rataan aritmatik, yang selanjutnya dimodifikasi menggunakan kontra-harmonik dalam bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)+f'(y_n)}{f'(x_n)^2+f'(y_n)^2}\cdot f(x_n) \quad \text{..(10)}$$

Selanjutnya pertimbangkan kembali interpolasi Hermit orde dua yang melalui titik (x_n, $f(x_n)$), (y_n, $f(y_n)$) dan (x_n, $f'(x_n)$) dalam bentuk

$$H_2'(x) = \frac{2(x-x_n)}{(y_n-x_n)^2}\left(f(y_n)-f(x_n)\right) - \frac{(2x-x_n-y_n)}{(y_n-x_n)^2}f'(x_n) \quad \text{........................(11)}$$

Misalkan $f(x) \approx H_2(x)$, maka $f'(x) \approx H'_2(x)$ sehingga $f'(y_n) \approx H'_2(y_n)$. Oleh karena itu, bentuk $f'(y_n)$ pada Persamaan (10) di aproksimasi menggunakan interpolasi Hermite orde dua dalam bentuk

$$f'(y_n) = \frac{2f(y_n)-f(x_n)}{(y_n-x_n)} - f'(x_n) \quad \text{...................................(12)}$$

sehingga dengan mensubstitusikan Persamaan (12) ke (10) diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2(f(y_n)-f(x_n))f'(x_n)}{f'(x_n)^2 + \left(-\frac{2(f(y_n)-f(x_n))f'(x_n)}{f(x_n)} - f'(x_n)\right)^2}$$

atau

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(f(y_n)-f(x_n))f(x_n)^2}{f'(x_n)(-f(x_n)^2 - 2f(y_n)^2 + 2f(y_n)f(x_n))} \quad \text{...........................(13)}$$

Persamaan (12) merupakan metode iterasi dengan orde konvergensi tiga yang disingkat M_2.

Berdasarkan cara yang dilakukan oleh Jisheng [3], maka dengan menggunakan Persamaan (8) dan (13) bentuk baru metode iterasi dengan satu parameter yang secara lengkap diberikan oleh

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{...(14a)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \theta\cdot\frac{1}{2}\frac{2f(x_n)^2 - f(y_n)^2}{f'(x_n)(f(x_n)-f(y_n))} - (\theta-1)\cdot\frac{(f(x_n)-f(y_n))f(x_n)^2}{f'(x_n)(f(x_n)^2+2f(y_n)^2-2f(y_n)f(x_n))} \quad \text{...(14b)}$$

3. Analisis Konvergensi

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Selanjutnya, akan ditentukan orde konvergensi dari metode iterasi yang telah diperoleh pada Persamaan (14a) – (14b).

Teorema 1. Misalkan $\alpha \in I$ adalah akar dari fungsi $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ untuk suatu interval terbuka I. Selanjutnya asumsikan bahwa α adalah akar sederhana dari $f(x)=0$. Jika x_0 adalah tebakan awal yang cukup dekat ke α, maka metode iterasi pada Persamaan (14a) – (14b) memilki orde konvergensi empat untuk $\theta = 4$ dengan persamaan galat

$$e_{n+1} = \left(-c_2c_3 - 3c_2^3\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right) \qquad (15)$$

dengan

$$e_n = x_n - \alpha \text{ dan } c_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}, \quad j = 2, 3, \cdots.$$

Bukti : Misalkan $\alpha \in I$ dimana α adalah akar sederhana dari persamaan $f(x)=0$. Asumsikan $f(\alpha)=0$ dan $x_n = \alpha + e_n$. Selanjutnya diaproksimasikan fungsi $f(x)$ disekitar α dengan menggunakan deret Taylor, sehingga diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + \ldots + O(e_n^5)\right) \qquad (16)$$

Kemudian untuk fungsi $f'(x_n)$ diekspansi menggunakan deret Taylor disekitar α, maka diperoleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + \ldots + O(e_n^5)\right) \qquad (17)$$

Selanjutnya dengan menggunakan Persamaan (15) dan (16) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + \ldots + O(e_n^5) \qquad (18)$$

Substitusikan Persamaan (17) ke Persamaan (14a) dan oleh karena $x_n = e_n + \alpha$, maka diperoleh

$$y_n = \alpha + c_2e_n^2 - (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + \ldots + O(e_n^5) \qquad (19)$$

Persamaan (19) juga dapat ditulis ke dalam bentuk

$$y_n = \alpha + s_n \qquad (20)$$

dengan

$$s_n = c_2e_n^2 - (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + \ldots + O(e_n^5) \qquad (21)$$

Berdasarkan ekspansi deret Taylor disekitar α, maka selanjutnya $f(y_n)$ menghasilkan bentuk

$$f(y_n) = f(\alpha) + (y_n - \alpha)f'(\alpha) + \frac{(y_n - \alpha)^2}{2!}f''(\alpha) + \ldots + O(e_n^5) \qquad (22)$$

Oleh karena $f(\alpha) = 0$ dan $y_n = \alpha + s_n$, maka Persamaan (22) menjadi

$$f(y_n) = f'(\alpha)(s_n + c_2s_n^2 + c_3s_n^3 + \ldots + O(e_n^5)) \qquad (23)$$

Substitusikan kembali Persamaan (21) ke Persamaan (23), maka diperoleh

$$f(y_n) = f'(\alpha)[c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + (5c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5)] \qquad (24)$$

Selanjutnya dengan menggunakan Persamaan (16) dan (24), maka kuadrat dari $f(x_n)$ dan $f(y_n)$ masing-masing diberikan oleh

$$f(x_n)^2 = f'(\alpha)^2[e_n^2 + 2c_2e_n^3 + (2c_3 + c_2^2)e_n^4 + O(e_n^5)] \qquad (25)$$

dan

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$f(y_n)^2 = f'(\alpha)^2[c_2^2 e_n^4 + \cdots + O(e_n^6)] \qquad (26)$$

sehingga

$$2f(x_n)^2 + f(y_n)^2 = f'(\alpha)^2[2e_n^2 + 4c_2 e_n^3 + (c_2^2 + 4c_3)e_n^4 + O(e_n^5)] \qquad (27)$$

Sedangkan selisih $f(x_n)$ dan $f(y_n)$ diberikan oleh

$$f(x_n) - f(y_n) = f'(\alpha)[e_n + 2c_2 e_n^3 + (2c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)] \qquad (28)$$

Perkalian Persamaan (17) dan (28), memberikan

$$f'(x_n)(f(x_n) - f(y_n)) = e_n + 2c_2 e_n^2 + (2c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (29)$$

Selanjutnya dengan menggunakan Persamaan (27) dan (29), serta deret geometri diperoleh

$$\frac{1}{2}\frac{2f(x_n)^2 + f(y_n)^2}{f'(x_n)(f(x_n) - f(y_n))} = e_n - \frac{3}{2}c_2^2 e_n^3 + (-5c_2c_3 + 6c_c^3)e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (30)$$

Berdasarkan Persamaan (2.19), (2.20) dan (2.22), diperoleh

$$(f(x_n) - f(y_n))f(x_n)^2 = f'(\alpha)^3[e_n^3 + 2c_2 e_n^4 + O(e_n^5)] \qquad (31)$$

dan

$$f(x_n)^2 + 2f(y_n)^2 = f'(\alpha)^2[e_n^2 + 2c_2 e_n^3 + (3c_2^2 + 2c_3)e_n^4 + O(e_n^5)] \qquad (32)$$

Selanjutnya

$$2f(y_n)f(x_n) = f'(\alpha)^2[2c_2 e_n^3 + (-2c_2^2 + 4c_3)e_n^4 + O(e_n^5)] \qquad (33)$$

sehingga

$$f'(x_n)(f(x_n)^2 + 2f(y_n)^2 - 2f(y_n)f(x_n)) = f'(\alpha)^3[e_n^2 + 2c_2 e_n^3 + (5c_2^2 + c_3)e_n^4 + O(e_n^5)] \qquad (34)$$

Dengan menggunakan Persamaan (31) dan Persamaan (34) serta deret geometri maka diperoleh

$$\frac{(f(x_n) - f(y_n))f(x_n)^2}{f'(x_n)(f(x_n)^2 + 2f(y_n)^2 - 2f(y_n)f(x_n))} = 2c_2^2 e_n^3 + (-7c_2^3 + 7c_2c_3)e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (35)$$

Kemudian subtitusikan Persamaan (30) dan Persamaan (35) ke dalam Persamaan (14b) diperoleh orde konvergensi dengan parameter θ dalam bentuk

$$x_{n+1} = \alpha + \left(2c_2^2 - \frac{1}{2}\theta c_2^2\right)e_n^3 + \left(7c_2c_3 - 7c_2^3 - 2\theta c_2c_3 + \theta c_2^3\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right) \qquad (36)$$

Oleh karena $x_n = \alpha + e_n$ dan $x_{n+1} = \alpha + e_{n+1}$, maka Persamaan (36) dapat ditulis kembali menjadi

$$e_{n+1} = \left(2 - \frac{1}{2}\theta\right)c_2^2 e_n^3 + \left(7c_2c_3 - 7c_2^3 - 2\theta c_2c_3 + \theta c_2^3\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right) \qquad (37)$$

Berdasarkan Persamaan (37) dapat dilihat bahwa orde konvergensi metode iterasi (14a) – (14b) dapat meningkat menjadi empat dengan menyelesaikan koefisien e_n^3 dalam bentuk (2 – 1/2θ) = 0. Dengan mesubstitusikan kembali $\theta = 4$, maka persamaan (37) dapat dtitulis

$$e_{n+1} = \left(-c_2c_3 - 3c_2^3\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right) \qquad (38)$$

4. Simulasi Numerik

Uji simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan bahasa pemrograman *Maple 13* dengan digit 850 angka dibelakang koma untuk menguji performa dari metode baru (MKV) dibandingkan dengan metode Newton (MN), metode Chebyshev (MC), metode Potra-Ptak (MPP), dan metode Double Newton (MDN). Simulasi numerik dilakukan dengan mengambil tebakan awal

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

(x_0) sedekat mungkin dengan akar persaman. Iterasi dihentikan jika memenuhi kriteria berhenti yaitu $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ dengan $\varepsilon = 10^{-95}$, sedangkan orde konvergensi yang dihitung dengan menggunakan akar-akar pendekatan pada iterasi ke n, n + 1 dan n + 2 diberikan oleh persamaan

$$COC \approx \frac{\ln|(x_{n+2} - \alpha)/(x_{n+1} - \alpha)|}{\ln|(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)|} \quad \text{(39)}$$

Adapun fungsi-fungsi yang digunakan adalah sebagai berikut:

$f_1(x) = xe^{-x} - 0{,}1$ $\qquad \alpha \approx 0.111832559158962$

$f_2(x) = e^x - 4x^2$ $\qquad \alpha \approx 4{,}306584728220692$

$f_3(x) = \cos(x) - x$ $\qquad \alpha \approx 0{,}739085133215160$

$f_4(x) = (x-1)^3 - 1$ $\qquad \alpha = 2{,}000000000000000$

$f_5(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ $\qquad \alpha \approx 1{,}365230034140968$

$f_6(x) = e^{-x^2+x+2} - \cos(x+1) + x^3 + 1$ $\qquad \alpha = -1{,}000000000000000$

$f_7(x) = \sin^2(x) - x^2 + 1$ $\qquad \alpha \approx 1{,}4044800000000000$

$f_8(x) = \sqrt{x} - x$ $\qquad \alpha = 1{,}000000000000000$

Banyaknya iterasi dan orde konvergensi numerik (dalam kurung) diberikan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1 Perbandingan Jumlah Iterasi dan *COC* untuk $\varepsilon = 10^{-95}$

$f(x)$	x_0	MN	MC	MPP	MDN	MKV
$f_1(x)$	− 0,20	8 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	5 (4,0000)	4 (4,0000)
	0,30	8 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	4 (4,0000)	4 (4,0000)
$f_2(x)$	4,00	8 (2,0000)	5 (3,0000)	6 (3,0000)	4 (4,0000)	5 (4,0000)
	4,50	7 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	4 (4,0000)	4 (4,0000)
$f_3(x)$	− 0,10	8 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	4 (4,0000)	5 (4.0000)
	1,50	7 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	4 (4,0000)	4 (4,0000)
$f_4(x)$	1,80	8 (2,0000)	5 (3,0000)	6 (3,0000)	4 (4,0000)	5 (4,0000)
	3,00	9 (2,0000)	6 (3,0000)	6 (3,0000)	5 (4,0000)	5 (4,0000)
$f_5(x)$	1,00	8 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	4 (4,0000)	4 (4,0000)
	2,00	8 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	4 (4,0000)	4 (4,0000)
$f_6(x)$	−1,50	7 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	4 (4,0000)	4 (4,0000)
	0,00	7 (2,0000)	6 (3,0000)	6 (3,0000)	4 (4,0000)	4 (4,0000)
$f_7(x)$	1,20	8 (2,0000)	5 (3,0000)	4 (3,0000)	4 (4,0000)	4 (4,0000)
	2,00	8 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	4 (4,0000)	4 (4,0000)
$f_8(x)$	0,50	8 (2,0000)	5 (3,0000)	6 (3,0000)	4 (4,0000)	5 (4,0000)
	1,50	7 (2,0000)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	4 (4,0000)	4 (4,0000)

Berdasarkan Tabel 1, dapat disimpulkan bahwa jumlah iterasi metode iterasi baru lebih sedikit dibandingkan dengan metode iterasi lainnya. Selain itu, Tabel 1 juga memberikan informasi bahwa orde konvergensi metode baru adalah empat. Hal ini lebih menguatkan hasil orde konvergensi yang di hasilkan dari ekspansi deret Taylor.

5. Kesimpulan

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Metode Potra-Ptak [5], Metode Newton-Steffensen [6] dan Metode Varian Newton [7] memilki orde konvergensi empat dan tiga evaluasi fungsi. Kemudian dengan melakukan komposit menggunakan cara yang dilakukan Jisheng [3] dan dengan menghilangkan pertama $f'(y_n)$ dengan $\theta = 4$, maka diperoleh metode iterasi baru yang memiliki orde konvergensi empat dan tiga evaluasi fungsi. Simulasi numerik pada Tabel 1 memperlihatkan suatu kecepatan dari metode-metode iterasi dalam menghampiri akar-akar persamaan nonlinier. Jadi, berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa metode iterasi baru yang didapatkan memiliki orde konvergensi empat sehingga kecepatan dalam menghampiri akar-akar persamaan nonlinier lebih baik dari metode-metode yang dibandingkan.

Daftar Pustaka

[1] Chun, C. A Family of Composite Fourth-Order Iterative Methods For Solving Nonlinear Equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2007; 187: 951 – 956.

[2] Ezzati, R. On The Contructions Of New Iterative Methods With Fourth-Order Convergence By Combing Previous Methods. *International Mathematical Forum.* 2011; 6 (27): 1319 -1326.

[3] Jisheng, K., Yitian, L dan Xiuhua, W. A Composite Fourth-Order Iterative Method For Solving Nonlinear Equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2007; 184: 471-475.

[4] Kung, H.T., dan Traub, J.F. Optimal Order of One-Point and Multipoint Iteration. *Journal of the Associatiom for Computing Machinery*. 1974; 21(4): 643 – 651.

[5] Sharifi, S., Ferrara, M., Nik Long, MNA, dan Salimi, M. Modified Potra-Ptak Method To Determine The Multiple Zeros Of Nonlinear Equations," 2015.

[6] Sharma, J.R. "A Composite Third Order Newton-Steffensen Method For Solving Nonlinear Equations," *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 169, halaman 242-246. 2005.

[7] Weerakon, S., dan T.G.I Fernando. "A Variant Of Newton's Method With Accelerated Third-Order Convergence," *Applied Mathematics Letters.* Vol. 13, halaman 87-93. 2000.

[8] Halley E. A New Ecxat and Easy Method fo Finding the Roots on Any Quations Generally without any Previous Reduction. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*. 1694; 18: 136 – 148.

[9] Amat S. et. al. On the Global Convergence of Chebyshev's Iterasive Method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2008; 220: 17 – 21.

[10] Traub JF. Iterative Method for Solution of Equation, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1964.

[11] Amat S, et. al. Geometric Construction of Iterative Functions to Solve Nonlinear Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2003; 157: 197 – 205.

[12] Melmal A. Geometry and Convergence of Euler's and Halley's Method. *SIAM Review*. 1997; 39(4): 726 – 735.