

Metode Iterasi Orde Konvergensi Enam Untuk Penyelesaian Persamaan Nonlinear

M. N. Muhajir¹, M. Arif²

^{1,2}Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Seobrantas No. 155 Pekanbaru, 28293
e-mail: *nizam_ys86@yahoo.com*

Abstrak

Penelitian ini membahas tentang metode iterasi baru untuk mencari akar-akar persamaan nonlinear dengan variabel tunggal yang merupakan kombinasi metode double-Newton dan metode Potra-Ptak menjadi metode iterasi tiga langkah. Selanjutnya, turunan yang muncul pada metode iterasi tersebut ditaksir menggunakan penyetaran dua buah metode berorde empat dan beda maju sehingga diperoleh metode iterasi bebas turunan. Secara analitik ditunjukkan bahwa metode iterasi yang dihasilkan mempunyai orde konvergensi enam dengan empat evaluasi fungsi pada setiap iterasi, sehingga indeks efisiensinya adalah 1,5651. Komputasi numerik untuk beberapa contoh yang digunakan menunjukkan metode iterasi baru lebih efektif jika dibandingkan dengan metode lain yang didiskusikan.

Kata kunci: Indeks efisiensi, metode double-Newton, metode Potra-Ptak, orde konvergensi, persamaan nonlinear.

Abstract

This study discusses the new iteration method to find the roots of nonlinear equations with a single variable that is a combination of double-Newton method and Potra-Ptak method into a three-step iteration method. Furthermore, derivatives appear on the iteration method is estimated using the equalization of two methods fourth order and forward different. Analytically shown that the iteration method is generated in the order of convergence of six with four evaluation functions at each iteration, so the efficiency index was 1.5651. Numerical computation for some of the examples used show the new iteration method is more effective than other methods discussed.

Keywords: Efficiency index, double-Newton method, Potra-Ptak method, the order of convergence, nonlinear equations.

1. Pendahuluan

Matematika merupakan salah satu ilmu yang sering diminati, karena di dalam matematika banyak permasalahan yang bisa diselesaikan, salah satunya adalah menyelesaikan permasalahan persamaan nonlinear yang berbentuk

$$f(x) = 0, \dots\dots\dots(1)$$

dengan $f: D \subset \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ adalah fungsi skalar di selang terbuka D . Untuk menyelesaikan persamaan (1) kadangkala metode analitik tidak dapat digunakan, sehingga diperlukan metode lain. Metode yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan (1) adalah metode numerik dalam bentuk metode iterasi yang menghasilkan penyelesaian berupa nilai hampiran. Metode iterasi yang sangat populer dan sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan (1) adalah metode Newton dengan bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ dan } f'(x) \neq 0, \dots\dots\dots(2)$$

dengan orde konvergensi dua [5]. Pada perkembangannya metode Newton telah banyak mengalami modifikasi dengan tujuan untuk meningkatkan orde konvergensi dan indeks efisiensi. Kung dan Traub [8] mengembangkan metode Newton menjadi metode iterasi dua langkah dengan bentuk

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

yang dikenal dengan metode dobel Newton dan memiliki orde konvergensi empat dengan empat evaluasi fungsi pada setiap iterasi. Selanjutnya, Potra dan Ptak [9] juga mengembangkan metode Newton menjadi metode dua langkah, sehingga diperoleh sebuah metode iterasi baru dengan bentuk

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)}, \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

dengan orde konvergensi tiga [9].

Pada artikel ini dibahas kombinasi metode iterasi pada persamaan (3) dan persamaan (4) menjadi metode iterasi tiga langkah bebas turunan yang kemudian dilanjutkan dengan analisa konvergensi metode tersebut, Selanjutnya, metode iterasi yang diperoleh dilakukan uji komputasi dengan beberapa kasus yang dipilih untuk melihat keunggulan metode dengan beberapa metode yang dibandingkan.

2. Metodologi dan Bahan Penelitian

Metodologi yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literature dengan mengumpulkan data dan informasi terhadap materi-materi yang berkaitan dengan penelitian yang bersumber dari beberapa buku dan artikel dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan kembali metode dobel Newton pada persamaan (3) dan metode Potra-Ptak persamaan (4) yang dikombinasikan menjadi metode iterasi tiga langkah.
2. Selanjutnya, $f'(x_n)$ yang ada pada metode tersebut ditaksir menggunakan beda maju. Sedangkan, untuk $f'(y_n)$ pada metode tersebut ditaksir menggunakan metode penyetaraan seperti yang dilakukan oleh Chun dalam [3] sehingga diperoleh metode iterasi baru tiga langkah.
3. Menentukan orde konvergensi dan indeks efisiensi dari metode iterasi yang diperoleh serta melakukan simulasi numerik menggunakan program Maple 13.

Selanjutnya, bagian ini juga memuat beberapa definisi dan teorema dasar yang dapat digunakan sebagai landasan matematis untuk uraian-uraian pada bagian selanjutnya yang disajikan berikut ini.

Definisi 2.1 (Akar Persamaan) [7] Misalkan $f(x)$ adalah suatu fungsi kontinu. Setiap bilangan α pada domain f yang memenuhi $f(\alpha) = 0$ disebut pembuat nol fungsi $f(x)$, atau juga disebut akar persamaan $f(x) = 0$.

Teorema 2.2 (Teorema Taylor) [2] Misalkan $n \in N$, dengan N bilangan bulat positif. Misalkan suatu interval $I = [a, b]$ dan sedemikian hingga f dan $f', f'', \dots, f^{(n)}$ kontinu pada I dan $f^{(n+1)}$ ada pada (a, b) . Jika $x_0 \in I$ maka untuk sebarang $x \in I$ terdapat suatu titik c diantara x dan x_0 sehingga

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Definisi 2.3 (Orde Konvergensi) [1] Sebuah barisan iterasi $\{x_n | n \geq 0\}$ dikatakan konvergen dengan orde $p \geq 1$ ke α jika

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c |\alpha - x_n|^p, \quad n \geq 0,$$

untuk suatu konstanta $c > 0$. Jika $p = 1$, maka barisan disebut konvergen linear ke α .

Definisi 2.4 (COC) [10] Misalkan α adalah akar persamaan nonlinear $f(x)$, dan andaikan x_{n-1}, x_n, x_{n+1} adalah tiga iterasi berturut-turut yang cukup dekat ke akar α . Maka *computational order of convergence* (COC) dapat diaproksimasi menggunakan rumus

$$COC \approx \frac{\ln|(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)|}{\ln|(x_n - \alpha)/(x_{n-1} - \alpha)|}.$$

Definisi 2.5 (Indeks Efisiensi) [6] Misalkan q adalah banyak evaluasi fungsi yang dibutuhkan oleh suatu metode iterasi. Efisiensi dari metode tersebut dihitung dengan indeks efisiensi yang didefinisikan sebagai $p^{1/q}$, dengan p adalah orde konvergensi dari metode tersebut.

3. Hasil dan Pembahasan

Untuk meningkatkan orde konvergensi metode iterasi pada persamaan (3) dan persamaan (4) yang masing-masing memiliki orde konvergensi empat dan tiga. Metode tersebut dikombinasikan menjadi metode iterasi tiga langkah dalam bentuk berikut

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \dots \dots \dots (5)$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \dots \dots \dots (6)$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n) + f(z_n)}{f'(y_n)}. \dots \dots \dots (7)$$

Selanjutnya, bentuk $f'(x_n)$ yang ada pada persamaan (6) diaproksimasi menggunakan beda maju berikut

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n + f^3(x_n)) - f(x_n)}{f^3(x_n)} = N_1(x_n). \dots \dots \dots (8)$$

Untuk $f'(y_n)$ pada persamaan (6) dan (7) diaproksimasi menggunakan penyataan metode iterasi berorde empat seperti yang dilakukan oleh Chun dalam [3], yaitu

$$f'(y_n) \approx \frac{f'(x_n)f^2(x_n)}{f^2(x_n) + 2f(x_n)f(y_n) + f^2(y_n)}. \dots \dots \dots (9)$$

Jika persamaan (8) disubstitusikan ke persamaan (9), maka diperoleh

$$f'(y_n) \approx \frac{N_1(x_n)f^2(x_n)}{f^2(x_n) + 2f(x_n)f(y_n) + f^2(y_n)} = N_2(x_n, y_n) \dots (10)$$

Kemudian, jika persamaan (8) disubstitusikan ke persamaan (5) dan persamaan (10) disubstitusikan ke persamaan (6) dan (7), maka diperoleh metode iterasi berikut

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{N_1(x_n)}, \dots (11)$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{N_2(x_n, y_n)}, \dots (12)$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n) + f(z_n)}{N_2(x_n, y_n)} \dots (13)$$

Berikut ini akan ditunjukkan orde konvergensi metode iterasi (11) – (13) sebagaimana disajikan pada Teorema 3.1.

Teorema 3.1 (Kekonvergenan Metode Iterasi) Misalkan $f: D \rightarrow R$ fungsi yang mempunyai turunan pada interval D . Selanjutnya asumsikan bahwa α adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$. Misalkan diberikan tebakan awal x_0 cukup dekat ke α , maka metode iterasi (11) – (13) mempunyai orde konvergensi enam dan memenuhi persamaan *error*:

$$e_{n+1} = \left(\frac{c_3^2 c_2}{c_1^3} - \frac{9c_3 c_2^3}{c_1^4} + \frac{20c_2^5}{c_1^5} \right) e_n^6 + O(e_n^7),$$

dengan $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j! f'(\alpha)}$, $j \geq 1$ dan $e_n = x_n - \alpha$.

Bukti. Misalkan α akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$, maka $f(\alpha) = 0$. Ekspansi Taylor untuk $f(x_n)$ di sekitar $x_n = \alpha$ dan dengan mengabaikan suku yang memuat $(x_n - \alpha)^j$, dengan $j \geq 7$ diperoleh

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{1}{2} f''(\alpha)(x_n - \alpha)^2 + \dots + O((x_n - \alpha)^7) \dots (14)$$

Oleh karena $c_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j! f'(\alpha)}$ dengan $j = 1, 2, \dots, 6$ dan $e_n = x_n - \alpha$, sehingga setelah penyederhanaan persamaan (8) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_1 e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + \dots + O(e_n^7)) \dots (15)$$

Dengan cara yang sama, $f(x_n + f^3(x_n))$ dapat diperoleh dengan menggunakan ekspansi deret Taylor di sekitar $x_n = \alpha$ dan diperoleh

$$f(x_n + f^3(x_n)) = f'(\alpha)(c_1 e_n + c_2 e_n^2 + (c_3 - c_1^4) e_n^3 + \dots + O(e_n^7)) \dots (16)$$

Berdasarkan persamaan (15) dan (16) diperoleh

$$N_1(x_n) = c_1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + (4c_4 - c_1^3 c_2) e_n^3 + \dots + O(e_n^7) \dots (17)$$

Persamaan (17) disubstitusikan ke persamaan (11) diperoleh

$$y_n = \alpha + \frac{c_2 e_n^2}{c_1} + \left(\frac{2c_3}{c_1} - \frac{2c_2^2}{c_1^2} \right) e_n^3 + \dots + O(e_n^7). \dots\dots\dots(18)$$

Kemudian, gunakan ekspansi deret Taylor untuk memperoleh $f(y_n)$ di sekitar $y_n = \alpha$ sehingga

$$f(y_n) = f'(\alpha)(c_2 e_n^2 + \left(\frac{2c_3}{c_1} - \frac{2c_2^2}{c_1^2} \right) e_n^3 + \dots + O(e_n^7)). \dots\dots\dots(19)$$

Berdasarkan persamaan (15), (17), dan (19) diperoleh

$$N_2(x_n, y_n) = c_1 + \left(\frac{5c_2^2}{c_1} - c_3 \right) e_n^2 + \left(\frac{18c_2 c_3}{c_1} - 2c_4 - \frac{20c_2^3}{c_1^2} + c_1^3 c_2 \right) e_n^3 + \dots + O(e_n^7). \dots\dots(20)$$

Persamaan (20) disubstitusikan ke persamaan (12) diperoleh

$$z_n = \alpha + \left(\frac{4c_2^3}{c_1^3} - \frac{c_2 c_3}{c_1^2} \right) e_n^4 + \dots + O(e_n^7). \dots\dots\dots(21)$$

Untuk mendapatkan $f(z_n)$ digunakan ekspansi deret Taylor di sekitar $z_n = \alpha$ sehingga diperoleh

$$f(z_n) = f'(\alpha) \left(\left(\frac{4c_2^3}{c_1^3} - \frac{c_2 c_3}{c_1^2} \right) e_n^4 + \dots + O(e_n^7) \right). \dots\dots\dots(22)$$

Berdasarkan persamaan (19), (20), dan (22) diperoleh

$$\frac{f(y_n) + f(z_n)}{N_2(x_n, y_n)} = \frac{c_2 e_n^2}{c_1} + \left(\frac{2c_3}{c_1} - \frac{2c_2^2}{c_1^2} \right) e_n^3 + \dots + O(e_n^7). \dots\dots\dots(23)$$

Persamaan (23) disubstitusikan ke persamaan (13) diperoleh

$$x_{n+1} = \alpha + \left(\frac{c_3^2 c_2}{c_1^3} - \frac{9c_3 c_2^3}{c_1^4} + \frac{20c_2^5}{c_1^5} \right) e_n^6 + O(e_n^7). \dots\dots\dots(24)$$

Oleh karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$, persamaan (24) menjadi

$$e_{n+1} = \left(\frac{c_3^2 c_2}{c_1^3} - \frac{9c_3 c_2^3}{c_1^4} + \frac{20c_2^5}{c_1^5} \right) e_n^6 + O(e_n^7). \dots\dots\dots(25)$$

4. Simulasi Numerik

Pada bagian ini dilakukan simulasi numerik untuk membandingkan beberapa metode iterasi seperti metode Newton (MN) persamaan (2), metode double-Newton (MDB) persamaan (3), metode Potra-Ptak (MPP) persamaan (4), dan metode yang didiskusikan (MBT) dalam menemukan akar dari persamaan nonlinear. Untuk melakukan perbandingan ini, ada beberapa persamaan nonlinear yang digunakan. Komputasi dilakukan dengan menggunakan bantuan software Maple 13 dengan ketelitian sampai 800 digit. Adapun kriteria pemberhentian program komputasi adalah jika $|f(x_{n+1})| \leq Tol$, $|x_k - x_{k-1}| \leq Tol$, dan jumlah iterasi mencapai maksimum iterasi. Tol yang digunakan adalah sebesar 10^{-15} .

Dalam melakukan perbandingan ini ada beberapa persamaan nonlinear yang digunakan yaitu sebagai berikut:

$$f_1(x) = (x - 1)^3 - 1 \qquad \alpha = 2,0000000000000000$$

$$f_2(x) = x^5 + x^4 + 4x^2 - 15 \quad \alpha = 1,347428098968305$$

$$f_3(x) = \sqrt{x} - x \quad \alpha = 1,0000000000000000$$

$$f_4(x) = xe^{-x} - 0,1 \quad \alpha = 0,111832559158963$$

Hasil uji komputasi untuk ke empat persamaan nonlinear di atas diberikan pada Tabel 1 – 4 berikut:

Tabel 1. Perbandingan Komputasi Beberapa Metode untuk Fungsi $f_1(x) = (x-1)^3 - 1$.

x_0	n	Metode	COC	$ f(x_{n+1}) $	$ x_{n+1} - x_n $
1,8	5	MN	2,0000	9,27262e-21	5,55956e-11
	3	MDN	3,9996	2,86605e-41	5,55956e-11
	4	MPP	3,0000	3,94637e-35	1,87362e-12
	3	MBT	5,9106	1,27785e-40	1,16416e-17
2,2	5	MN	2,0000	1,99794e-24	8,16076e-13
	3	MDN	3,9999	1,33059e-48	8,16076e-13
	3	MPP	2,9996	1,57657e-17	1,37992e-06
	2	MBT	5,6789	3,32131e-23	9,30306e-05
2,6	6	MN	2,0000	1,28586e-24	6,54691e-13
	3	MDN	3,9923	1,28586e-24	8,09130e-07
	4	MPP	2,9996	3,68296e-24	8,49862e-09
	3	MBT	5,9903	1,78255e-52	1,23057e-09

Tabel 2. Perbandingan Komputasi Beberapa Metode untuk Fungsi $f_2(x) = x^5 + x^4 + 4x^2 - 15$.

x_0	n	Metode	COC	$ f(x_{n+1}) $	$ x_{n+1} - x_n $
1,2	5	MN	2,0000	4,74839e-24	3,47347e-13
	3	MDN	3,9999	6,46588e-49	3,47347e-13
	4	MPP	3,0000	3,33975e-47	7,36426e-17
	3	MBT	6,2196	4,25019e-81	1,33099e-14
1,9	6	MN	2,0000	1,29305e-21	5,73189e-12
	3	MDN	3,9927	1,29305e-21	2,32280e-06
	4	MPP	2,9993	8,86949e-21	4,73359e-08
	3	MBT	5,9885	1,79663e-46	7,85565e-09
2,2	7	MN	2,0000	3,61553e-28	3,03093e-15
	3	MDN	4,0000	3,74868e-57	3,03093e-15
	5	MPP	3,0000	2,14869e-38	6,35745e-14
	3	MBT	5,9252	1,10726e-26	1,56130e-05

Tabel 3. Perbandingan Komputasi Beberapa Metode untuk Fungsi $f_3(x) = \sqrt{x} - x$.

x_0	n	Metode	COC	$ f(x_{n+1}) $	$ x_{n+1} - x_n $
0,5	5	MN	2,0000	5,56642e-22	6,67318e-11
	3	MDN	3,9987	1,54925e-43	6,67318e-11
	4	MPP	3,0002	5,71003e-32	9,70330e-11
	3	MBT	5,9776	1,51967e-54	2,04946e-09
0,8	4	MN	2,0000	4,45502e-20	5,96994e-10
	2	MDN	4,0806	4,45502e-20	4,88687e-05
	3	MPP	3,0004	4,99266e-29	9,27863e-10
	2	MBT	6,1443	3,31985e-32	1,08361e-05
1,9	5	MN	2,0000	6,89752e-28	7,42834e-14
	3	MDN	3,9998	2,37879e-55	7,42834e-14
	3	MPP	2,9955	8,64274e-21	5,17119e-07
	2	MBT	5,4947	2,63692e-22	4,84262e-04

Tabel 4. Perbandingan Komputasi Beberapa Metode untuk Fungsi $f_4(x) = xe^{-x} - 0.1$.

x_0	n	Metode	COC	$ f(x_{n+1}) $	$ x_{n+1} - x_n $
-0,1	5	MN	2,0000	3,51956e-23	6,45688e-12
	3	MDN	3,9998	1,65792e-45	6,45688e-12
	3	MPP	2,9954	1,23702e-16	4,10013e-06
	2	MBT	5,7703	2,09403e-19	4,0147e-04
0,0	4	MN	2,0000	4,44057e-16	2,29350e-08
	2	MDN	3,9630	4,44057e-16	1,46902e-04
	3	MPP	2,9994	3,89307e-23	2,78891e-08
	2	MBT	5,9099	9,02636e-28	1,93591e-05
0,2	4	MN	2,0000	5,78166e-17	8,27571e-09
	2	MDN	4,0183	5,78166e-17	8,82401e-05
	3	MPP	3,0005	1,37791e-23	1,97278e-08
	2	MBT	6,0782	9,68526e-28	1,95878e-05

Berdasarkan Tabel 1 – 4 dapat dilihat bahwa keempat metode memberikan hasil jumlah yang sebanding, tidak terdapat perbedaan jumlah iterasi yang signifikan. Pada Tabel 1 – 4 kolom pertama merupakan variasi nilai awal, kolom kedua merupakan jumlah iterasi, kolom ketiga merupakan metode yang dibandingkan, kolom keempat merupakan orde konvergensi secara numerik, kolom kelima merupakan nilai fungsi yang dihasilkan, dan kolom enam merupakan *error*. Berdasarkan nilai fungsi yang ada pada Tabel 1 – 4 terlihat bahwa MTL dibeberapa nilai awal yang dipilih memiliki nilai fungsi yang lebih kecil dibandingkan dengan metode lainnya.

5. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan maka metode iterasi baru (MTL) yang didiskusikan memiliki orde konvergensi enam dengan melibatkan empat evaluasi. Dengan demikian, berdasarkan definisi indeks efisiensi metode ini memiliki indeks efisiensi $6^{\frac{1}{4}} \approx 1,5651$ lebih baik jika dibandingkan metode Newton $2^{\frac{1}{2}} \approx 1,4142$, metode double-Newton $4^{\frac{1}{4}} \approx 1,4142$ dan metode Potra-Ptak $3^{\frac{1}{3}} \approx 1,4422$. Hal ini menunjukkan bahwa metode iterasi baru lebih efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.

Daftar Pustaka

- [1] K. E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis, Second Edition*, John Wiley & Son, New York, 1989, Hal. 56.
- [2] R. G. Bartle, D. R. Shebert, *Introduction to Real Analysis, 4st Ed*, Jhon Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, Hal. 184.
- [3] C. Chun, Some fourth-order iterative methods for solving nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation*, 195 (2008), 454–459.
- [4] C. Chun, Y. M. Ham, Some fourth modifications of Newton's method, *Applied Mathematics and Computation*, 197 (2008), 654–658.
- [5] R. V. Dukupati, *Numerical Methods*, New Delhi, New Age International (P) Ltd., New Delhi, 2010. Hal. 86.
- [6] W. Gautschi, *Numerical Analysis, Second Edition*, Birkhauser, New York, 2012, Hal. 261.
- [7] A. Kharab dan R. B. Guenther, *An Introduction to Numerical Methods: A MATLAB Approach, Third Edition*, CRC Press, New York, 2012, Hal. 39.
- [8] H. T. Kung, J. F. Traub, Optimal order of one-point and multipoint iteration, *Journal of the Association for Computing*, Vol. 21, No. 4, 1974, 643–651.
- [9] F. A. Potra, V. Ptak, Nondiscrete introduction and iterative processes, *Research Notes in Mathematics*, Vol. 103, 1984.
- [10] S. Weerakon, T. G. I. Fernando, A variant of Newton's methods with accelerated third order convergence, *Applied Mathematics Letters*, 13 (2000), 87–93.