Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 9
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Pekanbaru, 18-19 Mei 2017
ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Diagonalisasi Matriks Segitiga Atas Ring komutatif Dengan Elemen Satuan

Fitri Aryani[1], Rahmadani[2]
Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Suska Riau
e-mail: khodijah_fitri@uin-suska.ac.id

Abstrak

Suatu matriks bujur sangkar A atas ring komutatif dengan elemen satuan dapat didiagonalisasikan jika terdapat basis R- modul bebas pada gabungan setiap ruang eigennya, sehingga $P^{-1}AP = D$. Matriks segitiga merupakan bagian dari matriks bujur sangkar, dengan determinan dari matriks segitiga yaitu perkalian dari semua elemen diagonal utamanya. Dalam pendiagonalisasian matriksnya terlebih dahulu dibentuk persamaan polinomial karakteristiknya $C_A(\lambda)$ dan gunakan nilai eigen dari $C_A(\lambda) = 0$ atau nilai eigen dari akar-akar persamaan karakteristiknya untuk menentukan ruang eigen $E(\lambda)$. Selanjutnya gabungkan dan selidiki setiap ruang eigen $E(\lambda)$ yang dapat memuat basis R - modul bebas di R^n. Sehingga suatu matriks segitiga atas ring komutatif dengan elemen satuan yang dapat didiagonalisasikan akan menghasilkan matriks diagonal yang similar terhadap matriks segitiga tersebut. Namun pada hasil akhir tidak selalu dapat ditemukan bahwa kedua matriks tersebut mempunyai nilai deteminan yang sama. Pada makalah ini diberikan contoh matriks segitiga berukuran 3×3 yang akan didiagonalisasikan.

Kata Kunci : *diagonalisasi matriks, matriks segitiga, ring komutatif dengan elemen satuan, ruang eigen similaritas matriks.*

Abstract

A square matrix A over commutative ring with unit element can be diagonalized if have there the bases of R- free modul at the each combined eigen space, so that $P^{-1}AP = D$. The tringular matrix is part of square matrix, with determinant of a tringular matrix is multiplication of all elements of the main diagonal. The step of diagonalizated of matrices is first specify the characteristic polynomial $C_A(\lambda)$ and use the eigenvalue of $C_A(\lambda) = 0$ or the roots of the characteristic equation to determine eigen space $E(\lambda)$ further combine and investigate each eigenspace containing base R-free module on R^n. So that a triangular matrix over commutative ring with unit element can to diagonalization and generating a similar matriks to the triangular matrix, but not always to be found that both the matrices have the same of determinant value. In this paper will be given examples of matrices sized 3×3.

Keywords : *diagonalization matrix, triangular matrix, commutative rings with unit element, eigen space, similarity matrix.*

1. Pendahuluan

Dalam bidang aljabar pembahasan mengenai matriks, khususnya matriks bujur sangkar menjadi salah satu topik yang menarik untuk dibahas. Matriks segitiga merupakan bagian dari matriks bujur sangkar. Nilai determinan dari matriks segitiga atas maupun matriks segitiga bawah yaitu perkalian semua elemen-elemen diagonal utamanya, kemudian tranpose dari matriks segitiga atas yaitu matriks segitiga bawah begitu sebaliknya. Hal tersebut membuat nilai eigen dari matriks A akan sama dengan nilai eigen pada matriks A^t. Selanjutnya dengan menggunakan nilai eigen yang sama dapat diperhitungkan vektor eigennya. Meskipun nilai eigennya sama namun vektor eigen dari kedua matriks tersebut tidaklah sama.

Pembahasan mengenai nilai eigen dan vektor eigen ini, mempunyai peranan yang sangat penting dalam pendiagonalisasian suatu matriks. Adapun matriks diagonal yang didapat dari matriks $A \in F$ akan sama atau similar terhadap matriks A. Dalam pendiagonalisasian matriks $M_{n \times n} \in F$ dibutuhkan suatu matriks invertibel P yang akan mendiagonalisasikan matriks A sedemikian sehingga $A = PDP^{-1}$, sehingga sebarang matriks yang bukan berbentuk matriks diagonal dapat menjadi matriks

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

diagonal D yang similar terhadap matriks A dengan syarat terdapat vektor eigen dari matriks A yang bebas linier. Hal tersebut sama halnya dalam pendiagonalisasian matriks atas ring komutatif $M_{n\times n} \in R$, namun tidak semua matriks atas ring komutatif dapat didiagonalisasikan. Sehingga untuk menemukan suatu matriks diagonal D yang similar terhadap matriks A, ada syarat yang harus dipenuhi dalam pendiagonalisasian matriksnya. Adapun syarat pendiagonalisasian matriksnya yaitu harus termuat basis R- modul bebas dari gabungan semua ruang eigennya.

Pembahasan mengenai diagonalisasi matriks khususnya pada ring komutatif dengan elemen satuan sebenarnya telah disinggung ataupun dibahas pada [6]. Makalah tersebut membahas tentang langkah-langkah dalam pendiagonalan matriks sehingga didapat suatu matriks diagonal. Selanjutnya [8] membahas tentang langkah-langkah diagonalisasi suatu matriks yang elemen-elemennya berasal dari suatu daerah ideal utama (DIU) dan karakteristik elemen di diagonal utama matriks hasil proses diagonalisasi tersebut. Berdasarkan pemaparan latar belakang diatas, penulis tertarik untuk membahas tentang diagonalisasi matriks khususnya pada matriks segitiga.

2. Bahan dan Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur. Berikut diberikan literatur-literatur yang diperlukan untuk menunjang hasil dan pembahasan.

2.1 Matriks Segitiga

Definisi 1. [1] Matriks bujur sangkar yang semua entri diatas diagonal utamanya nol disebut matriks segitiga bawah kemudian matriks bujur sangkar yang semua entri dibawah diagonal utamanya nol disebut matriks segitiga atas. Suatu matriks yang termasuk dalam matriks segitiga bawah maupun matriks segitiga atas disebut matriks segitiga.

Berikut ini diberikan bentuk umum dari matriks segitiga atas (matriks A) maupun matriks segitiga bawah (matriks B).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{dan } B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Berikut diberi pembahasan mengenai definisi dari suatu ring, ring komutatif dan aksioma-aksioma yang berlaku pada ring dan ring komutatif tersebut beserta contohnya.

Definisi 2. [7] Suatu ring $(R,+,\cdot)$ adalah suatu himpunan tak kosong R dengan operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ pada R yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. Tertutup terhadap penjumlahan $(+)$, $\forall\, a,b \in R$ maka berlaku $a+b \in R$.
2. Asosiatif terhadap penjumlahan $(+)$, $\forall\, a,b \in R$ berlaku $(a+b)+c = a+(b+c)$.
3. Adanya unsur satuan atau identitas terhadap penjumlahan $(+)$, Terdapat $e \in R$ sehingga $\forall\, a \in R$ berlaku bahwa $a+e = e+a = a$.
4. Adanya unsur balikan atau invers terhadap penjumlahan (+), $\forall\, a \in R$ terdapat $-a \in R$ sehingga $a+(-a) = (-a)+a = e$.
5. Komutatif terhadap penjumlahan (+), $\forall\, a,b \in R$ maka berlaku $a+b = b+a$.
6. Tertutup terhadap perkalian $(\cdot)$, $\forall\, a,b \in R$ maka berlaku $a \cdot b \in R$.
7. Asosiatif terhadap perkalian $(\cdot)$, $\forall\, a,b,c \in R$ berlaku $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$
8. Distributif perkalian $(\cdot)$ terhadap penjumlahan, $\forall\, a,b,c \in R$ maka berlaku $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ (*distribusi kanan*) dan $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ (*distribusi kiri*).

Dari defenisi diatas dapat disimpulkan bahwa suatu stuktur aljabar dengan dua operasi biner $(R,+,\cdot)$ dikatakan suatu ring bila:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

1. $(R, +)$ merupakan suatu grup komutatif
2. $(R, \cdot)$ merupakan suatu semi grup/ monoid
3. $(R, +, \cdot)$ distributif

Definisi 3. [4] Diberikan suatu ring R. Jika terdapat $e \in R$ sehingga untuk setiap $a \in R$ berlaku $a \cdot e = e \cdot a = a$, maka $e \in R$ disebut elemen satuan dan R dikatakan ring dengan elemen satuan. Jika terhadap perkalian R bersifat komutatif, maka R disebut ring komutatif.

Definisi 4. [2] Dua elemen x dan y pada suatu ring komutatif R dikatakan saling berhubungan jika $x = uy$ untuk beberapa unit di R dengan $u \in U(R)$. Jika x dan y berhubungan, dapat ditulis $x \sim y$.

Definisi 5. [2] Jika R suatu ring kemudian R^* disebut elemen-elemen tidak nol dari R dengan $R^* = R - \{0\}$. Suatu $x \in R$ disebut pembagi nol kiri jika $xy = 0$ untuk beberapa $y \in R^*$, suatu $x \in R$ disebut pembagi nol kanan jika $yx = 0$ untuk beberapa $y \in R^*$, dengan $Z(R)$ menyatakan himpunan elemen di R yang merupakan pembagi nol kiri dan kanan.

Selanjutnya akan dibahas mengenai modul dan akan diberikan definisi dari modul bebas.

2.2 Modul

Definisi 6. [3] Diberikan suatu ring R dan suatu grup abelian M dengan perkalian skalar. Suatu R-modul kanan atau modul kanan atas R didefenisikan sebagai berikut:

$$M \times R \to M$$

untuk setiap $r, s \in R$ dan $m, n \in M$ memenuhi aksioma-aksioma:

a. $(m + n) \cdot r = m \cdot r + n \cdot r$
b. $m \cdot (r + s) = m \cdot r + m \cdot s$
c. $m \cdot (r \cdot s) = (m \cdot r) \cdot s$
d. $m \cdot 1 = m$

Kemudian suatu R-modul kiri atau modul kiri atas R didefenisikan sebagai berikut:

$R \times M \to M$

untuk setiap $r, s \in R$ dan $m, n \in M$ memenuhi aksioma-aksioma:

a. $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$
b. $(r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m$
c. $(r \cdot s) \cdot m = r \cdot (s \cdot m)$
d. $1 \cdot m = m$

Definisi 7. [2] Diberikan M merupakan R-modul dan diberikan $B = \{m_1, m_2, \cdots, m_n\}$ merupakan subset dari M, sehingga:

a. B merupakan basis R-modul dari M yang dapat membentuk kombinasi linier dari elemen B.
b. Sebuah himpunan bagian $\{m_1, m_2, \cdots, m_n\}$ dari elemen dari B dikatakan bebas linier atas R jika memenuhi $x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n = 0$ dengan $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ untuk setiap $x_1, x_2, \cdots, x_n \in R$.
c. B bebas linier atas R jika setiap bagian dari elemen B bebas linier atas R.
d. B merupakan basis R-modul bebas dari M jika B merupakan basis R-modul dan bebas linier atas R.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

e. M merupakan basis R-modul bebas jika M mempunyai suatu basis R-modul bebas

Selanjutnya akan dibahas mengenai matrik atas ring komutatif.

2.3 Matriks Atas Ring Komutatif

Definisi 8. [2] Misalkan R adalah ring komutatif, maka himpunan semua matriks berukuran $m \times n$ atas R, dinotasikan $M_{m\times n}(R)$ disebut himpunan matriks atas ring komutatif.

Selanjutnya akan dibahas tentang nilai eigen dan vektor eigen beserta sedikit pembahasan mengenai ruang nul (*Null Space*) pada matriks atas ring komutatif.

2.4 Nilai Eigen dan vektor Eigen

Definisi 9. [1] Jika A adalah matriks $n \times n$, maka terdapat vektor taknol v didalam R^n dinamakan vektor eigen (*eigenvector*) dari A jika Av adalah kelipatan skalar dari v , yakni: $Av = \lambda v$ untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) dari A dan v dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Definisi 10. [2] Diberikan $A \in M_{n\times n}(R)$.

a. Suatu elemen $\lambda \in R$, disebut nilai eigen dari matriks A jika dipenuhi $Av = \lambda v$ untuk suatu $v \in R^n$ yang tak nol.
b. $\mathcal{S}(A) = \{\lambda \in R |\ \lambda\ nilai\ eigen\ dari\ A\}$ disebut spektrum dari A.
c. Vektor tak nol $v \in R^n$ disebut vektor eigen A jika $Av = \lambda v$ untuk semua $\lambda \in R$.
d. $E(\lambda) = \{v \in R^n | Av = \lambda v\}$ disebut ruang eigen yang bersesuaian dengan suatu nilai eigen $\lambda \in \mathcal{S}(A)$.

Lemma 1. [2] Diberikan $A \in M_{n\times n}(R)$. Maka bagian berikut ini semuanya sama atau saling berhubungan:

a. $\mathcal{S}(A)$
b. $\{\lambda \in R | NS(\lambda I_n - A) \neq (0)\}$
c. $\{\lambda \in R |\ C_A(\lambda) \in Z(R)\}$

Definisi 11. [5] Diberikan matriks $m \times n$, himpunan dari semua vektor di R^n yang memenuhi persamaan $Ax = 0$ disebut ruang null dari A dan dilambangkan dengan null A.

Definisi 12. [2] Diberikan $A \in M_{n\times n}(R)$. $\mathcal{R}(A) = \{\lambda \in R |\ C_A(\lambda) = 0\}$ disebut himpunan akar-akar $C_A(\lambda)$ di R.

Selanjutnya akan dibahas mengenai invers matriks yang juga merupakan bahasan penting dalam pendiagonalisasian matriks nantinya.

2.5 Invers Matriks dan Diagonalisasi Matriks

Dalam mencari invers matriks banyak metode yang dapat digunakan. Penelitian ini akan menggunakan metode OBE dalam mendapatkan invers matriks atas ring komutatif. Berikut diberikan defenisi tentang invers dari suatu matriks.

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Definisi 13. [1] Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, dan jika sebuah matriks B yang berukuran sama dapat ditentukan sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik dan B disebut invers dari A.

Lemma 2. [2] Diberikan $A \in M_{n\times n}(R)$, matriks A invertibel jika dan hanya jika $\det(A) \in U(R)$, dengan $U(R)$ adalah himpunan unit-unit di R.

Landasan teori yang terakhir dibahas tentang diagonalisasi matriks.

Definisi 14. [1] Matriks kuadrat A dapat didiagonalisasikan jika terdapat matriks P yang dapat dibalik sehingga $P^{-1}AP$ diagonal, matriks P dikatakan mendiagonalisasi A.
Dari definisi diatas, matriks atas ring komutatif juga dapat didiagonalisasikan sehingga dapat pula ditemukan matriks P yang dapat dibalik (invertibel). Namun ada syarat pada proses pendiagonalisasian matriks atas ring komutatif. Berikut diberikan teorema syarat dari keterdiagonalan matriks atas ring komutatif.
Teorema 1. [2] Misalkan $A \in M_{n\times n}(R)$, matriks A dapat didiagonalisasikan jika dan hanya jika $\bigcup_{\lambda\in\mathcal{R}(A)} E(\lambda)$ memuat suatu basis dari R- modul di R^n.
Lemma 3. [2] Diberikan $D_1 = diag(r_1, r_2, r_3, \cdots, r_k) \in M_{(m\times n)}(R)$ dengan $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_k$ dimana biasanya untuk setiap $k = \min\{m, n\}$. kemudian diberikan $D_2 = diag(s_1, s_2, s_3, \cdots, s_k) \in M_{(m\times n)}(R)$ dengan $s_1, s_2, s_3, \cdots, s_k$. Jika $D_1 \approx D_2$ maka $Rr_i \sim Rs_i$ untuk setiap $i = 1,2,3,\cdots,k$.

3. Hasil dan Pembahasan

Berikut ini akan diberikan langkah-langkah secara umum dalam pendiagonalisasian matriks segitiga.atas ring komutatif dengan elemen satuan. Langkah yang diberikan adalah langkah-langkah secara umum untuk matriks segitiga atas saja, untuk segitiga bawah langkahnya sama, hanya matriksnya yang berbeda.

Diberikan matriks segitiga atas berukuran $n \times n$ yang akan didiagonalisasikan sebagai berikut:

Misalkan $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_{(n\times n)}\ (Z_m)$$

Adapun langkah-langkah dalam pendiagonalisasiannya:

1. olinomial karakteristik dari matriks A sebagai berikut:
   $C_A(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$, maka:
   $C_A(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})\cdots(\lambda - a_{nn})$
2. Tentukan nilai eigen dari persamaan polinomial karakteristiknya
   Karena $C_A(\lambda) = 0$, maka akan diperoleh:
   $\mathcal{R}(A) = \{\lambda_i \mid C_A(\lambda_i) = 0\}$ dan
   $\mathcal{S}(A) = \{\lambda_i \in R \mid C_A(\lambda_i) \in Z(R)\}$
3. Tentukan ruang eigen dengan menggunakan nilai eigen $(E(\lambda) = NS[\lambda I - A])$ dari $\lambda_i \in \mathcal{R}(A)$ sebagai berikut:

$E(\lambda) = NS[\lambda I - A]$

NS (*Nullspace*) dari matriks tersebut diperoleh dengan menyelesaikan SPL homogen

$[\lambda I - A][x] = [0]$

Dari penyelesaian sistem persamaan diatas maka akan ditemukan vektor-vektor dari ruang eigen $E(\lambda_n)$.

4. Gabungkan semua ruang eigen dan selidiki basis R- modul bebas dari setiap ruang eigennya, yaitu $\bigcup_{\lambda\in\mathcal{R}(A)} E(\lambda)$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

5. Terdapat basis R- modul bebas dari $\bigcup_{\lambda \epsilon \mathcal{R}(A)} E(\lambda)$ yaitu vektor-vektor yang bebas linier dan membangun di $\bigcup_{\lambda \epsilon \mathcal{R}(A)} E(\lambda)$ tersebut. Vektor-vektor tersebut dapat ditulis sebagai vektor-vektor kolom pada matriks P berikut:

$$P = \begin{bmatrix} e_{k_1 1} & f_{k_2 1} & g_{k_3 1} & \cdots & \varphi_{k_n 1} \\ e_{k_1 2} & f_{k_2 2} & g_{k_3 2} & \cdots & \varphi_{k_n 2} \\ e_{k_1 3} & f_{k_2 3} & g_{k_3 3} & \cdots & \varphi_{k_n 3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{k_1 n} & f_{k_2 n} & g_{k_3 n} & \cdots & \varphi_{k_n n} \end{bmatrix} \text{ untuk suatu } k_n \in \{1,2,3,\cdots,n\}$$

Matriks P diatas tidak tunggal. Selanjutnya dapat ditemukan invers dari matriks P dengan melakukan operasi baris elementer (OBE) untuk mereduksi matriks P menjadi matriks I dan juga lakukan operasi baris elementer yang sama pada matriks I untuk menemukan P^{-1}.

6. Diperoleh matriks diagonal D sedemikian sehingga $P^{-1}AP = D$. Sehingga diperoleh matriks D yang similar terhadap matriks A

Selanjutnya akan diberikan contoh diagonalisasi matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah atas ring komutatif dengan elemen satuan berukuran 3×3.

Contoh 5. Diagonalisasikanlah matriks berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_{(3\times 3)}(Z_4)$$

Penyelesaian:

Untuk mendiagonalisasikan matriks di atas maka akan digunakan langkah-langkah yang telah ada, sebagai berikut:

1. Polinomial karakteristik dari matriks A sebagai berikut:

$$C_A(\lambda) = |\lambda I - A|$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 2)$$

2. Nilai eigen dari persamaan polinomial karakteristiknya.
$C_A(0) = (0)^3 + 2(0)^2 + 3(0) + 2 = 2 \in Z(R)$, Selanjutnya:
$C_A(1) = 0 \in Z(R)$, $C_A(2) = 0 \in Z(R)$, $C_A(3) = 0 \in Z(R)$, maka $\mathcal{S}(A) = \{0,1,2,3\}$ dan $\mathcal{R}(A) = \{1,2,3\}$
3. Ruang eigen $(E(\lambda) = NS[\lambda - A])$ dengan menggunakan nilai eigen dari $\lambda_i \in \mathcal{R}(A)$ sebagai berikut:

$$E(1) = NS \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

NS (*Nullspace*) dari matriks tersebut diperoleh dengan menyelesaikan SPL homogen berikut:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh: $e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, e_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, e_7 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, e_8 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

maka $NS\begin{bmatrix}0 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} = span\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, selanjutnya

$$E(2) = NS\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

NS (*Nullspace*) dari matriks tersebut diperoleh dengan menyelesaikan SPL homogen berikut:

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

diperoleh:

$f_1 = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, f_3 = \begin{bmatrix}2\\ 2\\ 0\end{bmatrix}, f_4 = \begin{bmatrix}3\\ 3\\ 0\end{bmatrix}$, maka $NS\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} = span\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, dan

$$E(3) = NS\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

NS (*Nullspace*) dari matriks tersebut diperoleh dengan menyelesaikan SPL homogen berikut:

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

diperoleh: $g_1 = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, g_2 = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}, g_3 = \begin{bmatrix}0\\ 2\\ 2\end{bmatrix}, g_4 = \begin{bmatrix}0\\ 3\\ 3\end{bmatrix}, g_5 = \begin{bmatrix}2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, g_6 = \begin{bmatrix}2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}, g_7 = \begin{bmatrix}2\\ 2\\ 2\end{bmatrix}, g_8 = \begin{bmatrix}2\\ 3\\ 3\end{bmatrix}$

maka $NS\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = span\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8\}$

4. Gabungan semua ruang eigen dan selidiki basis R- modul bebas dari setiap ruang eigennya.

$$\bigcup_{\lambda \epsilon \bar{R}(A)} E(\lambda) = span\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} \cup span\{f_1, f_2, e_3, f_4\}$$

$$\cup\, span\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 2\\ 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\ 2\\ 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\ 2\\ 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\ 2\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\ 3\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 2\\ 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 3\\ 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\ 2\\ 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\ 3\\ 3\end{bmatrix}\right\}$$

5. Basis R- modul bebas dari $\bigcup_{\lambda \epsilon \mathcal{R}(A)} E(\lambda)$ sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}, \text{ dengan } \det(P) = 1 \in U(R)$$

$P = \{v_1, v_2, v_3\}$ dengan $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (3,3,0)$ dan $v_3 = (2,3,3)$ merupakan basis R- modul bebas sebab membangun dan bebas linier. Selanjutnya akan dicari invers matriks P dengan menggunakan metode OBE, Sehinggga diperoleh invers dari matriks P:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}, \text{ dengan } \det(P^{-1}) = 1 \in U(R)$$

6. Diperoleh matriks diagonal D sedemikian sehingga $P^{-1}AP = D$, sebagai berikut:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} = diag(1,2,3) = D_1$$

Dari $\bigcup_{\lambda \epsilon \mathcal{R}(z)} E(\lambda)$ dapat ditemukan vektor-vektor lainnya yang bebas linier yang dapat memuat basis R- modul bebas. Berikut salah satu basis R- modul bebas lainnya:

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dengan } \det(Q) = 3 \in U(R)$$

Adapun invers matriks Q dengan metode OBE, yaitu

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dengan } \det(Q^{-1}) = 3 \in U(R)$$

maka:

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = diag(3,2,1) = D_2$$

Sehingga diperoleh matriks D_1 dan D_2 yang similar terhadap matriks A, kemudian juga $D_1 \approx D_2$ dengan $D_1 = diag(1,2,3)$ dan $D_2 = diag(3,2,1)$.

Contoh 6. Diagonalisasikanlah matriks berikut ini

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \in M_{(3\times3)}(Z_6)$$

Penyelesaian:

1. Polinomial karakteristik dari matriks B sebagai berikut:

$C_B(\lambda) = |\lambda I - B| = (\lambda^3 + 5\lambda^2 + 2\lambda + 4)$

2. Nilai eigen dari persamaan polinomial karakteristiknya.
   maka $\mathcal{S}(B) = \{0,1,2,3,4,5\}$ dan $\mathcal{R}(B) = \{1,2,4,5\}$
3. Ruang eigen $(E(\lambda) = NS[\lambda - B])$ dengan menggunakan nilai eigen dari $\lambda_i \in \mathcal{R}(B)$ sebagai berikut:

$$E(1) = NS\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} = e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, e_6 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, e_7 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, e_8 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, e_9 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$e_{10} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, e_{11} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, e_{12} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, e_{13} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, e_{14} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, e_{15} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, e_{16} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, e_{17} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} e_{18} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

selanjutnya dengan cara yang sama diperoleh

$$E(2) = NS\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} = span\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}\}$$

$$E(4) = NS\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = span\ \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{15}, g_{16}, g_{17}, g_{18}$$
$$, g_{19}, g_{20}, g_{21}, g_{21}, g_{22}, g_{23}, g_{24}, g_{25}, g_{26}, g_{27}, g_{28}, g_{29}, g_{30}, g_{31}, g_{32}, g_{33} g_{34}\}$$

$$E(5) = NS\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = span\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$$

4. Gabungan semua ruang eigen dan selidiki basis R- modul bebas dari setiap ruang eigennya, yaitu $\cup_{\lambda\epsilon\mathcal{R}(B)} E(\lambda)$

5. Basis R- modul bebas dari $\cup_{\lambda\epsilon\mathcal{R}(A)} E(\lambda)$ sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dengan } \det(P) = 1 \in U(R)$$

$P = \{v_1, v_2, v_3\}$ dengan $v_1 = (5,5,4)$, $v_2 = (0,5,2)$ dan $v_3 = (0,0,1)$ merupakan basis R- modul. Selanjutnya akan ditemukan invers matriks P dengan menggunakan metode OBE. Sehinggga diperoleh invers dari matriks P:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dengan } \det(P) = 1 \in U(R)$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

6. Diperoleh matriks diagonal D sedemikian sehingga $P^{-1}BP = D$, sebagai berikut: $P^{-1}BP = diag(1,2,4) = D_1$. Dari $\bigcup_{\lambda \epsilon \mathcal{R}(z)} E(\lambda)$ dapat ditemukan vektor-vektor lainnya yang bebas linier yang dapat memuat basis R- modul bebas. Berikut salah satu basis R- modul bebas lainnya:
$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, dengan $\det(P) = 5 \in U(R)$, Sehinggga diperoleh invers dari matriks Q:
$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, dengan $\det(P) = 1 \in U(R)$,maka:$Q^{-1}AQ = diag(5,4,2) = D_2$
Sehingga diperoleh matriks D_1 dan D_2 yang similar terhadap matriks A, kemudian juga $D_1 \approx D_2$ dengan $D_1 = diag(1,2,4)$ dan $D_2 = diag(5,4,2)$. Matriks A similar terhadap matriks D_2 yang mempunyai akar-akar karakteristik yang sama dimana $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(D_1) = \mathcal{R}(D_2)$.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di atas maka kesimpulan yang didapat yaitu:

1. Suatu matriks segitiga A dengan entri-entri diagonal utama dari matriks $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn})$, jika $A \approx D$ dengan entri-entri diagonal utama matriks D $(d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n)$ maka dapat ditunjukkan bahwa setiap entri-entri diagonal utama dari matriks A saling ekuivalen dengan entri-entri diagonal utama matriks D jika memenuhi $x = uy$ untuk beberapa $u \in U(R)$ namun $\det(A)$ tidak selalu sama dengan $\det(D)$. Seperti pada Contoh 6 dimana matriks A mempunyai diagonal utama $(1,2,4)$ dan diagonal utama matriks D_2 $(5,4,2)$ maka $1 \sim 5(mod\ 6)$, $2 \sim 4\ (mod\ 6)$ dan $4 \sim 2\ (mod\ 6)$, namun $\det A \neq \det D_2$ dengan $(1 \times 2 \times 4)\ mod\ 6 \neq (5 \times\ 4 \times 2)\ mod\ 6$.
2. Jika $A \approx D$ maka matriks A dan matriks D saling mempunyai akar-akar karakteristik yang sama. Seperti pada Contoh 5 dimana $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(D_1) = \mathcal{R}(D_2) = \{1,2,3\}$ dan pada Contoh 6 dimana $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(D_1) = \mathcal{R}(D_2) = \{1,2,4,5\}$.

Ucapan Terimakasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada kolega yang telah memberikan masukan dalam peningkatan kualitas makalah ini.

Daftar Pustaka

[1] Anton, Howard. Dasar-Dasar Aljabar Linear. Jilid Satu. Jakarta : Penerbit Binarupa Aksara Publisher. 2002.
[2] Brown, C. William.Matrices Over Commutative Rings. New York: Marcel Dekker, Inc.1993.
[3] Connell, E. H. Elemen of Abstract and Linier Algebra. Department of Mathematics University of Miami. 1991.
[4] Gilbert, Jimmie. Element of Modern Algebra. Boston: Kent Publishing Company. Boston. 1992.
[5] Hardy, Kenneth. Linier Algebra For Engineers and Scientists Using Matlab. From A Mathematician's Apology. 1877-1947.
[6] Kinanti, Fidiah, dkk. Diagonalisasi Matriks Atas Ring Komutatif dengan Elemen Satuan. *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster).*2013; 02(3):183-189.
[7] Mas' Oed. Fadli. Struktur Aljabar. Jakarta : Penerbit Akademia Permata. 2013.
[8] Persulessy, E. R. Karakteristik Elemen-Elemen Diagonal Utama Pada Matriks Atas DIU Yang Terdiagonalisasi. Prosiding, Seminar Nasional Basic Sains VI. 2014