Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 9 *ISSN (Printed) : 2579-7271*
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau *ISSN (Online) : 2579-5406*
Pekanbaru, 18-19 Mei 2017

Modifikasi Metode Bahgat tanpa Turunan Kedua dengan Orde Konvergensi Optimal

Wartono*, Trio Nanda
Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. H. R. Soebrantas No. 155 Km. 18 Simpang Baru, Pekanbaru 28293.
e-mail: *wartono@uin-suska.ac.id

Abstrak

Metode Bahgat merupakan salah satu metode iterasi untuk menyelesaikan persamaan nonlinear dengan orde konvergensi tiga yang menggunakan tiga evaluasi fungsi. Pada makalah ini, penulis mengembangkan metode Bahgat menggunakan ekspansi deret Taylor orde dua dan menghilangkan turunan keduanya menggunakan aproksimasi penjumlahan dua bentuk eksplisit $f''(x_n)$. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bahwa metode iterasi baru memiliki orde onvergensi empat untuk $a = 0$ yang melibatkan tiga evaluasi fungsi pada setiap iterasinya. Simulasi numerik diberikan dengan menggunakan beberapa fungsi untuk menunjukkan performa metode baru.

***Kata kunci**: Metode Bahgat, ekspansi deret Taylor, persamaan nonlinear, orde konvergensi.*

Abstract

Bahgat method is one of an iteration method to solve a nonlinear equation with third order of convergence that using three evaluation of functions. In this paper, the author developed Bahgat method by using second Taylor series expansion and reduced its second derivative by using approximation of sum of two explicit forms $f''(x_n)$. Based on the results that is obtained a new iteration method with fourth order of convergence for $a = 0$ that involve three evaluation of functions at each iteration. Numerical simulation was given by using several functions to demonstrate the performance of the new method.

***Keywords**: Bahgat method, Taylor series expansion, nonlinear equation, order of convergence.*

1. Pendahuluan

Permasalahan yang sering ditemukan di dalam bidang matematika salah satunya adalah bagaimana menemukan solusi dari persamaan nonlinier dalam bentuk

$$f(x) = 0 \quad \text{...(1)}$$

Metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinier adalah metode numerik yang menghasilkan solusi hampiran yang bersifat iterasi. Metode iterasi yang paling sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan persamaan nonlinier adalah metode Newton dengan bentuk iterasinya

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0, 1, 2, \ \text{.......................................(2)}$$

Persamaan (2) merupakan metode iterasi dengan orde konvergensi kuadratik yang dihasilkan dari pemotongan deret Taylor orde satu. Sedangkan pemotongan deret Taylor orde dua menghasilkan tiga metode iterasi klasik dengan orde konvergensi tiga yang dikenal dengan nama metode Halley [2], metode Chebyshev [7, 8] dan metode Euler (metode Halley irasional) [9, 10]. Metode-metode iterasi tersebut dikontruksi dengan mensubsitusikan bentuk Newton ke ekspansi deret Taylor orde dua.

Selain bentuk Newton, beberapa peneliti juga menggunakan metode iterasi lain yang disubstitusikan ke deret Taylor orde dua seperti yang dilakukan oleh Behl [4]. Pada kajian yang dilakukan, Behl [4] yang menggunakan metode Schroder dengan orde konvergensi kuadratik sebagai metode iterasi yang dikembangkan.

Selanjutnya, Bahgat [1] mengembangkan metode Halley dengan menggunakan ekspnasi deret Taylor orde dua dalam bentuk

$$y_n = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}, \qquad (3)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{(y_n - x_n)^2 f''(x_n)}{2f'(x_n)}, \qquad (4)$$

yang memiliki orde konvergensi tiga dengan tiga evaluasi fungsi, sehingga indeks efisiensinya 31/3 ≈ 1,4422.

Makalah ini membahas pengembangan metode Bahgat dengan menggunakan ekspansi deret Taylor order dua. Penggunaan ekspansi deret Taylor orde dua sebagai salah cara mengkotruksi metode iterasi memberikan konsekuensi munculnya turunan kedua pada metode iterasi tersebut. Untuk menghindari adanya turunan kedua pada metode iterasi, maka perlu dilakukan reduksi terhadap turunan kedua tersebut.

Beberapa peneliti melakukan reduksi terhadap turunan kedua dengan menggunakan berbagai pendekatan. Misalnya Chun [5] yang melakukan reduksi turunan kedua dengan menggunakan pesamaan kubik, Noor dan Khan [6] dan Li dkk [3] melakukan reduksi turunan kedua dengan menggunakan ekspandi deret Taylor orde dua.

Oleh karena itu, pada makalah ini reduksi turunan kedua ditaksir dengan menggunakan penjumlahkan bentuk eksplisit $f''(x_n)$ dari Chun [5] dan Noor dan Khan [6], sehingga diperoleh bentuk taksiran turunan kedua yang baru.

Selanjutnya, untuk menguji performa metode baru dilakukan perbandingan dengan metode iterasi lainnya pada simulasi numerik yang menggunaan beberapa fungsi.

2. Metode Iterasi yang Dikembangkan

Untuk menguraikan modifikasi metode Bahgat, kita mulai dengan mendefinisikan kembali metode Bahgat [1] yang diberikan satu parameter riil dalam bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{2f(x_n)^2 f'(x_n) f''(x_n)}{(2f'(x_n)^2 - \theta f(x_n) f''(x_n))^2}. \qquad (5)$$

Selanjutnya, pertimbangkan kembali ekspansi deret Taylor orde dua terhadap $f(x_n)$ disekitar x_n yang diberikan oleh

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x_{n+1} - x_n)^2 \qquad (6)$$

Misalkan x_{n+1} adalah akar-akar pendekatan pada iterasi ke-(n+1) yang cukup dekat dengan akar persamaan sejati α, maka $f(x_{n+1}) \approx \alpha$, sehingga Persamaan (6) menjadi

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x_{n+1} - x_n)^2 = 0 \qquad (7)$$

Persamaan (7) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2}\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (8)$$

Oleh karena itu, dengan mensubstitusikan Persamaan (5) ke ruas kanan Persamaan (8) seperti yang dilakukan Behl dan Kanwar [4], maka diperoleh

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$x_{n+1}-x_n=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left(1+\frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}\left(1+\frac{2f(x_n)f'(x_n)^2f''(x_n)}{(2f'(x_n)^2-\theta f(x_n)f''(x_n))^2}\right)^2\right)\text{............(9)}$$

atau

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left(1+\frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}\left(1+\frac{2f(x_n)f'(x_n)^2f''(x_n)}{(2f'(x_n)^2-\theta f(x_n)f''(x_n))^2}\right)^2\right)\text{.............(10)}$$

Selanjutnya, untuk menghindari adanya turunan kedua pada Persamaan (10), maka turunan kedua diaproksimasi dengan menjumlahkan dua bentuk eksplisit $f''(x_n)$ pada Chun [5] dan Noor dan Khan [6] yang masing-masing diberikan oleh

$$f''(x_n)\approx\frac{2(1+af'(x_n)^2)f(y_n)f'(x_n)^2}{f(x_n)^2+af'(x_n)^2(f(y_n)-f(x_n))^2}\text{ ....(11)}$$

dan

$$f''(x_n)\approx\frac{2f(y_n)f'(x_n)^2}{f(x_n)^2}.\text{..(12)}$$

Penjumlahkan Persamaan (11) dengan Persamaan (12), memberikan sebuah pendekatan baru terhadap $f''(x_n)$ yang diberikan oleh

$$f''(x_n)\approx\frac{f'(x_n)^2f(y_n)\left[2f(x_n)^2+af'(x_n)^2(f(y_n)^2-2f(y_n)f(x_n)+2f(x_n)^2)\right]}{f(x_n)^2(f(x_n)^2+af'(x_n)^2(f(y_n)-f(x_n))^2)}:A_n\text{ ,......(13)}$$

dengan

$$y_n=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\text{ ....(14)}$$

Selanjutnya Persamaan (13) disubstitusikan ke Persamaan (10), diperoleh

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\left(1+\frac{f(x_n)A_n}{2f'(x_n)^2}\left(1+\frac{2f(x_n)f'(x_n)^2A_n}{(2f'(x_n)^2-\theta f(x_n)A_n)^2}\right)^2\right),\text{....................(15)}$$

dengan $\theta\in\mathbb{R}$ dan y_n ditunjukkan pada Persamaan (14) yang melibatkan tiga evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan $f(y_n)$.

3. Analisis Konvergensi

Selanjutnya, akan ditentukan orde konvergensi dari metode iterasi yang telah dimodifikasi pada Persamaan (15).

Teorema 3.1. Misalkan $\alpha\in I$ adalah akar dari fungsi $f:I\to\mathbb{R}$ untuk suatu interval I terbuka. Selanjutnya asumsikan bahwa α adalah akar sederhana dari $f(x)=0$. Jika x_0 adalah tebakan awal yang cukup dekat ke α, maka metode iterasi pada Persamaan (14) - (15) memilki orde konvergensi empat untuk $a=0$ dan $\theta\in\mathbb{R}$ yang memenuhi persamaan galat:

$$e_{n+1}=(-c_2c_3+4c_2^3-4\theta c_2^3)e_n^4+O(e_n^5).\text{................................(16)}$$

dengan

$$e_n=x_n-\alpha\quad\text{dan}\quad c_j=\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!\,f'(\alpha)}$$

Bukti : Misalkan $\alpha \in I$ dimana α adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$. Ekspansi Taylor dari $f(x_n)$ disekitar α, maka diperoleh :

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x_n - \alpha)^3 + \cdots \quad \text{........(17)}$$

Oleh karena $e_n = x_n - \alpha$, $f(\alpha) = 0$, maka persamaan (17) dapat ditulis kembali menjadi

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left[e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!f'(\alpha)}e_n^3 + \cdots\right] \quad \text{.........................(18)}$$

atau

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + c_5e_n^5 + c_6e_n^6 + c_7e_n^7 + O(e_n^8)). \quad \text{...............(19)}$$

dengan $c_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$.

Selanjutnya, $f'(x_n)$ ditentukan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor terhadap $f'(x_n)$ disekitar α, diperoleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + 5c_5e_n^4 + 6c_6e_n^5 + 7c_7e_n^6 + O(e_n^7)). \quad \text{.......(20)}$$

dan dengan menggunakan Persamaan (19) dan (20) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + \cdots + O(e_n^8). \quad \text{...................................(21)}$$

Substitusikan Persamaan (20) ke (14) dan dengan menggunakan $x_n = e_n + \alpha$, maka persamaan (14) menjadi

$$y_n = \alpha + c_2e_n^2 + (-2c_2^2 + 2c_3)e_n^3 + \cdots + O(e_n^8)). \quad \text{..............................(22)}$$

Selanjutnya, ekspansi $f(y_n)$ dengan menggunakan ekspansi deret Taylor di sekitar α yang diberikan oleh

$$f(y_n) = f'(\alpha)(c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + (3c_4 + 5c_2^3 - 7c_2c_3)e_n^4 + \cdots + O(e_n^8)). \quad \text{........(23)}$$

Berdasarkan Persamaan (19), (20) dan (23), diperoleh

$$A_n = 2c_2 + \left(\frac{2(ac_2^2 + 2c_3 + 2ac_3)}{a+1}\right)e_n + \cdots + O(e_n^8) \quad \text{..............................(24)}$$

Perkalian (18) dan (24) memberikan

$$f(x_n)A_n = f'(\alpha)(2c_2e_n + \left(\frac{2(2ac_2^2 + 2c_3 + 2ac_3 + c_2^2)}{a+1}\right)e_n^2 + \cdots + O(e_n^8)). \quad \text{...............(25)}$$

sehingga

$$\frac{f(x_n)A_n}{2f'(x_n)^2} = c_2e_n - \left(\frac{2ac_2^2 + 3c_2^2 - 2ac_3 - 2c_3}{a+1}\right)e_n^2 + \cdots + O(e_n^8). \quad \text{........................(26)}$$

Selanjutnya, dari Persamaan (20), (21) dan (24), diperoleh

$$\frac{2f(x_n)f'(x_n)^2A_n}{(2f'(x_n)^2 - \theta f(x_n)A_n)^2} = \left(\frac{c_2}{a+1} + \frac{ac_2}{a+1}\right)e_n + \cdots + O(e_n^8). \quad \text{........................(27)}$$

Substitusikan Persamaan (20), (26) dan (27) ke Persamaan (15) diperoleh

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$x_{n+1} = \alpha - \left(\frac{ac_2^2}{a+1}\right)e_n^3 + \cdots + O(e_n^5).\qquad(28)$$

Oleh karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$, Persamaan (28) menjadi

$$e_{n+1} = -\left(\frac{a}{a+1}\right)c_2^2 e_n^3 + \cdots + O(e_n^5).\qquad(29)$$

Berdasarkan Persamaan (29) dapat dilihat bahwa e_n^3 dapat dihilangkan dengan menyelesaikan bentuk $(a/(a+1)) = 0$ dengan $a \neq -1$ untuk mendapatkan orde konvergensinya yang optimal. Oleh karena itu, diperoleh *a* = 0 dan dengan mensubstitusikan kembali *a* = 0 ke Persamaan (29) diperoleh

$$e_{n+1} = (-c_2c_3 + 4c_2^3 - 4\theta c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5),\ \theta \in \mathbb{R}.\qquad(30)$$

4. Simulasi Numerik

Untuk mengukur performa dari metode baru yang diberikan pada persamaan (15) dengan *a* = 0 (MBB), maka dilakukan simulasi numerik dalam bentuk perbandingan jumlah iterasi, COC, dan nilai fungsi pada iterasi ke-n dari metode iterasi baru dengan metode iterasi lainnya, yaitu metode Newton (MN), metode Halley (MH) dan metode Bahgat (MB). Simulasi numerik ini menggunakan perangkat lunak Maple 13.0 dengan 850 digit aritmetika.

Perhitungan komputasi untuk menentukan jumlah iterasi, COC dan nilai fungsi menggunakan kriteria penghentian jika memenuhi $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$ dengan $\varepsilon = 10^{-95}$.

Fungsi-fungsi yang digunakan pada simulasi numerik ini sebanyak delapan fungsi dan akar-akar α dari fungsi tersebut ditampilkan sebanyak 16 digit aritmetik. Adapun fungsi-fungsi yang digunakan adalah sebagai berikut :

$f_1(x) = xe^{-x} - 0{,}1$, $\alpha \approx$ 0,1118325591589629

$f_2(x) = e^x - 4x^2$, $\alpha \approx$ 4,3065847282296993

$f_3(x) = \cos(x) - x$, $\alpha \approx$ 7390851332151606

$f_4(x) = (x-1)^3 - 1$, α = 2,0000000000000000

$f_5(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, $\alpha \approx$ 1,3652300134140969

$f_6(x) = e^{-x^2+x+2} - \cos(x+1) + x^3 + 1$, $\alpha \approx$ 1,0000000000000000

$f_7(x) = \sqrt{x} - x$, α = 1,0000000000000000

$f_8(x) = \sin^2(x) - x^2 + 1$, $\alpha \approx$ 1,4044916482153412.

Jumlah iterasi dan COC (ditampilkan dalam kurung) pada setiap metode iterasi yang dibandingkan diberikan pada Tabel 1. Sedangkan perhitungan COC pada Tabel 1 menggunakan formulasi sebagai berikut:

$$\rho \approx \frac{\ln|(x_{n+1} - \alpha)/(x_n - \alpha)|}{\ln|(x_n - \alpha)/(x_{n-1} - \alpha)|},\qquad(31)$$

Tabel 1 Perbandingan Jumlah Iterasi dan *COC* untuk $\boldsymbol{\varepsilon = 10^{-95}}$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$f(x)$	x_0	Jumlah iterasi dan COC dari			
		MN	MH	MB	MMB
$f_1(x)$	-0,2	8 (1,9999)	5 (2,9999)	5 (3,0000)	4 (4,0000)
	0,3	8 (1,9999)	5 (3,0000)	5 (2,9999)	4 (4,0000)
$f_2(x)$	4,0	8 (1,9999)	5 (3,0000)	5 (2,9999)	4 (4,0000)
	4,5	7 (1,9999)	5 (2,9999)	5 (3,0000)	4 (4,0000)
$f_3(x)$	-0.1	8 (1,9999)	5 (3,0000)	5 (3,0000)	4 (4,0000)
	1.5	7 (1,9999)	5 (2,9999)	5 (3,0000)	4 (4,0000)
$f_4(x)$	1,8	8 (1,9999)	5 (3,0000)	5 (2,9999)	4 (4,0000)
	3,0	9 (1,9999)	6 (2,9999)	5 (2,9999)	5 (4,0000)
$f_5(x)$	1,0	8 (1,9999)	5 (3,0000)	5 (2,9999)	4 (4,0000)
	2,0	8 (1,9999)	5 (2,9999)	5 (2,9999)	4 (4,0000)
$f_6(x)$	-1,5	7 (2,0000)	5 (2,9999)	5 (2,9999)	4 (3,9999)
	0,0	7 (2,0000)	6 (3,0000)	6 (3,0000)	4 (3,9999)
$f_7(x)$	0,5	8 (1,9999)	5 (3,0000)	5 (2,9999)	4 (3,9999)
	1,5	7 (1,9999)	5 (2,9999)	5 (2,9999)	4 (3,9999)
$f_8(x)$	1,2	8 (1,9999)	5 (3,0000)	5 (2,9999)	4 (4,0000)
	2,0	8 (1,9999)	5 (2,9999)	5 (2,9999)	4 (4,0000)

Tabel 1 menunjukkan bahwa jumlah iterasi MMB secara umum lebih sedikit dibandingkan yaitu metode Newton, metode Halley dan metode Bahgat. Selain itu, Tabel 1 juga menjelaskan bahwa orde konvergensi secara komputasi dari metode baru untuk $a = 0$ adalah empat.

Selanjutnya Tabel 2 menampilkan nilai $|f(x_{n+1})|$ pada setiap metode iterasi berdasarkan banyaknya evaluasi fungsi yang digunakan atau *Total Number of Functional Evaluation* (TNFE). Pada simulasi numerik ini, evaluasi fungsi ditentukan sebesar 12 (TNFE = 12).

Tabel 2 Perbandingan $|\boldsymbol{f(x_{n+1})}|$ untuk beberapa fungsi dengan TNFE = 12

$f(x)$	x_0	MN	MH	MB	MMB
$f_1(x)$	-0,2	3,0851e-36	2,7758e-55	7,1423e-66	3,7141e-197
	0,3	1,0736e-42	3,5153e-66	6,2351e-63	2,3202e-164
$f_2(x)$	4,0	5,0254e-33	2,1103e-53	1,0712e-50	1,3358e-122
	4,5	3,1920e-52	5,2464e-76	5,0193e-84	4,9783e-302
$f_3(x)$	-0,1	1,9402e-37	4,0013e-38	2,3650e-44	2,0023e-116
	1,5	3,7607e-64	1,1497e-51	1,4725e-54	1,7901e-208
$f_4(x)$	1,8	2,8661e-41	1,7287e-60	9,3107e-64	7,9399e-163
	3,0	4,6450e-16	6,3910e-24	2,1645e-38	2,3040e-91
$f_5(x)$	1.0	3,9824e-43	2,2350e-60	3,0101e-69	1,4505e-179
	2,0	1,2362e-37	4,6600e-52	6,7844e-86	1,5142e-192
$f_6(x)$	-1,5	5,7389e-66	1,5262e-43	5,9110e-38	1,8092e-163
	0,0	1,9261e-65	6,3918e-26	2,3472e-23	3,9297e-153
$f_7(x)$	0,5	1,5493e-43	2,9667e-34	1,5386e-53	2,7646e-149
	1,5	1,0650e-66	2,2128e-66	7,2471e-71	6,6058e-236
$f_8(x)$	1,2	2,0864e-47	1,5528e-64	2,7355e-78	2,5610e-202
	2,0	2,2623e-32	8,6200e-39	7,7175e-56	1,7307e-151

Berdasarkan Tabel 2, nilai $|f(x_{n+1})|$ dapat dilihat bahwa nilai fungsi pada iterasi ke-(n+1) dari metode MMB secara umum adalah paling rendah. Hal ini memberikan informasi bahwa metode MMB mempunyai performa yang lebih baik dibandingkan dengan metode lainnya.

5. Kesimpulan

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Modifikasi metode Bahgat dengan menggunakan ekspansi deret Taylor orde dua tanpa turunan kedua memiliki orde konvergensi tiga untuk $a \neq 0$ dan empat untuk $a = 0$. Pada simulasi numerik, berdasarkan Tabel 1 menunjukkan bahwa secara umum, metode baru menggunakan iterasi paling sedikit dibandingkan dengan metode iterasi lainnya. Selain itu, Tabel 1 juga memberikan informasi bahwa orde konvergensi metode baru yang dihitung secara komputasi adalah tiga untuk $a \neq 0$ dan empat untuk $a = 0$. Hal ini sesuai dengan orde konvergensi yang dihitung secara analisis dengan menggunakan ekspansi deret Taylor. Sedangkan Tabel 2 menujukkan bahwa nilai fungsi dari metode iterasi yang diberikan pada Persamaan (14) - (15) paling rendah dibandingan dengan metode iterasi lainnya. Hal ini menunjukkan bahwa metode iterasi baru memiliki performa yang lebih baik dibandingkan dengan metode iterasi lainnya

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak atas masukan, saran dan kritik dalam rangka peningkatan kualitas makalah ini.

Daftar Pustaka

[1] Bahgat MSM. New Two-step Iterative Methods for Solving Nonlinier Equations. *Journal of Mathematics Research*. 2012; 4 (3): 128 – 131..

[2] Halley E. A New Exact and Easy Method for Finding the Roots on Any Quations Generally without any Previous Reduction. *Philos. Trans. Roy. Soc. London.* 1694; 18. 136-148, English translation: Philos. Trans. Roy. Soc. London (abridged) 3 (1809) 640-649.

[3] Li Y, Zhang P, and Li Y, Some New Variants of Chebyshev-Halley Methods Free From Second Derivative, *International Journal of Nonlinear Science*. 2010; 9(2): 201 – 206..

[4] Behl R, Kanwar V. Variants of Chebyshev's Method with Optimal Order of Convergence. *Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Science*. 2013; 2 (1): 39 – 53.

[5] Chun C. Some Second-derivative-free Variants of Chebyshev-Halley Methods. *Applied Mathematics and Computation*. 2007; 191: 410 – 414.

[6] Noor MA, Khan WA. Fourth-Order Iterative Method Free from Second Derivative for Solving Nonlinear Equation. *Applied Mathematical Sciences*. 2012; 6 (93): 4617 – 4625.

[7] Amat S, et. al. On the Global Convergence of Chebyshev's Iterative Method. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2008; 220: 17 – 21.

[8] Traub JF. Iterative Method for the Solution of Equation, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1964.

[9] Amat S, Busquier S, Gutierrez JM. Geometric Constructions of Iterative Function s to Solve Nonlinear Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2003; 157: 197 – 205.

[10] Melman A. Geometry and Convergence of Euler's and Halley's Methods. *SIAM Review*. 1997; 39(4): 726 – 735.