ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Penyelesaian Persamaan Nonlinear Menggunakan Metode Iterasi Tiga Langkah

M. N. Muhaijir[1], S. A. Djumadila[2]
[1,2]Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Seobrantas No. 155 Pekanbaru, 28293
e-mail: *nizam_ys86@yahoo.com*

Abstrak

Penelitian ini membahas tentang metode iterasi baru untuk mencari akar-akar persamaan nonlinear dengan variabel tunggal yang merupakan kombinasi metode doubel-Newton dengan metode Kou et al. menjadi metode iterasi tiga langkah. Berdasarkan hasil penelitian ditunjukkan bahwa metode iterasi baru yang diperoleh mempunyai orde konvergensi delapan dengan tiga evaluasi fungsi dan dua evaluasi turunan pertama pada setiap iterasi, sehingga indeks efisiensinya adalah 1,5157. Komputasi numerik untuk beberapa contoh yang digunakan menunjukkan metode iterasi baru lebih efektif jika dibandingkan dengan metode lain yang didiskusikan.

Kata kunci: *Indeks efisiensi, metode doubel-Newton, metode Newton, orde konvergensi, persamaan nonlinear.*

Abstract

This study discusses the new iteration method to find the roots of nonlinear equations with a single variable that is a combination of double-Newton method with the Kou et al. method to a three-step iteration method. Based on the results of the study indicated that the new iteration method obtained has order of convergence of eight with three evaluation functions and the first two derivatives evaluation at each iteration, so the efficiency index was 1.5157. Numerical computation for some of the examples used show the new iteration method is more effective than the other methods discussed.

Keywords*: Efficiency index, double-Newton method, Newton's method, the order of convergence, nonlinear equations.*

1. Pendahuluan

Salah satu masalah praktis yang paling sering muncul di banyak bidang studi seperti matematika, fisika, biologi, kimia, ekonomi, semua tahapan teknik, riset operasi, dan sain sosial adalah menyelesaikan suatu persamaan. Jika persamaan tersebut dalam bentuk linear, maka metode metode analitik dapat digunakan untuk menyelesaikannya. Akan tetapi, jika persamaan tersebut dalam bentuk nonlinear, maka tidak semua metode analitik dapat menyelesaikannya. Untuk itu, metode numerik diperlukan untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Permsalahan sering muncul dalam metode numerik adalah menentukan akar dari suatu persamaan nonlinear dalam bentuk

$$f(x)=0. \quad \text{.....(1)}$$

Metode yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan (1) adalah metode iterasi yang menghasilkan penyelesaian berupa nilai hampiran. Metode iterasi yang sangat populer dan sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan (1) adalah metode Newton dengan bentuk

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,2,\ldots \text{ dan } f'(x)\neq 0, \quad \text{.....(2)}$$

dengan orde konvergensi dua [6, 8]. Pada perkembangannya metode Newton telah banyak mengalami modifikasi dengan tujuan untuk meningkatkan orde konvergensi dan indeks efisiensi. Modifikasi metode Newton dengan orde konvergensi tiga dapat di lihat pada [3, 7, 8, 10, 12, 16, 18], dan modifikasi metode Newton dengan orde konvergensi empat dapat di lihat pada [4, 5, 17].

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Kung dan Traub [14] mengembangkan metode Newton menjadi metode iterasi dua langkah dengan bentuk

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$
$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \quad \ldots\ldots(3)$$

yang dikenal dengan metode doubel-Newton dan memiliki orde konvergensi empat dengan empat evaluasi fungsi pada setiap iterasi. Kou *et al*. [13] mengembangkan sebuah metode iterasi baru yang mengkombinasikan metode Potra-Ptak dan Newton-Steffensen dengan bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \theta \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)} - (1-\theta) \frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)(f(x_n) - f(y_n))}, \quad \ldots\ldots(4)$$

dengan orde konvergensi empat [13].

Pada artikel ini dibahas kombinasi metode iterasi pada persaman (3) dan persamaan (4) menjadi metode iterasi tiga langkah, yang kemudian dilanjutkan dengan analisa konvergensi metode tersebut, Selanjutnya, metode yang diperoleh dilakukan uji komputasi untuk melihat keunggulan metode dengan beberapa metode yang dibandingkan.

2. Metodologi dan Bahan Penelitian

Metodologi yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dengan mengumpulkan data dan informasi terhadap materi-materi yang berkaitan dengan penelitian yang bersumber dari beberapa buku dan artikel. Selanjutnya, bagian ini juuga memuat beberapa definisi dan teorema dasar yang dapat digunakan sebagai landasan matematis untuk uraian-uraian pada bagian selanjutnya yang disajikan berikut ini.

Definisi 2.1 (Akar Persamaan**)** [11] Misalkan $f(x)$ adalah suatu fungsi kontinu. Setiap bilangan α pada domain f yang memenuhi $f(\alpha) = 0$ disebut pembuat nol fungsi $f(x)$, atau juga disebut akar persamaan $f(x) = 0$.

Teorema 2.2 (Teorema Taylor) [2] Misalkan $n \in N$, dengan N bilangan bulat positif. Misalkan suatu interval $I = [a, b]$ dan sedemikian hingga f dan $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ kontinu pada I dan $f^{(n+1)}$ ada pada (a, b). Jika $x_0 \in I$ maka untuk sebarang $x \in I$ terdapat suatu titik c diantara x dan x_0 sehingga

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Definisi 2.3 (Orde Konvergensi) [1] Sebuah barisan iterasi $\{x_n | n \geq 0\}$ dikatakan konvergen dengan orde $p \geq 1$ ke α jika

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c|\alpha - x_n|^p, \quad n \geq 0,$$

untuk suatu kosntanta $c > 0$. Jika $p = 1$, maka barisan disebut konvergen linear ke α.

Definisi 2.4 (*COC*) [18] Misalkan α adalah akar persamaan nonlinear $f(x)$, dan andaikan x_{n-1}, x_n, x_{n+1} adalah tiga iterasi berturut-turut yang cukup dekat ke akar α. Maka *computational order of convergence* (*COC*) dapat diaproksimasi menggunakan rumus

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$COC \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_n-\alpha)/(x_{n-1})-\alpha\right|}.$$

Definisi 2.5 (Indeks Efisiensi) [9] Misalkan *q* adalah banyak evaluasi fungsi yang dibutuhkan oleh suatu metode iterasi. Efisiensi dari metode tersebut dihitung dengan indeks efisiensi yang didefinisikan sebagai $p^{1/q}$, dengan *p* adalah orde konvergensi dari metode tersebut.

3. Hasil dan Pembahasan

Untuk meningkatkan orde konvergensi metode iterasi pada persamaan (3) dan persamaan (4) yang memiliki orde konvergensi empat. Metode tersebut dikombinasikan menjadi metode iterasi tiga langkah dalam bentuk berikut

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \text{...(5)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \quad \text{...(6)}$$

$$x_{n+1} = y_n - \theta\frac{f(y_n)+f(z_n)}{f'(y_n)} - (1-\theta)\frac{f(y_n)^2}{f'(y_n)(f(y_n)-f(z_n))}. \quad \text{...........(7)}$$

Berikut ini akan ditunjukkan orde konvergensi metode iterasi (5) – (7) sebagaimana disajikan pada Teorema 3.1.

Teorema 3.1 (Kekonvergenan Metode Iterasi) Misalkan $f: D \to R$ fungsi yang mempunyai turunan pada interval *D*. Selanjutnya asumsikan bahwa *α* adalah akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$. Misalkan diberikan tebakan awal x_0 cukup dekat ke *α*, maka metode iterasi (5) – (7) mempunyai orde konvergensi dalapan untuk θ = –1 dan memenuhi persamaan *error*:

$$e_{n+1} = (3c_2^7 - c_3c_2^5)e_n^8 + O(e_n^9),$$

dengan $c_k = \dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k!\,f'(\alpha)}$, $k \geq 1$ dan $e_n = x_n - \alpha$.

Bukti. Misalkan *α* akar sederhana dari persamaan $f(x) = 0$, maka $f(\alpha) = 0$. Ekspansi Taylor untuk $f(x_n)$ di sekitar $x_n = \alpha$ dan dengan mengabaikan suku yang memuat $(x_n - \alpha)^k$, dengan $k \geq 9$ diperoleh

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n-\alpha) + \frac{1}{2}f''(\alpha)(x_n-\alpha)^2 + \cdots + O((x_n-\alpha)^9). \quad \text{.......(8)}$$

Oleh karena $c_k = \dfrac{f^{(k)}(\alpha)}{k!\,f'(\alpha)}$ dengan $k = 2, 3, \ldots, 8$ dan $e_n = x_n - \alpha$, sehingga setelah penyederhanaan persamaan (8) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + \cdots + O(e_n^9). \quad \text{.......................(9)}$$

Dengan cara yang sama, $f'(x_n)$ dapat diperoleh dengan menggunakan ekspansi deret Taylor di sekitar $x_n = \alpha$ dan diperoleh

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + \cdots + O(e_n^8). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

Berdasarkan persamaan (9) dan (10) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + 2(c_2{}^2 - c_3)e_n^3 + (7c_2c_3 - 4c_2^2 - 3c_4)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9). \ldots\ldots\ldots(11)$$

Persamaan (11) disubstitusikan ke persamaan (5) diperoleh

$$y_n = \alpha + c_2e_n^2 - 2(c_2{}^2 - c_3)e_n^3 - (7c_2c_3 - 4c_2{}^3 - 3c_4)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9). \ldots\ldots\ldots(12)$$

Kemudian, gunakan ekspansi deret Taylor untuk memperoleh $f(y_n)$ di sekitar $y_n = \alpha$ sehingga

$$f(y_n) = f'(\alpha)(c_2e_n^2 + 2(c_3 + c_2^2)e_n^3 + (5c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9). \ldots\ldots(13)$$

Untuk memperoleh $f'(y_n)$ ekspansi kembali menggunakan deret Taylor di sekitar $y_n = \alpha$ sehingga diperoleh

$$f'(y_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2^2e_n^2 + 4(c_2c_3 - c_2^3)e_n^3 + (6c_2c_4 - 11c_2^2c_3 + 8c_2^4)e_n^4 + \cdots + O(e_n^8). ..(14)$$

Berdasarkan persamaan (13) dan (14) diperoleh

$$\frac{f(y_n)}{f'(y_n)} = c_2e_n^2 + 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + (3c_2^3 - 7c_2c_3 + 3c_4)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9). \ldots\ldots\ldots\ldots..(15)$$

Persamaan (15) disubstitusikan ke persamaan (6) diperoleh

$$z_n = \alpha + c_2^3e_n^4 + (4c_3c_2^2 - 4c_2^4)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9). \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(16)$$

Untuk mendapatkan $f(z_n)$ digunakan ekspansi deret Taylor di sekitar $x = z_n$ sehingga diperoleh

$$f(z_n) = c_2^3e_n^4 + (4c_3c_2^2 - 4c_2^4)e_n^5 + \cdots + O(e_n^9). \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

Berdasarkan persamaan (13), (14), dan (17) secara berturut-turut diperoleh

$$\frac{f(y_n) + f(z_n)}{f'(y_n)} = c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + (3c_4 - 7c_2c_3 + 4c_2^3)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9). \ldots\ldots..(18)$$

dan

$$\frac{f(y_n)^2}{f'(y_n)(f(y_n) - f(z_n))} = c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + (3c_4 - 7c_2c_3 + 4c_2^3)e_n^4 + \cdots + O(e_n^9). \ldots(19)$$

Persamaan (18) dan (19) disubstitusikan ke persamaan (7) diperoleh

$$x_{n+1} = \alpha + (c_2^5 + \theta c_2^5)e_n^6 + (6c_3c_2^4 + 6\theta c_3c_2^4 - 6c_2^6 - 6\theta c_2^6)e_n^7 + \cdots + O(e_n^9). \ldots\ldots\ldots.(20)$$

Jika nilai θ = –1 , maka persamaan (20) menjadi

$$x_{n+1} = \alpha + (3c_2^7 - c_3c_2^5)e_n^8 + O(e_n^9). \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

Oleh karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$, persamaan (35) menjadi

$$e_{n+1} = (3c_2^7 - c_3c_2^5)e_n^8 + O(e_n^9).$$

4. Simulasi Numerik

Pada bagian ini dilakukan simulasi numerik untuk membandingkan beberapa metode iterasi seperti metode newton (mn) persamaan (2), metode doubel-newton (mdb) persamaan (3), metode kou *et al.* (mky) persamaan (4), metode chebyshev-lagrange mcl [15], dan metode yang didiskusikan (mna) dalam menemukan akar dari persamaan nonlinear. Untuk melakukan perbandingan ini, ada beberapa persamaan nonlinear yang digunakan. Komputasi dilakukan dengan menggunakan bantuan software maple 13 dengan ketelitian sampai 800

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

digit. Adapun kriteria pemberhentian program komputasi adalah jika $|f(x_{n+1})| \leq Tol$, $|x_k - x_{k-1}| \leq Tol$, dan jumlah iterasi mencapai maksimum iterasi. Tol yang digunakan adalah sebesar 10^{-100}.

Selanjutnya, hasil simulasi numerik untuk jumlah iterasi yang diperoleh untuk beberapa metode yang dibandingkan dapat di lihat pada tabel 1 – 4.

Tabel 1: Perbandingan Jumlah Iterasi untuk Fungsi f_1

Fungsi	x_0	Jumlah Iterasi					α
		MN	MDN	MKY	MCL	MNA	
$f_1(x) = (x-1)^3 - 1$	0,0	12	6	6	6	7	2,0000000000000000
	1,6	9	5	6	3	3	
	2,4	8	4	4	3	3	
	4,0	10	5	6	4	3	

Tabel 2: Perbandingan Jumlah Iterasi untuk Fungsi f_2

Fungsi	x_0	Jumlah Iterasi					α
		MN	MDN	MKY	MCL	MNA	
$f_2(x) = e^{-x} + \cos x$	1,0	7	4	4	3	3	1,7461395304080124
	1,5	7	4	4	3	3	
	2,0	7	4	4	3	3	
	2,5	8	4	5	3	3	

Tabel 3: Perbandingan Jumlah Iterasi untuk Fungsi f_3

Fungsi	x_0	Jumlah Iterasi					α
		MN	MDN	MKY	MCL	MNA	
$f_2(x) = e^x + x^2 + 3x$	-1,5	15	8	*	6	6	-0,278181447374428
	-0,5	7	4	4	3	3	
	0,0	7	4	4	3	3	
	0,5	8	4	4	3	3	

Tabel 4: Perbandingan Jumlah Iterasi untuk Fungsi f_4

Fungsi	x_0	Jumlah Iterasi					α
		MN	MDN	MKY	MCL	MNA	
$f_2(x) = e^x + x^2 + 3x$	-1,0	9	5	5	3	3	-0,442854401002388
	-0,8	8	4	4	3	3	
	0,8	9	5	5	3	4	
	1,0	10	5	5	4	4	

Berdasarkan Tabel 1 – 4 dapat dilihat bahwa secara keseluruhan jumlah iterasi yang dihasilkan oleh MNA lebih sedikit jika dibandingkan dengan MN, MDN, dan MKY dan mempunyai jumlah iterasi yang sama dengan MCL karena orde konvergensinya sama. Tabel 3 memperlihatkan dengan tanda bintang (*) bahwa untuk nilai $x_0 = -1,5$ MKY tidak dapat menemukan akar yang dinginkan. Jika di lihat dari Tabel 1 – 4 untuk beberapa fungsi dan variasi nilai awal yang digunakan bahwa MNA lebih unggul dari metode tiga metode lainnya, yaitu MN, MDN, dan MKY. Sedangkan jika dibandingkan dengan MCL, maka MNA memiliki jumlah iterasi yang secara keseluruhan sama dengan MCL.

Tabel 5 berikut menunjukkan nilai *COC* dari beberapa metode yang dibandingkan dengan MNA untuk beberapa variasi nilai awal yang diberikan.

Tabel 5: Perbandingan Nilai *COC*

Fungsi	x_0	Nilai *COC*				
		MN	MDB	MKY	MCL	MNA
$f_1(x)$	0,0	2,0000	4,0000	4,0000	8,0000	7,9961
	1,6	2,0000	4,0000	4,0000	7.9995	7,9985
	2,4	2,0000	4,0000	4,0000	8,0000	8,0000
	4,0	2,0000	4,0000	4,0000	8,0000	7,9999
$f_2(x)$	1,0	2,0000	4,0000	4,0000	8,0000	8,0000
	1,5	2,0000	4,0000	4,0000	8,0000	8,0000
	2,0	2,0000	4,0000	4,0000	8,0000	8,0000

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

	2,5	2,0000	4,0000	4,0000	8,0000	8,0000
$f_3(x)$	-1,5	2,0000	4,0000	*	8,0000	8,0000
	-0,5	2,0000	4,0000	4,0000	8,0000	8,0000
	0,0	2,0000	4,0000	4,0000	8,0000	8,0000
	0,5	2,0000	4,0000	4,0000	8,0000	8,0000
$f_4(x)$	-1,0	2,0000	4,0000	4,0000	7,9999	7,9998
	-0,8	2,0000	4,0000	4,0000	8,0000	8,0000
	0,8	2,0000	4,0000	4,0000	8,0012	8,0000
	1,0	2,0000	4,0000	4,0000	8,0000	8,0000

Berdasarkan Tabel 5 dapat di lihat bahwa untuk nilai *COC* metode iterasi baru yang diperoleh (MNA) selalu konvergen menuju delapan, dengan kata lain secara numerik dapat dibuktikan bahwa MNA memiliki orde konvergensi delapan. Sedangkan, untuk metode lain secara numerik dapat dibuktikan bahwa MN memiliki orde konvergensi dua, MDN memiliki orde konvergensi empat, MKY memiliki orde konvergensi empat, dan MCL memiliki orde konvergensi yang sama dengan MNA yaitu delapan.

5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh metode iterasi baru yang merupakan kombinasi dari metode doubel-Newton dan metode Kou *et al*. yang memiliki orde konvergensi delapan dengan lima evaluasi fungsi pada setiap iterasi, sehingga berdasarkan Definisi 2.5 diperoleh indeks efisiensi $8^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}5157$ lebih besar jika bandingkan dengan metode Newton yang memiliki indeks efisiensi $2^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}4142$ dan metode doubel-Newton yang memiliki indeks efisiensi $4^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}4142.$ Simulasi numerik juga menunjukkan bahwa metode iterasi baru memiliki jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan metode lain yang didiskusikan.

Daftar Pustaka

[1] K. E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis, Second Edition*, John Wiley & Son, New York, 1989, Hal. 56.
[2] R. G. Bartle, D. R. Shebert, *Introduction to Real Analysis, Fourth Edition*, Jhon Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, Hal. 184.
[3] C. Chun, A simply constructed third-order modifications of Newton's method, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 219 (2008), 81–89.
[4] C. Chun, Y. M. Ham, Some fourth modifications of Newton's method, *Applied Mathematics and Computation*, 197 (2008), 654–658.
[5] C. Chun, B. Neta, Certain improvement of Newton's method with fourth order convergence, *Applied Mathematics and Computation*, 215 (2009), 821–823.
[6] R. V. Dukkipati, *Numerical Methods*, New Delhi, New Age International (P) Ltd., New Delhi, 2010. Hal. 86.
[7] L. Fang, G. He, Z. Hu, A cubically convergent Newton-type method under weak condition, *Journal Computational and Applied Mathematics*, 220 (2008), 409–412.
[8] M. Frontini, E. Sormani, Some variant of Newton's method with third order convergence,*Applied Mathematics and Computation*, 140 (2003), 419–426.
[9] W. Gautschi, *Numerical Analysis, Second Edition*, Birkhauser, New York, 2012, Hal. 261.
[10] V. Kanwar, A family of third-order multipoint methods for solving nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation*, 176 (2006), 409–413.
[11] A. Kharab dan R. B. Guenther, *An Introduction to Numerical Methods: A MATLAB Approach, Third Edition*, CRC Press, New York, 2012, Hal. 39.
[12] J. Kou, L. Yitian, W. Xiuhua, Third-order modification of Newton's method, *Journal Computational and Applied Mathematics*, 205 (2007), 1–5.
[13] J. Kou, L. Yitian, W. Xiuhua, A composite fourth-order iterative method for solving nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation*, 184 (2007), 471–475.
[14] H. T. Kung, J. F. Traub, Optimal order of one-point and multipoint iteration, *Journal of the Association for Computing*, Vol. 21, No. 4, 1974, 643–651.
[15] M. N. Muhaijir, M. Imran, M. D. H. Gamal, Variants of Chebyshev method with eighth-order convergence for solving nonlinear equations, *Applied and Computational Mathematics*, 5(6), 2016, 247–251.
[16] A. Y. Ozban, Some new variants of Newton's method, *Applied Mathematic Letters* 13 (2004), 87–93.