Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 9 *ISSN (Printed) : 2579-7271*
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau *ISSN (Online) : 2579-5406*
Pekanbaru, 18-19 Mei 2017

Kendali Optimal pada Masalah Persediaan Barang yang Mengalami Peningkatan

Manda Lisa Usvita[1], Nilwan Andiraja[2]
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru
e-mail: usvitalisamanda@yahoo.com, nilwanandiraja@uin-suska.ac.id

Abstrak

Jurnal ini membahas tentang kendali optimal pada masalah persediaan barang yang mengalami peningkatan. Persediaan barang yang mengalami peningkatan disebabkan karena adanya persediaan awal kemudian terjadinya penambahan persediaan sedangkan permintaan barang sedikit. Berdasarkan persamaan diferensial dinamik dan fungsi tujuan yang diberikan dapat ditemukan solusi persamaan diferensial untuk persediaan barang yang mengalami peningkatan. Berdasarkan hasil pembahasan solusi persamaan diferensial untuk persediaan barang yang mengalami peningkatan akan di amati dalam dua kasus. Kemudian, diperoleh persamaan tingkat persediaan yang optimal, persamaan rata-rata produksi yang optimal, dan selisih antara rata-rata fungsi peningkatan dan rata-rata fungsi penurunan. Selanjutnya menganalisa kestabilan persamaan tingkat persediaan yang optimal. Berdasarkan pembahasan diperoleh persamaan tingkat persediaan yang optimal mencapai kestabilan apabila $t \to t_1$, sehingga menuju ke satu nilai (tingkat persediaan maksimal).

Katakunci: *Diferensial, Kendali Optimal, Kestabilan, Peningkatan Barang, Persediaan.*

Abstract

This journal discuss about optimal control of an inventory's problem with ameliorating items. Inventory with ameliorating items due the initial inventory and than the addition of supply while demand a bit. Based on the dynamic differential equations and the objective function of given can be found the solution of differential equations for the inventory with ameliorating items. Based on the results of the solution of differential equations for the inventory with ameliorating items will be observed in two cases. Then, obtained equation optimal inventory levels, equation production rate function, and difference between deteriorating rate function and ameliorating rate function. Furthermore, analyze the stability equation optimal inventory levels. Based on the results obtained equation optimal inventory levels to reach stability if for $t \to t_1$ then lead up to one value (*maksimum inventory levels*).

Keywords: *Ameliorating Items, Control Optimal, Differential , Inventory, Stability.*

1. Pendahuluan

Perusahaan yang melakukan kegiatan usaha pada umumnya memiliki persediaan. Persediaan barang pada perusahaan kadang mengalami penurunan dan peningkatan. Penurunan persediaan dapat menghambat kelancaran proses produksi. Begitu sebaliknya, peningkatan persediaan merupakan pemborosan karena menyebabkan terlalu tingginya biaya pemeliharaan dan penyimpanan barang digudang. Pengendalian persediaan di perlukan untuk dapat mengatur tersedianya suatu persediaan optimal. Pengendalian persedian dapat dilakukan salah satunya dengan menerapkan teori kendali.

Teori kendali adalah sebuah teori yang membahas mengenai proses pengaturan atau pengendalian terhadap satu atau beberapa besaran (variabel atau parameter) sehingga berada pada suatu harga tertentu. Penyelesaian masalah kendali optimal dapat diselesaikan dengan menerapkan prinsip maksimum pontryagin. Prinsip maksimum pontryagin merupakan prinsip penting dalam menyelesaikan masalah kendali optimal karena prinsip ini menyatakan kondisi yang diperlukan agar diperoleh solusi yang optimal.

Lebih memperjelas tentang penerapan teori kendali pada persediaan bisa dilihat dalam jurnal dan artikel penelitian yang berkaitan dengan hal tersebut yaitu penelitian terlebih dahulu oleh Pardi Affandi dkk (2015) adalah "Kendali Optimal dari Sistem *Inventory* dengan Peningkatan dan

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

Penurunan Barang". Kemudian, penelitian lain dengan pembahasan yang sama juga dilakukan oleh Lotfi Tadj dkk (2008) adalah "*Optimal Control of an Inventory System with Ameliorating and Deteriorating Items*". Dalam penelitian-penelitian tersebut dibahas model matematika dari masalah persediaan yang mengalami peningkatan dan penurunan barang serta bagaimana menyelesaikan bentuk model persediaan barang tersebut menggunakan teknik kendali optimal, sehingga diperoleh persamaan tingkat persediaan yang optimal, persamaan rata-rata produksi yang optimal, dan selisih antara rata-rata fungsi peningkatan dan rata-rata fungsi penurunan. Jurnal ini hanya berfokus pada persediaan barang yang mengalami peningkatan. Namun, penelitian ini akan menambah pembahasan hingga menganalisa kestabilan.

2. Metode Penelitian

Jurnal ini membahas tentang persediaan barang yang mengalami peningkatan dan menyelesaikannya dengan menggunakan teknik kendali optimal. Adapun tahapan-tahapan yang akan dilakukan sebagai berikut:

1. Diketahui fungsi diferensial dinamik sebagai berikut:

   $$\dot{I}(t) = P(t) + v(t) \cdot I(t) \qquad t \in [0, t_1]$$

   dan bentuk fungsi tujuan sebagai berikut:

   $$J = \frac{1}{2}\int_0^T \left(h[I(t) - \hat{I}]^2 + K[P(t) - \hat{P}]^2 \right) dt$$

2. Didefinisikan Persamaan Hamilton sebagai berikut:

   $$H = -\frac{1}{2}\left[h(I - \hat{I})^2 + K(P - \hat{P})^2 \right] + \lambda g \qquad \text{dengan } g = P + vI .$$

3. Selanjutnya, didefenisikan Persamaan Lagrange sebagai berikut :

   $$L = -\frac{1}{2}\left[h(I - \hat{I})^2 + K(P - \hat{P})^2 \right] + (\lambda + \mu) g \qquad \text{dengan } g = P + vI .$$

4. Selanjutnya berdasarkan langkah no 2 dan 3 dibentuk kondisi optimal pada persediaan barang yang mengalami peningkatan dengan syarat sebagai berikut :

   $H_P = 0$, $L_I = -\dot{\lambda}$, $L_P = 0$, dan $\mu \geq 0$; $\mu g \geq 0$

5. Dari langkah no 4 akan di peroleh solusi persamaan diferensial untuk persediaan barang yang mengalami peningkatan.
6. Terakhir akan dianalisa kestabilan persamaan diferensial dinamik berdasarkan solusi dari langkah no 5.

3. Hasil dan Analisis

Pada bagian ini di bahas tentang persediaan barang yang mengalami peningkatan dan menyelesaikannya dengan menggunakan teknik kendali optimal. Selanjutnya, akan di analisa kestabilan dari sistem dinamik persediaan barang yang mengalami peningkatan tersebut.

3.1. Kendali Optimal pada Masalah Persediaan Barang yang Mengalami Peningkatan

Definisikan fungsi dinamik persediaan barang yang mengalami peningkatan sebagai berikut:

$$\dot{I}(t) = P(t) + v(t) \cdot I(t) \qquad t \in [0, t_1] \quad \text{......................(1)}$$

dengan $v(t) = m(t) - \theta(t)$. Kemudian, untuk menjamin bahwa tingkat persediaan barang meningkat dari waktu 0 hingga t_1 maka lebih lanjut dipenuhi

$$P(t) + v(t) \cdot I(t) > 0 \qquad t \in [0, t_1] \quad \text{.....................(2)}$$

selanjutnya, diberikan fungsi tujuan persediaan barang yang mengalami peningkatan sebagai berikut:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T \left(h\left[I(t) - \hat{I}\right]^2 + K\left[P(t) - \hat{P}\right]^2 \right) dt \qquad (3)$$

Persamaan (1) hingga Persamaan (3) merupakan batasan nonnegatif,

$$P(t) \geq 0 \qquad t \in \left[0, t_1\right] \qquad (4)$$

Kemudian, pada pembahasan selanjutnya digunakan notasi $\dot{I}(t) = \dot{I}$, $I(t) = I$, $P(t) = P$ dan $v(t) = v$. Persamaan Hamilton didefinisikan sebagai berikut :

$$H = -\frac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + \lambda g \qquad (5)$$

dengan $g = P + vI$ dan Persamaan Lagrange didefinisikan sebagai berikut :

$$L = -\frac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + (\lambda + \mu)g \qquad (6)$$

Syarat kondisi optimal pada persediaan barang yang mengalami peningkatan diberikan sebagai berikut:

$$H_P = 0 \qquad (7)$$

$$L_I = -\dot{\lambda} \qquad (8)$$

$$L_P = 0 \qquad (9)$$

$$\mu \geq 0 \; ; \; \mu g \geq 0 \qquad (10)$$

Berdasarkan Persamaan (7) diperoleh:

$$H_P = -\frac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + \lambda\left(P + vI\right) = 0$$

$$P = \hat{P} + \frac{\lambda}{K} \qquad (11)$$

Berdasarkan Persamaan (8) diperoleh:

$$-\dot{\lambda} = -\frac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + (\lambda + \mu)(P + vI)$$

$$\dot{\lambda} = h\left(I - \hat{I}\right) - (\lambda + \mu)v \qquad (12)$$

Berdasarkan Persamaan (9) diperoleh:

$$0 = -\frac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + (\lambda + \mu)(P + vI)$$

$$0 = K\left(P - \hat{P}\right) - (\lambda + \mu) \qquad (13)$$

Persamaan (10) diimplikasikan $\mu = 0$. Berdasarkan Persamaan (1) dan Persamaan (11) diperoleh:

$$\dot{I} = \hat{P} + \frac{\lambda}{K} + vI \qquad (14)$$

dengan turunan Persamaan (14) diperoleh :

$$\ddot{I} = \frac{\dot{\lambda}}{K} + \dot{v}I + v\dot{I} \qquad (15)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (12) dan Persamaan (14) ke Persamaan (15) diperoleh:

$$\ddot{I} = \frac{\left(h\left(I-\hat{I}\right)-\left(\lambda+\mu\right)v\right)}{K} + \dot{v}I + v\left(\hat{P}+\frac{\lambda}{K}+vI\right) \quad \text{................................(16)}$$

dan berdasarkan Persamaan (.13), maka $K\left(P-\hat{P}\right)=\left(\lambda+\mu\right)$, sehingga

$$\ddot{I} = \frac{\left(h\left(I-\hat{I}\right)-\left(K\left(P-\hat{P}\right)\right)v\right)}{K} + \dot{v}I + v\left(\hat{P}+\frac{\lambda}{K}+vI\right)$$

berdasarkan Persamaan (11), maka $P-\hat{P}=\frac{\lambda}{K}$, sehingga

$$\ddot{I} - \left(\frac{h}{K}+\dot{v}+v^2\right)I = -\frac{h\hat{I}}{K}+v\hat{P} \quad \text{..(17)}$$

Selanjutnya, untuk menentukan persamaan tingkat persediaan yang optimal, persamaan rata-rata produksi yang optimal, dan selisih antara rata-rata fungsi peningkatan dan rata-rata fungsi penurunan harus diperoleh solusi dari Persamaan (17). Solusi Persamaan (17) akan diamati dua kasus dalam bentuk solusi eksplisit. Dua kasus yang akan di selesaikan dalam bentuk solusi eksplisit adalah sebagai berikut :

A. Fungsi v adalah Konstanta

Ketika fungsi v dalam bentuk konstanta maka persamaan diferensial dari Persamaan (17) akan diperoleh sebagai berikut:

$$\ddot{I} - \left(\frac{h}{K}+v^2\right)I = -\frac{h\hat{I}}{K}+v\hat{P} \quad \text{...(18)}$$

dengan Persamaan (18) merupakan persamaan differensial orde dua nonhomogen. Langkah pertama yang dilakukan dalam penyelesaian Persamaan (18) yaitu menentukan terlebih dahulu penyelesaian umum persamaan homogen sehingga akan diperoleh persamaan karakteristiknya sebagai berikut :

$$r^2 - \left(\frac{h}{K}+v^2\right) = 0 \quad \text{..(19)}$$

dan akar – akar persamaan yang diperoleh $r_1 = \sqrt{\left(\frac{h}{K}+v^2\right)} = r$ dan $r_2 = -\sqrt{\left(\frac{h}{K}+v^2\right)} = -r$,

sehingga solusi dari Persamaan (18) adalah

$$I\left(t\right) = c_{11}e^{rt} + c_{12}e^{-rt} + Q_1(t) \quad \text{.......................................(20)}$$

dimana $Q_1(t)$ merupakan solusi untuk persamaan nonhomogen dari Persamaan (18). Kemudian, diperoleh $Q_1(t) = \frac{h\hat{I}-vK\hat{P}}{h+Kv^2}$. Selanjutnya, untuk menentukan $\left(P\left(t\right)\right)$ dengan menggunakan kondisi $I\left(0\right)=I_0$ dan $I\left(t_1\right)=M$ pada Persamaan (20) akan diperoleh sebagai berikut:

a. Untuk $t=0$ diperoleh $I_0 = c_{11}\left(1\right)+c_{12}\left(1\right)+Q_1(0)$

b. Untuk $t=t_1$ diperoleh $M = c_{11}e^{rt_1}+c_{12}e^{-rt_1}+Q_1(t_1)$

nilai c_{11} dan c_{12} dapat diselesaikan sebagai berikut :

$$\mathbf{A} = \mathbf{Bx}+\mathbf{C}$$

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{rt_1} & e^{-rt_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_1\left(0\right) \\ Q_1\left(t_1\right) \end{pmatrix}$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

maka $\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}-\mathbf{C})$, sehingga di peroleh

$$c_{11} = \frac{e^{-rt_1}\left(I_0 - Q_1(0)\right) - \left(M - Q_1(t_1)\right)}{e^{-rt_1} - e^{rt_1}} \quad \text{dan} \quad c_{12} = \frac{-e^{rt_1}\left(I_0 - Q_1(0)\right) + \left(M - Q_1(t_1)\right)}{e^{-rt_1} - e^{rt_1}}$$

Berdasarkan Persamaan (14) dan Persamaan (20) di peroleh sebagai berikut:

$$\lambda = K(\dot{I} - \hat{P} - vI)$$

$$= K\left(c_{11}(r-v)e^{rt} - c_{12}(r+v)e^{-rt} + \dot{Q}_1(t) - \hat{P} - v\left(Q_1(t)\right)\right) \qquad (21)$$

sehingga dari Persamaan (22) dapat disubsitusikan ke Persamaan (11) dan diperoleh:

$$P(t) = \hat{P} + \left(c_{11}(r-v)e^{rt} - c_{12}(r+v)e^{-rt} + \dot{Q}_1(t) - \hat{P} - v\left(Q_1(t)\right)\right) \qquad (22)$$

B. Fungsi $\frac{h}{K} + \dot{v} + v^2$ adalah Konstanta

Diasumsikan:

$$\frac{h}{K} + \dot{v} + v^2 = k_1^{\,2} \qquad (23)$$

sehingga Persamaan (17) akan diperoleh:

$$\ddot{I} - \left(k_1^{\,2}\right)I = -\frac{h\hat{I}}{K} + v\hat{P} \qquad t \in [0, t_1] \qquad (24)$$

maka akan di peroleh persamaan diferensial orde dua nonhomogen. Selanjutnya, untuk menyelesaikan Persamaan (23) perlu menghitung v terlebih dahulu untuk mendapatan solusi Persamaan (24). Pada Persamaan (23) diasumsikan $k_1^{\,2} - \frac{h}{K} = a^2$, maka penyelesaian Persamaan (23) yaitu $\frac{dv}{a^2 - v^2} = dt$, bentuk tersebut dapat diselesaikan dengan mengintegralkan kedua ruas sehingga di peroleh $v(t) = \frac{a\left(e^{2at}+1\right)}{\left(e^{2at}-1\right)}$. Kemudian, dengan mensubstitusikan $v(t)$ ke dalam Persamaan (24) diperoleh:

$$\ddot{I} - \left(k_1^{\,2}\right)I = \frac{-h\hat{I}}{K} + \frac{a\left(e^{2at}+1\right)}{\left(e^{2at}-1\right)}\hat{P} \qquad (25)$$

dengan Persamaan (25) merupakan persamaan diferensial orde dua nonhomogen. Langkah pertama yang dilakukan dalam penyelesaian Persamaan (25) yaitu menentukan terlebih dahulu penyelesaian umum persamaan homogen sehingga akan diperoleh persamaan karakteristiknya sebagai berikut :

$$r^2 - \left(k_1^{\,2}\right) = 0 \qquad (26)$$

dan akar-akar persamaan yang diperoleh $r_1 = k_1$ dan $r_2 = -k_1$ sehingga solusi dari Persamaan (26) yaitu :

$$I(t) = c_{11}e^{k_1 t} + c_{12}e^{-k_1 t} + Q(t) \qquad (27)$$

dimana $Q(t)$ merupakan solusi untuk persamaan nonhomogen dari Persamaan (25). Kemudian diperoleh

$$Q(t) = \frac{h\hat{I}}{Kk_1^{\,2}} + V_1 e^{k_1 t} + V_2 e^{-k_1 t}$$

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

dengan V_1 dan V_2 merupakan anti turunan dari V_1' dan V_2'.

Selanjutnya, untuk menentukan $(P(t))$ dengan menggunakan kondisi $I(0) = I_0$ dan $I(t_1) = M$ maka akan di peroleh sebagai berikut :

a. Untuk $t = 0$ diperoleh $I_0 = c_{11} + c_{12} + \frac{h\hat{I}}{Kk_1^2}$

b. Untuk $t = t_1$ diperoleh $M = (c_{11} + V_1(t_1))e^{k_1 t_1} + (c_{12} + V_2(t_1))e^{-k_1 t_1} + \frac{h\hat{I}}{Kk_1^2}$

nilai c_{11} dan c_{12} dapat diselesaikan sebagai berikut :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{C}$$

$$\begin{pmatrix} I_0 \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{k_1 t_1} & e^{-k_1 t_1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{h\hat{I}}{Kk_1^2} \\ V_1(t_1)e^{k_1 t_1} + V_2(t_1)e^{-k_1 t_1} + \frac{h\hat{I}}{Kk_1^2} \end{pmatrix}$$

Maka $\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{C})$, sehingga di peroleh

$$c_{11} = \frac{e^{-k_1 t_1}\left(I_0 - \frac{h\hat{I}}{Kk_1^2}\right) - \left(M - \left(V_1(t_1)e^{k_1 t_1} + V_2(t_1)e^{-k_1 t_1} + \frac{h\hat{I}}{Kk_1^2}\right)\right)}{e^{-k_1 t_1} - e^{k_1 t_1}}$$

dan

$$c_{12} = \frac{-e^{k_1 t_1}\left(I_0 - \frac{h\hat{I}}{Kk_1^2}\right) + \left(M - \left(V_1(t_1)e^{k_1 t_1} + V_2(t_1)e^{-k_1 t_1} + \frac{h\hat{I}}{Kk_1^2}\right)\right)}{e^{-k_1 t_1} - e^{k_1 t_1}}$$

berdasarkan Persamaan (14) dan Persamaan (27) di peroleh sebagai berikut :

$$\lambda = K(\dot{I} - \hat{P} - vI)$$

$$= K\left(\left((k_1 - v)[(c_{11} + V_1(t))]e^{k_1 t} - (k_1 + v)[(c_{12} + V_2(t))]e^{-k_1 t}\right) - \hat{P} - \frac{h\hat{I}}{Kk_1^2}v\right)$$

sehingga dari Persamaan (27) dapat disubstitusikan ke Persamaan (11) dan diperoleh:

$$P(t) = \left((k_1 - v(t))[(c_{11} + V_1(t))]e^{k_1 t} - (k_1 + v(t))[(c_{12} + V_2(t))]e^{-k_1 t}\right) - \frac{h\hat{I}}{Kk_1^2}v(t) \quad \text{...........(28)}$$

3.2. Analisa Kestabilan

Selanjutnya, akan di analisa kestabilan dari Persamaan (21), maka untuk $t \in [0, t_1]$ pada Persamaan (21) akan mencapai kestabilan apabila untuk $t \to t_1$ maka persamaan tingkat persediaan yang optimal $(I(t))$ menuju ke satu nilai (tingkat persediaan maksimal (M)).

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

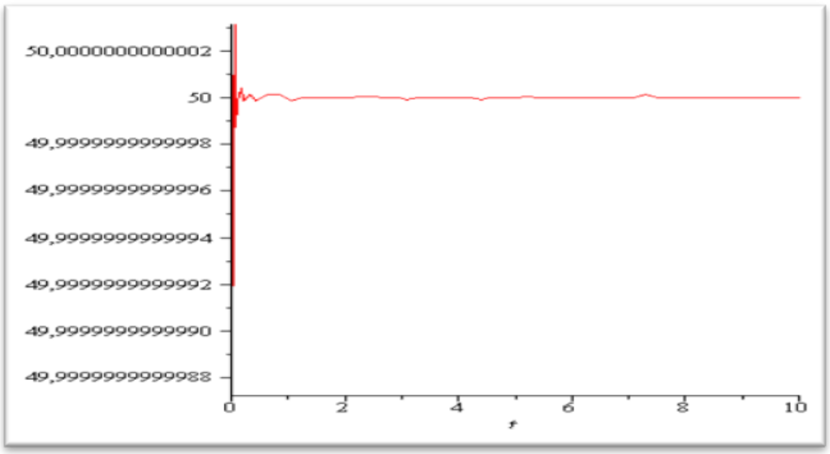
Contoh 1

Berdasarkan jurnal Lotfi Tadj dkk (2008), diberikan $\theta = 0.001$, $m = 0.01$, $v = 0.009$, $\hat{I} = 20$, $\hat{P} = 15$, $I_0 = 10$, $M = 50$, $h = 1.5$, dan $K = 15$. Tentukan nilai optimal tingkat persediaan $(I(t))$ dan analisa kestabilannya pada saat $t \in [0,10]$.

Penyelesaian:

$$r = 0.316355812$$
$$-r = -0.316355812$$
$$Q_1(t) = 18.63490573$$

kemudian di subsitusikan nilai-nilai diatas ke c_{11}, c_{12} dan Persamaan 20. Solusi Persamaan 20 untuk $t \to 10$ dengan menggunakan bantuan *Program Maple* diperoleh tampak pada grafik di bawah ini.



Gambar 1 Grafik $I(t) = 50$ yang Stabil

Berdasarkan Gambar 1 tampak bahwa untuk $t \to 10$ diperoleh nilai optimal tingkat persediaan $(I(t)) \to 50$ atau $(I(t)) \to M$, maka dapat di simpulkan bahwa $I(t)$ stabil karena $I(t)$ untuk $t \to 10$ menuju ke satu nilai (tingkat persediaan maksimal (M)).

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa peningkatan persediaan biasanya disebabkan karena adanya persediaan awal dan kemudian terjadinya penambahan persediaan sedangkan permintaan barang masih sedikit. Berdasarkan model persediaan barang yang mengalami peningkatan diperoleh sebagai berikut :

1. Fungsi v dalam bentuk konstanta di peroleh sebagai berikut :
   a. Persamaan tingkat persediaan yang optimal yaitu :
   $$I(t) = c_{11}e^{rt} + c_{12}e^{-rt} + Q_1(t) \qquad t \in [0, t_1]$$
   b. Persamaan rata – rata produksi yang optimal yaitu :
   $$P(t) = \hat{P} + \left(c_{11}(r-v)e^{rt} - c_{12}(r+v)e^{-rt} + \dot{Q}_1(t) - \hat{P} - v(Q_1(t))\right) \qquad t \in [0, t_1]$$
   c. selisih antara rata – rata fungsi peningkatan dan rata – rata fungsi penurunan $v(t)$ dalam bentuk konstanta
2. Fungsi $\frac{h}{K} + \dot{v} + v^2$ dalam bentuk konstanta diperoleh sebagai berikut :

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

a. Persamaan tingkat persediaan yang optimal yaitu :

$$I(t) = \left(c_{11} + V_1(t)\right)e^{k_1 t} + \left(c_{12} + V_2(t)\right)e^{-k_1 t} + \frac{h\hat{I}}{Kk_1^2} \qquad t \in [0, t_1]$$

b. Persamaan rata – rata produksi yang optimal yaitu :

$$P(t) = \left(\left(k_1 - v(t)\right)\left[\left(c_{11} + V_1(t)\right)\right]e^{k_1 t} - \left(k_1 + v(t)\right)\left[\left(c_{12} + V_2(t)\right)\right]e^{-k_1 t}\right) - \frac{h\hat{I}}{Kk_1^2}v(t) \qquad t \in [0, t_1]$$

c. Selisih antara rata – rata fungsi peningkatan dan rata – rata fungsi penurunan yaitu :

$$v(t) = \frac{a\left(e^{2at} + 1\right)}{\left(e^{2at} - 1\right)}$$

3. Persamaan tingkat persediaan yang optimal $\left(I(t)\right)$ mencapai kestabilan apabila untuk $t \to t_1$ maka $I(t)$ menuju ke satu nilai (tingkat persediaan maksimal (M)).

Daftar Pustaka

[1] Edwin J. Purcell dan Dale Varbeg. "*Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1*". edisi 5, halaman 115-140, 459-464. Erlangga, Jakarta. 2005.

[2] Heri Andrianto dan Agus Prijono. "*Menguasai Matriks dan Vektor*". Rekayasa Sains Bandung. Bandung. 2006.

[3] L. Tadj, dkk. "Optimal Control of an Inventory System with Ameliorating and Deteriorating Items". *Applied Sciences*, Vol 10, halaman 243 – 255. 2008.

[4] Olsder, GJ. *"Mathematical Sistem Theory".* Halaman 26. University of Techonology, Delft. 1994.

[5] Pardi Affandi, dkk. " Kendali Optimal pada Masalah Inventori yang Mengalami Peningkatan". *Jurnal Fisika FLUX.* Vol 12, No. 1, halaman 70-76. 2015.

[6] Pratiwi, Intan. "Kestabilan Sistem Kendali Lingkar Tertutup Untuk Waktu Berhingga". *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*. 2016.

[7] Ricardo, Henry J. "*A Modern Introduction to Differential Equations*"*.* edisi 2, halaman 131-157. Elsevier Academic Press, London. 2009.

[8] Waluya, SB. "*Persamaan Diferensial*". halaman 46-64. Graha Ilmu. Yogyakarta. 2006.