Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 9 *ISSN (Printed) : 2579-7271*
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau *ISSN (Online) : 2579-5406*
Pekanbaru, 18-19 Mei 2017

Vektor Kendali Permainan Dinamis LQ Non-Kooperatif Waktu Tak Berhingga

Nilwan Andiraja
UIN Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru
Jl. H.R Soebrantas No 155 Km. 18 telp : 0761-8359937
e-mail: nilwanandiraja@uin-suska.ac.id

Abstrak

Pada penelitian ini dibahas mengenai persamaan sistem dinamik permainan N pemain waktu tak berhingga untuk kasus skalar dengan faktor diskon. Kemudian dibentuk persamaan aljabar Riccati untuk waktu tak berhingga dari persamaan sistem dinamik permainan. Selanjutnya berdasarkan solusi persamaan aljabar Riccati dibentuk solusi umpan balik Nash untuk masing-masing pemain. Kemudian dianalisa kestabilan sistem dengan mensubstitusikan umpan balik Nash ke persamaan diferensial sistem dinamik. Berikutnya, untuk eksistensi solusi dan ketunggalan solusi umpan balik Nash, diperoleh hasil bahwa untuk $s_1 = 0$ *dan terdapat solusi untuk umpan balik Nash dan ada satu solusi umpan balik Nash yang menstabilkan sistem dinamik.*

Kata kunci: *Dinamik, Diskon, Permainan, Riccati, skalar*

Abstract

In this research was discuss about equation of dynamic system game N player with infinite time for scalar case with discount factor. Based system of dynamic game formed algebraic Riccati equation for infinite time. Furthermore, based solution from algebraic Riccati equation, formed feedback Nash for each player. Then analyzed about stability of system with substitution feedback Nash to differential equation dynamic system. Moreover, for existence solution and uniqueness solution of feedback Nash, resulting for $s_1 = 0$ *and founded solution for feedback Nash and there is one feedback Nash solution which stabilize dynamic system.*

Keywords*: Dynamic, Discount, Game, Riccati, scalar*

1. Pendahuluan

Sebuah permainan dikatakan permainan dinamis jika strategi yang diambil oleh seorang pemain dilakukan dengan mempertimbangkan strategi sebelumnya, baik strategi yang diambil sendiri maupun strategi yang diambil oleh pemain lain. Permainan dinamis yang akan dikaji di penelitian ini adalah permainan dinamis non-kooperatif kontinu skalar umpan balik Nash *N* pemain dengan waktu tak berhingga dengan pemberian faktor diskon. Hal yang menarik dalam permainan dinamis non-kooperatif, bahwa untuk mencapai suatu tujuan masing-masing pemain akan saling berkompetisi agar tujuan yang diinginkan tercapai dengan baik, maka dapat dipahami dalam berkompetisi tentu masing-masing pemain tidak saling bekerjasama (non-kooperatif).

Pada permainan dinamis non-kooperatif kontinu skalar umpan balik Nash, para pemain akan mengoptimalkan dalam arti Nash fungsi objektif, untuk mengoptimalkan fungsi objektif maka para pemain memerlukan strategi Nash. Masalah solusi strategi Nash, telah dijelaskan oleh beberapa ahli diantaranya diberikan oleh Tamer Basar (1999) dan Jacob Engwerda (2000) yang telah menjelaskan tentang eksistensi solusi strategi Nash untuk persoalan permainan dinamis non-kooperatif dengan waktu tak hingga kasus non skalar. Hal yang sama juga diberikan oleh Weeren (1999) yang menjelaskan mengenai eksistensi solusi strategi Nash untuk persoalan permainan dinamis non-kooperatif dengan waktu tak hingga kasus non skalar dan skalar.

Sementara itu untuk penelitian tentang permainan dengan penambahan faktor diskon telah diberikan beberapa ahli diantaranya diberikan oleh Philippe Michel (2003) yang telah membahas mengenai ekuilibrium Nash dengan fungsi dinamik permainan diberikan faktor diskon untuk dua pemain dengan fungsi tujuan untuk waktu berhingga. Peneliti lain oleh Michael R. Caputo (2013)

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

yang dalam jurnalnya membahas mengenai solusi umpan balik Nash pada persoalan permainan dinamis untuk waktu tak berhingga dengan penambahan faktor diskon yang berfungsi eksponensial. Sementara itu penelitian yang dilakukan oleh Fabio S. Priuli (2015) telah membahas mengenai solusi umpan balik Nash untuk waktu tak berhingga pada permainan linier kuadratik dengan penambahan faktor diskon dengan menggunakan matriks Hamiltonian.

Selanjutnya, dari uraian diatas dapat diperoleh bahwa penelitian mengenai solusi umpan balik Nash pada permainan dinamis non-kooperatif telah dilakukan untuk waktu tak berhingga oleh Jacob Engwerda dan Weeren, namun dua peneliti tersebut tidak memberi penambahan faktor diskon pada fungsi dinamik atau pada fungsi tujuannya. Sementara penelitian yang dilakukan oleh Philippe Michel, Michael R. Caputo dan Fabio S. Priuli telah membahas mengenai solusi umpan balik Nash pada persoalan permainan dengan penambahan faktor diskon pada sistem dinamiknya, namun persoalan permainan yang dibahas tidak berbentuk permainan dinamik non-kooperatif untuk kasus skalar.

Berdasarkan uraian tersebut, maka dalam penelitian ini yang akan dibahas merupakan penggabungan penelitian yang belum pernah dilakukan oleh Jacob Engwerda dan Weeren serta penelitian yang belum dilakukan oleh Philippe Michel, Michael R. Caputo dan Fabio S. Priuli yaitu mengenai permainan dinamis linier kuadratik non-kooperatif kontinu untuk kasus skalar umpan balik Nash untuk *N* pemain pada waktu tak berhingga. Dimana faktor diskon dikenakan pada sistem dinamik permainan dengan para pemain mencari vektor kendali dengan vektor kendali yang diperoleh memenuhi strategi Nash dengan kriteria bahwa vektor kendali yang diperoleh oleh masing-masing pemain tidak lebih buruk jika dibandingkan dengan vektor kendali yang lain. Kemudian, berdasarkan vektor kendali yang diperoleh tersebut akan dianalisa kestabilan sistem dinamik permainnya. Sehingga diperoleh vektor kendali untuk masing-masing pemain yang optimal sesuai dengan kriteria Nash.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan studi literatur dan langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Membentukan model persamaan differensial dinamis kasus permainan non-kooperatif beserta fungsi tujuan waktu tak hingga dengan penambahan faktor diskon untuk kasus skalar untuk *N* pemain.
2. Berdasarkan alur permainan pada pembatasan masalah yaitu *loop* tertutup, maka untuk mencari fungsi kendali pemain pertama diketahui fungsi kendali pemain yang lain.
3. Fungsi kendali yang diketahui pada langkah 2 diatas, disubstitusikan ke persamaan differensial dinamis untuk *N* pemain.
4. Kemudian dibentuk persamaan *Hamiltonian*, lalu berdasarkan persamaan Hamiltonian dan persamaan differensial dinamis untuk *N* pemain pada langkah 3, dibentuk persamaan *state*, *costate* serta persamaan stasioner.
5. Berdasarkan langkah 4, kemudian dibentuk persamaan differensial Riccati berdasarkan persamaan diferensial Riccati,
$$-\dot{S} = A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q \,,\; t \le T_f \,,$$
6. Selanjutnya, karena fungsi tujuan sampai waktu tak berhingga, maka dari persamaan differensial Riccati di bentuk persamaan aljabar Riccati untuk *N* pemain.
7. Mencari eksistensi vektor kendali strategi Nash yang akan mengoptimalkan fungsi tujuan permainan dinamis, kemudian dibentuk vektor kendali untuk masing-masing pemain.
8. Menganalisa kestabilan sistem dinamik permainan berdasarkan vektor kendali yang diperoleh dari langkah 6, dengan menganalisa perilaku grafik dari solusi persamaan differensial dinamis untuk waktu tak berhingga.
9. Penarikan kesimpulan tentang bentuk model sistem dinamik kasus permainan non-kooperatif beserta fungsi tujuan waktu tak hingga dengan penambahan faktor diskon untuk kasus skalar untuk *N* pemain. Kemudian kesimpulan tentang eksistensi vektor kendali Nash serta hasil analisa kestabilan sistem dinamik permainan untuk *N* pemain.

3. Hasil dan Pembahasan

Didefinisikan persamaan diferensial sistem dinamik permainan untuk *N* pemain

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^{N} B_i \mathbf{u}_i(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \qquad (1)$$

kemudian para pemain meminimalkan fungsi objektif

$$J_i(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_N) = \int_0^{\infty} \{\mathbf{x}^T(t) Q_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_i^T(t) R_i \mathbf{u}_i(t)\} dt, \; i = 1, 2, \ldots, N \qquad (2)$$

semua matriks pada fungsi tujuan J_i diasumsikan merupakan matriks simetri, R_i dan Q_i keduanya merupakan matriks definit positif untuk $i = 1, 2, \cdots, N$, serta didefinisikan $S_i = B_i R_{ii}^{-1} B_i^T$.

Selanjutnya dibentuk sistem permainan non-kooperatif N pemain untuk kasus skalar, yaitu

$$\dot{x}(t) = ax(t) + \sum_{i=1}^{N} b_i u_i(t) \quad x(0) = x_0 \qquad (3)$$

Para pemain meminimalkan dalam arti Nash fungsi objektif

$$J_i(u_1, \ldots, u_N) = \int_0^{\infty} \{x^T(t) q_i x(t) + u_i^T(t) r_i u_i(t)\} dt, \; i = 1, 2, \ldots, N \qquad (4)$$

didefinisikan faktor diskon yaitu $\tilde{x}(t) = e^{-\theta t} x(t)$ dan $\tilde{u}_i(t) = e^{-\theta t} u_i(t) \quad i = 1, 2, \ldots, N$, dengan masing-masing $\tilde{x}(t)$ dan $\tilde{u}_i(t)$ disubstitusikan ke Persamaan (3) maka,

$$\dot{\tilde{x}} = (a - \theta)\tilde{x}(t) + \sum_{i=1}^{N} b_i \tilde{u}_i(t) \qquad (5)$$

dengan fungsi objektif pada Persamaan (4) juga dikenakan penambahan faktor diskon, maka

$$J_i = \int_0^{\infty} \left\{q_i \tilde{x}^2(t) + r_i \tilde{u}_i^2(t)\right\} dt, \quad i = 1, 2, \ldots, N \qquad (6)$$

Selanjutnya, untuk masing-masing pemain akan dicari solusi umpan balik Nash. Diketahui bahwa bentuk permainan umpan balik, sehingga untuk pemain pertama diketahui kendali dari pemain lain yaitu $\tilde{u}_i = -r_i^{-1} b_i k_i \tilde{x}(t) \quad i = 2, 3, \ldots, N$. Sehingga persamaan diferensial sistem dinamik permainan untuk pemain pertama menjadi,

$$\dot{\tilde{x}} = \left(a - \theta - \sum_{j=2}^{N} s_j k_j\right)\tilde{x}(t) + b_1 \tilde{u}_1(t) \qquad (7)$$

Dengan fungsi objektif pemain pertama yaitu,

$$J_1 = \int_0^{\infty} \left\{q_1 \tilde{x}^2(t) + r_1 \tilde{u}_1^2(t)\right\} dt \qquad (8)$$

Dengan $T_f \rightarrow \infty$, maka dapat dibentuk persamaan aljabar Riccati, yaitu

$$\frac{1}{2}s_1k_1^2 - 2\left(a - \theta - \sum_{j=2}^{N} s_jk_j\right)k_1 - 2q_1 = 0 \quad \text{.....................................(9)}$$

Persamaan (9) akan memiliki solusi untuk k_1 yaitu,

$$k_{1_1} = \frac{2\left(a - \theta - \sum_{j=2}^{N} s_jk_j\right) + \sqrt{4\left(a - \theta - \sum_{j=2}^{N} s_jk_j\right)^2 + 4s_1q_1}}{s_1},$$

dan,

$$k_{1_2} = \frac{2\left(a - q - \sum_{j=2}^{N} s_jk_j\right) - \sqrt{4\left(a - q - \sum_{j=2}^{N} s_jk_j\right)^2 + 4s_1q_1}}{s_1}$$

sehingga terdapat solusi umpan balik Nash untuk pemain pertama yaitu

$$\tilde{u}_1 = -r_1^{-1}b_1k_1\tilde{x}(t) \quad \text{...(10)}$$

Selanjutnya, untuk pemain kedua diketahui kendali dari pemain pertama dan pemain yang lain yaitu $\tilde{u}_i = -r_i^{-1}b_ik_i\tilde{x}(t)\ i = 1,\ldots,N$ dengan $i \neq 2$. Sehingga persamaan diferensial sistem dinamik permainan untuk kasus pemain kedua menjadi,

$$\dot{\tilde{x}} = \left(a - q - \sum_{j=1, j\neq 2}^{N} s_jk_j\right)\tilde{x}(t) + b_2\tilde{u}_2(t) \quad \text{.............................(11)}$$

dari Persamaan (6) diperoleh fungsi objektif kasus pemain kedua yaitu,

$$J_2 = \int_0^{\infty} \left\{q_2\tilde{x}^2(t) + r_2\tilde{u}_2^2(t)\right\}dt$$

Selanjutnya berdasarkan persamaan diferensial sistem dinamik permainan untuk pemain kedua dan fungsi objektif pemain kedua, diperoleh persamaan Hamiltonian dengan proses yang sama dengan pemain pertama. Selanjutnya diperoleh persamaan aljabar Riccati, yaitu

$$\frac{1}{2}s_2k_2^2 - 2\left(a - q - \sum_{j=1, j\neq 2}^{N} s_jk_j\right)k_2 - 2q_2 = 0 \quad \text{.................. ....(12)}$$

Persamaan (12) memiliki solusi untuk k_2 yaitu,

$$k_{2_1} = \frac{2\left(a - q - \sum_{j=1, j\neq 2}^{N} s_jk_j\right) + \sqrt{4\left(a - q - \sum_{j=1, j\neq 2}^{N} s_jk_j\right)^2 + 4s_2q_2}}{s_2}$$

dan,

$$k_{2_2} = \frac{2\left(a - q - \sum_{j=1, j\neq 2}^{N} s_jk_j\right) - \sqrt{4\left(a - q - \sum_{j=1, j\neq 2}^{N} s_jk_j\right)^2 + 4s_2q_2}}{s_2}$$

sehingga terdapat solusi umpan balik Nash untuk pemain kedua yaitu

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$\tilde{u}_2 = -r_2^{-1} b_2 k_2 \tilde{x}(t) \qquad (13)$$

Selanjutnya, secara umum dengan persamaan diferensial dinamik permainan pada Persamaan (5) dengan fungsi objektif pada persamaan (6), maka dapat diperoleh,

$$\dot{\tilde{x}} = \left(a - \theta - \sum_{j \neq i}^{N} s_j k_j\right)\tilde{x}(t) + b_i \tilde{u}_i(t) \quad i = 1, 2, \ldots, N \qquad (14)$$

Kemudian berdasarkan Persamaan (14) dan persamaan fungsi objektif pada Persamaan (6), maka dapat dibentuk persamaan Hamilton yaitu

$$H = \left(q_i \tilde{x}^2(t) + r_i \tilde{u}_i(t)\right) + \lambda\left(\left(a - \theta - \sum_{j \neq i}^{N} s_j k_j\right)\tilde{x}(t) + b_i \tilde{u}_i(t)\right) \; i = 1, 2, \ldots, N \qquad (15)$$

Persamaan diferensial Riccati dirubah kebentuk persamaan aljabar Riccati yaitu,

$$\frac{1}{2} s_i k_i^2 - 2\left(a - \theta - \sum_{j \neq i}^{N} s_j k_j\right)k_i - 2q_i = 0,\; i = 1, 2, \ldots, N \qquad (16)$$

Persamaan (16) akan memiliki solusi yaitu,

$$k_{i_{1,2}} = \frac{2\left(a - \theta - \sum_{j \neq i}^{N} s_j k_j\right) \pm \sqrt{4\left(a - \theta - \sum_{j \neq i}^{N} s_j k_j\right)^2 + 4 s_i q_i}}{s_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

sehingga terdapat solusi umpan balik Nash untuk N pemain yaitu

$$\tilde{u}_i(t) = -\frac{1}{2} r_i^{-1} b_i k_i \tilde{x} \quad \text{untuk } i = 1, 2, \ldots, N \qquad (17)$$

Kemudian, solusi umpan balik Nash untuk N pemain pada Persamaan (17) disubstitusikan ke Persamaan (5) untuk di analisa kestabilan persamaan diferensial permainannya, yaitu,

$$\dot{\tilde{x}} = \left(a - \theta - \sum_{i=1}^{N} s_i k_i\right)\tilde{x}(t) \qquad (18)$$

Selanjutnya, persamaan diferensial sistem dinamik permainan akan menjadi stabil jika dipenuhi $a - \theta - \sum_{i=1}^{N} s_i k_i < 0$. Kemudian dipilih solusi untuk masing-masing pemain yaitu

$$k_{i_1} = \frac{2\left(a - \theta - \sum_{j \neq i}^{N} s_j k_j\right) + \sqrt{4\left(a - \theta - \sum_{j \neq i}^{N} s_j k_j\right)^2 + 4 s_i q_i}}{s_i}$$

untuk masing-masing solusi umpan balik Nash untuk pemain ke N, maka akan menstabilkan sistem dinamik permainan. Sementara untuk solusi yang lain tidak memberikan jaminan hasil yang sama, sehingga kestabilan sistem dinamik permainan tidak dapat dipastikan terpenuhi.

Selanjutnya, dari Persamaan (12) dan (18) di asumsikan $s_1 = 0$, dari Persamaan (12) diperoleh,

$$\frac{1}{2} s_2 k_2^2 - 2\left(a - \theta - \sum_{j=3}^{N} s_j k_j\right)k_2 - 2q_2 = 0 \qquad (19)$$

dan dari Persamaan (18) diperoleh

ISSN (Printed) : 2579-7271
ISSN (Online) : 2579-5406

$$a-\theta-\sum_{i=2}^{N} s_i k_i < 0 \quad \text{..(20)}$$

Kemudian dari Persamaan (19) diperoleh solusi unutk masing-masing nilai k_2 yaitu,

$$k_{2_1} = \frac{2\left(a-\theta-\sum_{j=3}^{N} s_j k_j\right) + \sqrt{4\left(a-\theta-\sum_{j=3}^{N} s_j k_j\right)^2 + 4 s_2 q_2}}{s_2}$$

dan,

$$k_{2_2} = \frac{2\left(a-q-\sum_{j=3}^{N} s_j k_j\right) - \sqrt{4\left(a-q-\sum_{j=3}^{N} s_j k_j\right)^2 + 4 s_2 q_2}}{s_2}$$

Selanjutnya, solusi k_{2_1} tersebut di substitusikan ke Persamaan (20), maka diperoleh,

$$-(a-\theta)-2\sum_{j=3}^{N} s_j k_j - \sqrt{4\left(a-\theta-\sum_{j=3}^{N} s_j k_j\right)^2 + 4 s_2 q_2} - \sum_{i=3}^{N} s_i k_i < 0$$

Sedangkan untuk solusi k_{2_2} yang disubstitusikan ke Persamaan (20) menghasilkan,

$$-(a-\theta)-2\sum_{j=3}^{N} s_j k_j + \sqrt{4\left(a-\theta-\sum_{j=3}^{N} s_j k_j\right)^2 + 4 s_2 q_2} - \sum_{i=3}^{N} s_i k_i > 0$$

Maka dapat disimpulkan dari Persamaan (19) dan (20) bahwa untuk $s_1 = 0$, solusinya adalah k_{1_1} dan k_{2_1}

4. Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada hasil dan pembahasan yang telah diberikan, maka diperoleh kesimpulan bahwa berdasarkan persamaan diferensial sistem dinamik permainan non-kooperatif untuk kasus skalar dengan penambahan faktor diskon, diperoleh persamaan untuk *N* pemain yaitu,

$$\dot{\tilde{x}} = (a-\theta)\tilde{x}(t) + \sum_{i=1}^{N} b_i \tilde{u}_i(t)$$

dengan masing-masing pemain meminimalkan fungsi objektif

$$J_1 = \int_0^{\infty} \left\{ q_1 \tilde{x}^2(t) + r_1 \tilde{u}_1^2(t) \right\} dt,$$

dan

$$J_2 = \int_0^{\infty} \left\{ q_2 \tilde{x}^2(t) + r_2 \tilde{u}_2^2(t) \right\} dt,$$

dan fungsi tujuan untuk *N* pemain yaitu

$$J_N = \int_0^{\infty} \left\{ q_N \tilde{x}^2(t) + r_N \tilde{u}_N^2(t) \right\} dt$$

maka diperoleh persamaan aljabar Riccati

$$\frac{1}{2}s_i k_i^2 - 2\left(a - \theta - \sum_{j \neq i}^{N} s_j k_j\right)k_i - 2q_i = 0 \text{ untuk } i = 1, 2, ..., N$$

Kedua persamaan aljabar Riccati tersebut memiliki solusi k_{i_1}, maka diperoleh solusi umpan balik Nash *N* pemain yaitu $\tilde{u}_i(t) = -\frac{1}{2}r_i^{-1}b_i \lambda$ untuk $i = 1, 2, ..., N$

Daftar Pustaka

Jurnal:

[1] Caputro, Michael R. 2013. The intrinsic comparative dynamics of locally differentiable feedback Nash equilibria of autonomous and exponentially discounted infinite horizon differential games. *Journal of Economic Dynamics and Control* vol 37. P1982-1994.
[2] Engwerda J. Feedback Nash equilibria in the scalar infinite horizon LQ-game. *Automatica*. 2000; 36 : 135-139.
[3] Michel, Phillipe. 2003. On the Selection of One Feedback Nash Equilibrium in Discounted Linear-Quadratic Games. *Journal of Optimization Theory and Applications* vol.117, p231-243.
[4] Priuli, Fabio S. 2015. Linear-Quadratic N -Person and Mean-Field Games: Infinite Horizon Games with Discounted Cost and Singular Limits. *Journal Dynamic Games and Applications* vol 5. P397-419.
[5] Weeren AJTM, Schumacher JM, Engwerda J. Asymptotic analysis of linear feedback Nash equilibria in nonzero-sum linear-quadratic differential games. *Journal of Optimization Theory and Applications*.1999: 101: p693–723.

Texbooks:

[1] Basar T. Dynamic noncooperative game theory. Philadelphia: SIAM. 1999.
[2] Bellman R. Introduction to Matrix Analysis. Philadelphia: SIAM. 1997
[3] Engwerda J. LQ Dynamic Optimization and Differential Games. Chichester: John Wiley & Sons. 2005.
[4] Lewis FL. Applied Optimal Control and Estimation. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1992.
[5] Olsder GJ. Mathematical System Theory. Delft: University of Technology. 1994.
[6] Perko L. Differential Equations and Dynamical System. New York: Springer-Verlag. 1991.