Modifikasi Metode Newton-Steffensen Tiga Langkah Menggunakan Interpolasi Kuadratik

Wartono[1], Eka Jumianti[2]
[1,2]Program Studi Matematika, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Subrantas km 16, Pekanbaru 28293
e-mail: wartono@uin-suska.ac.id[1]

Abstrak

Metode Newton-Steffensen merupakan metode iterasi yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear yang dihasilkan dari modifikasi metode Steffensen. Pada makalah ini, penulis mengembangkan metode Newton-Steffensen yang ditulis oleh Sharma [10] dengan menggunakan interpolasi kuadratik. Berdasarkan hasil kajian diperoleh persamaan iterasi baru dengan orde konvergensi enam yang melibatkan lima evaluasi fungsi dengan indeks efisiensi 1,43097. Selain itu, simulasi numerik dilakukan terhadap beberapa fungsi dengan nilai tebakan awal yang berbeda dan diperoleh bahwa performa modifikasi metode yang baru lebih baik dibandingkan dengan metode Newton, metode Steffensen dan metode Newton-Steffensen.

Kata kunci: indeks efisiensi, metode Newton-Steffensen, orde konvergensi, persamaan nonlinear

Abstract

The Newton-Steffensen's method is iterative method that using for solving a nonlinear equations resulting from the modification of the Steffensen's method. In this paper, the author developed the Newton-Steffensen's method written by Sharma [10] using by the quadratic interpolation. Based on the study results obtained the new iteration equation with six-order convergence that involving five evaluation functions with efficiency index 1,43097. Besides, numerical simulations performed on some functions with different initial guess value and obtained that performance of the new method is better than the Newton's method, Steffensen's method and Newton-Steffensen's method.

***Keywords**: efficiency index, Newton-Steffensen method, orde of convergence, nonlinear equation*

1. Pendahuluan

Metode Newton merupakan salah satu metode iterasi dengan orde konvergensi kuadratik untuk menentukan akar-akar persamaan nonlinear dengan menggunakan tebakan awal yang dirumuskan oleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

Selain itu, terdapat metode iterasi lain yang memiliki orde konvergensi kuadratik yang diperoleh dengan menggantikan turunan pertama Newton dengan bentuk $f'(x) \approx f(x + f(x_n))$, sehingga rumusan baru metode iterasi tersebut adalah

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)} \tag{2}$$

dengan efesiensi indeks sama dengan metode Newton, yaitu sebesar $\sqrt{2} \approx 1{,}414$

Untuk meningkatkan orde konvergensi, beberapa peneliti mengembangkan suatu metode iterasi baru dua langkah untuk menghasilkan orde konvergensi kubik dengan menggunakan berbagai pendekatan, seperti: beda hingga terpusat [2, 7], beda maju dengan parameter tunggal [4, 6], polynomial kuadratik dan kubik [5], interpolasi linear [9], beda maju dengan parameter fungsi [10] dan koefisien tak tentu [11].

Pada makalah ini, akan dikembangkan metode iterasi dua langkah yang telah dikaji oleh Sharma [10] dengan orde konvergensi kubik dalam bentuk,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)(f(x_n) - f(y_n))} \tag{3}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{4}$$

Persamaan (3) merupakan modifikasi metode Steffensen, dan lebih dikenal dengan nama metode Newton-Steffensen yang melibatkan evaluasi fungsi *f*, yaitu $f(x)$ dan $f(y_n)$ dan , satu evaluasi turunan pertama fungsi *f*, yaitu $f'(x)$, sehingga metode tersebut mempunyai indeks efesiensi sebesar $3^{1/3} \approx 1{,}4422$

Untuk meningkatkan orde konvergensi metode Newton-Steffensen, maka dikontruksi metode iterasi tiga langkah dengan menambahkan langkah ketiga dalam bentuk Newton yang diberikan pada persamaan (1). Selain itu, untuk meningkatkan efisiensi metode iterasi, maka perlu mereduksi bentuk turunan pertama pada langkah ketiga dengan menggunakan pendekatan interpolasi kuadratik sebagaimana yang dilakukan oleh Chun [1] dan Kou [8].

2. Metode

Pandang kembali persamaan (1) sebagai berikut

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5}$$

dan dengan mengapoksimasikan turunan pertama pada persamaan (5) diperoleh,

$$f'(x_n) = x_n - \frac{f(x_n + t(x_n)f(x_n)) - f(x_n)}{t(x_n)f(x_n)} \tag{6}$$

dengan $t(x_n)$ adalah fungsi sebarang.

Selanjutnya subsitusi persamaan (6) ke Persamaan (5), dan dengan menyederhanakan persamaan tersebut diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{t(x_n)f^2(x_n)}{f(x_n + t(x_n)f(x_n)) - f(x_n)} \tag{7}$$

Jika $t(x_n) = -\frac{1}{f'(x_n)}$ maka persamaan (7) menjadi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)\left(f(x_n) - f\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)\right)} \tag{8}$$

atau

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)(f(x_n) - f(y_n))} \tag{9}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Persamaan (9) merupakan metode Newton-Steffensen dengan orde konvergensi kubik yang melibatkan dua evaluasi fungsi *f*, yaitu $f(x)$ dan $f(y)$, dan satu evaluasi turunan pertama fungsi *f*, yaitu $f'(x)$.

Selanjutnya, berikut ini akan diberikan teorema orde konvergensi dari metode Newton-Steffensen.

Teorema 2 : Misalkan $f : D \subset \Re \to \Re$ merupakan fungsi terdiferensial seperlunya dengan akar sederhana α, $f'(\alpha) \neq 0$ dengan $\alpha \in D$ dan x_o cukup dekat ke α maka persamaan metode Newton-Steffensen konvergen ke α dengan orde konvergensi 3 (tiga) yang memenuhi persamaan galat :

$$e_{n+1} = c_2^2 e_n^3 + O(e_n^4) \tag{10}$$

dengan $e_n = x_n - \alpha$ dan $c_j = \dfrac{f^j(\alpha)}{2!\, f'(\alpha)}$.

Bukti :

Andaikan *error* merupakan iterasi ke- n, dengan $e_n = x_n - \alpha$, maka dengan menggunakan ekspansi deret Taylor untuk $f(x_n)$ disekitar $x_n = \alpha$ didapatkan :

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{1}{2} f''(\alpha)(x_n - \alpha)^2 + \frac{1}{6} f'''(\alpha)(x_n - \alpha)^3 + O((x_n - \alpha)^4) \tag{11}$$

Oleh karena, $f(\alpha) = 0$ dan $e_n = x_n - \alpha$, dan selanjutnya dengan mensubstitusikan bentuk $x_n = e_n + \alpha$ ke persamaan (11) diperoleh :

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \tag{12}$$

dan

$$f^2(x_n) = (f'(x_n))^2 (e_n + 2c_2 e_n{}^2 + (2c_3 + c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)) \tag{13}$$

sedangkan turunan pertama persamaan (12) terhadap e_n diberikan oleh

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)) \tag{14}$$

Berdasarkan Persamaan (12) dan (14), maka pembagian $f(x)$ dengan $f'(x)$ memberikan :

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2 e_n^2 - 2c_3 e_n^3 + 2c_2^2 e_n^3 + O(e_n^4) \tag{15}$$

dan dengan mensubstitusikan Persamaan (15) ke Persamaan (5) maka didapatkan :

$$y_n = \alpha + c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{16}$$

Selanjutnya dengan menggunakan deret Taylor, maka ekspansi $f(y_n)$ di sekitar $y_n = \alpha$ diberikan oleh

$$f(y_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(y_n - \alpha) + \frac{1}{2!} f''(\alpha)(y_n - \alpha)^2 + \frac{1}{3!} f'''(\alpha)(y_n - \alpha)^3 + O((y_n - \alpha)^4) \tag{17}$$

Oleh karena $f(\alpha) = 0$ dan $y_n = \alpha + c_2 e_n^2$ maka :

$$f(y_n) = f'(\alpha)\left[c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right] \tag{18}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (12) dan (18), maka bentuk pengurangan $f(x_n)$ dengan $f(y_n)$ diperoleh :

$$f(x_n) - f(y_n) = f'(\alpha)\left(e_n + (2c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right) \tag{19}$$

sehingga perkalian $f'(x_n)$ dengan persamaan (19) memberikan

$$f'(x_n)(f(x_n) - f(y_n)) = \left(f'(\alpha)\right)^2 \left(1 + 2c_2 e_n + (2c_2^2 + 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right) \tag{20}$$

Selanjutnya bagikan Persamaan (13) dengan Persamaan (20) diperoleh :

$$\frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)((f(x_n) - f(y_n))} = e_n - c_2{}^2 e_n^3 + O(e_n^4) \tag{21}$$

Selanjutnya Persamaan (21) disubtitusikan ke Persamaan (9) diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \left(e_n - c_2{}^2 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \tag{22}$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ dan $x_n = e_n + \alpha$, maka persamaan (22) menjadi

$$e_{n+1} = c_2{}^2 e_n^3 + O(e_n^4) \tag{23}$$

Persamaan (23) merupakan orde konvergensi dari metode iterasi yang diberikan pada persamaan (9).

3. Hasil dan Analisis

3.1. Persamaan Iterasi dan Orde Konvergensi

Pandang kembali persamaan metode iterasi Newton-Steffensen pada persamaan yang dikembangkan oleh Sharma (2005), sebagai berikut

$$z_n = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)(f(x_n) - f(y_n))} \tag{24}$$

dengan y_n sebagaimana didefinisikan pada persamaan (4).

Selanjutnya, skema di atas akan diubah menjadi skema tiga langkah dengan mendefinisikan kembali persamaan Newton pada langkah ketiga dalam bentuk

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \tag{25}$$

dengan z_n sebagaimana didefinisikan pada persamaan (24). Merujuk kepada teknik yang digunakan oleh Chun [1] dan Kou [8], bentuk $f'(z_n)$ pada persamaan (25) diaproksimasi dengan menggunakan interpolasi kuadratik $h(x)$. Jika h(x) menginterpolasi titik di (x_n, $f(x_n)$) dan (y_n, $f(y_n)$) serta dengan mengasumsikan $f'(x) = h(x)$, maka diperoleh bentuk interpolasi kuadratik dalam bentuk,

$$f'(x) \approx a(x - x_n)(x - y_n) + f'(y_n)\frac{(x - x_n)}{y_n - x_n} + f'(x_n)\frac{(x - y_n)}{x_n - y_n} \tag{26}$$

Selanjutnya gantikan x pada persamaan (26) dengan z_n maka diperoleh

$$f'(z_n) \approx h(z_n) = a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + f'(y_n)\frac{(z_n - x_n)}{y_n - x_n} + f'(x_n)\frac{(z_n - y_n)}{x_n - y_n} \tag{27}$$

Oleh karena

$$z_n - x_n = \frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)(f(x_n) - f(y_n))} \tag{28}$$

dan

$$z_n - y_n = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)(f(x_n) - f(y_n))} \tag{29}$$

maka dengan mesubstitusikan bentuk $z_n - x_n$ dan $z_n - y_n$ masing-masing pada persamaan (28) dan (29) ke persamaan (27) dan dengan menyederhanakan persamaan, maka diperoleh

$$\begin{aligned} f'(z_n) = {} & a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + f'(y_n)\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}\left(\frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)(f(x_n - f(y_n))}\right) \\ & + f'(x_n)\frac{f'(x_n)}{f(x_n)}\left(1 + \frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)(f(x_n - f(y_n))}\right) \end{aligned} \tag{30}$$

Oleh karena

$$x_n - z_n = \frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)(f(x_n - f(y_n))}$$

maka persamaan (30) dapat diubah kembali menjadi

$$f'(z_n) \approx a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}(f'(x_n) + (x_n - z_n)(f'(x_n) + f'(y_n))) \tag{31}$$

Selanjutnya subtitusikan persamaan (31) ke persamaan (25) sehingga diperoleh metode iterasi Newton-Steffensen baru dengan bentuk

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)f(x_n)}{a(z_n - x_n)(z_n - y_n)f(x_n) + f'(x_n)\left(f'(x_n) + (x_n - z_n)(f'(x_n) + f'(y_n))\right)} \tag{32}$$

dengan z_n dan y_n didefinisikan pada persamaan (24) dan (4).

Persamaan (32) merupakan modifikasi metode Newton-Steffensen tiga langkah menggunakan interpoalsi kuadratik yang memiliki lima evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$, $f(y_n)$, $f'(y_n)$, $f(z_n)$ dan $f'(x_n)$.

Oleh karena persamaan (33) memuat parameter *a*, maka dengan mengganti nilai a akan muncul beberapa metode iterasi baru.

Untuk $a=-1$,

$$x_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)f(x_n)}{f'(x_n)(f'(x_n)+(x_n-z_n)(f'(x_n)+f'(y_n)))-(z_n-x_n)(z_n-y_n)f(x_n)} \quad (33)$$

$a=0$,

$$x_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)f(x_n)}{f'(x_n)(f'(x_n)+(x_n-z_n)[f'(x_n)+f'(y_n))]} \quad (34)$$

dan $a = 1$,

$$x_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)f(x_n)}{(z_n-x_n)(z_n-y_n)f(x_n)+f'(x_n)(f'(x_n)+(x_n-z_n)(f'(x_n)+f'(y_n)))} \quad (35)$$

Selanjutnya, untuk menentukan orde konvergensi persamaan (32) dilakukan dengan menggunakan deret Taylor untuk mengekspansi fungsi yang terlibat pada setiap iterasi. Untuk itu, berikut ini diberikan teorema orde konvergensi persamaan (32).

Teorema 1 : Misalkan $\alpha \in I$ adalah akar dari fungsi $f : I \rightarrow R$ untuk suatu interval terbuka I. Jika x_0 adalah nilai terkaan awal yang cukup dekat ke α maka metode iterasi pada persamaan (4.11) memiliki persamaan galat:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= (2c_2c_3^2+10c_2{}^2c_4-4c_2^3+43c_2^3c_3+6c_2c_3-2c_3c_4+4c_3^2 \\ &\quad +6c_2c_4+75c_2^5-19ac_2^4)e_n{}^6+\mathrm{O}(e_n{}^7) \end{aligned} \quad (36)$$

Bukti : Misalkan $\alpha \in I$ dengan α adalah akar dari $f(x)$ maka $f(\alpha)=0$ dan $f'(\alpha)\neq 0$ dengan menggunakan deret Taylor diperoleh

$$f(x_n)=f'(\alpha)(e_n+c_2e_n{}^2+c_3e_n{}^3+c_4e_n{}^4+O(e_n{}^5) \quad (37)$$

dan turunan pertamanya diberikan

$$f'(x_n)=f'(\alpha)(1+2c_2e_n+3c_3e_n{}^2+4c_4e_n{}^3+O(e_n{}^4)) \quad (38)$$

Berdasarkan persamaan (37) maka kuadrat $f(x_n)$ adalah

$$f^2(x_n)=(f'(\alpha))^2(e_n{}^2+2c_2e_n{}^3+(2c_3+c_2^2)e_n{}^4+O(e_n{}^5)) \quad (39)$$

Selanjutnya persamaan (37) dibagi dengan persamaan (38) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=e_n-c_2e_n^2+(2c_2^2-2c_3)e_n{}^3+(7c_2c_3-3c_4+4c_2^3)e_n{}^4+O(e_n{}^5) \quad (40)$$

Subtitusikan persamaan (40) ke persamaan (4) dan dengan menggunakan persamaan $x_n=e_n+\alpha$ diperoleh

$$y_n=\alpha+c_2e_n^2-(-2c_3+2c_2^2)e_n{}^3-(7c_2c_3-3c_4-4c_2^3+)e_n{}^4+O(e_n{}^5)) \quad (41)$$

Berdasarkan persamaan (41) dan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor terhadap $f(y_n)$ disekitar x_n, maka diperoleh

$$f(y_n)=f'(\alpha)(c_2e_n{}^2+(2c_3-2c_2^2)e_n^3+(5c_2^3-7c_2c_3+3c_4)e_n^4+O(e_n^5) \quad (42)$$

dan turunan pertama $f(y_n)$ adalah

$$f'(y_n)=1+2c_2^2e_n^2+(4c_2c_3-4c_2^3)e_n^3+O(e_n^4) \quad (43)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (37), (38) dan (42), maka perkalian $f'(x_n)$ dengan $(f(x_n)-f(y_n))$ diberikan oleh

$$f'(x_n)(f(x_n)-f(y_n))=(f'(\alpha))^2(1+2c_2e_n+(2c_2^2+2c_3)e_n^2+(2c_4-c_2^3+5c_2c_3)e_n^3+O(e_n^4) \quad (44)$$

Persamaan (44) digunakan untuk menghitung ruas kanan pada persamaan (24), diperoleh

$$\frac{f^2(x_n)}{f'(x_n)(f(x_n)-f(y_n))}=e_n-c_2^2e_n{}^3+O\left(e_n{}^4\right) \quad (45)$$

Subtitusikan persamaan (45) ke persamaan (24), dan menggunakan $x_n=e_n+\alpha$ maka diperoleh

$$z_n=\alpha+c_2^2e_n{}^3+O(e_n{}^4) \quad (46)$$

sehingga dengan menggunakan ekspansi $f(z_n)$ disekitar α maka diperoleh

$$f(z_n)=f'(\alpha)(c_2{}^2e_n{}^3+(c_2^3-2c_4-4c_2c_3)e_n^4+O(e_n^5) \quad (47)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (37), (38), (43) dan (47), maka diperoleh berturut-turut

$$f(z_n)f(x_n)=(f'(\alpha))^2(c_2{}^2e_n{}^4+(2c_2^3-2c_4-4c_2c_3)e_n^5+\mathrm{O}(e_n{}^6) \quad (48)$$

$$f'(x_n)(f'(x_n)+((x_n-z_n)(f'(x_n)-f'(y_n)))=(f'(\alpha))^2\Big((1+(2+4c_2)e_n+(6c_2+4c_2^2+6c_3)e_n^2$$
$$+(9c_3+12c_2c_3+8c_4+4c_2^2)e_n^3+O(e_n{}^4)) \quad (49)$$

$$a(z_n-x_n)(z_n-y_n))f(x_n)=(f'(\alpha))^2((5c_2+2)e_n{}^2+(8c_2^2+7c_3+8c_2)e_n{}^3$$
$$+(11c_3+22c_2c_3+10c_2^2+9c_4+ac_2)e_n{}^3+c_4e_n{}^4+O(e_n{}^5)) \quad (50)$$

sehingga diperoleh

$$a(z_n-x_n)(z_n-y_n)f'(x_n)+f'(x_n)(f'(x_n)+((x_n-z_n)(f'(x_n-f'(y_n)))$$
$$=(f'(\alpha))^2(1+(2+4c_2)e_n^2+(12c_2c_3+4c_2^2+8c_4+ac_2+9c_3)e_n^3+O(e_n{}^4)) \quad (51)$$

Bagikan persamaan (48) dengan persamaan (51) diperoleh

$$\frac{f(z_n)f(x_n)}{a(z_n-x_n)(z_n-y_n)f'(x_n)+\left(f'(x_n)(f'(x_n)+((x_n-z_n)(f'(x_n-f'(y_n)))\right)}=c_2{}^2e_n{}^3+\Big(2c_2c_3^2+10c_2^2c_4$$
$$-4c_2^3+43c_2^3c_3+6c_2c_3-2c_3c_4+4c_3^2+6c_2c_4+75c_2^5-19ac_2^4\Big)e_n{}^6+O(e_n^7)) \quad (52)$$

Dengan mensubtitusikan persaman (52) ke persamaan (32) dan dengan menggunakan bentuk $z_n=\alpha+c_2^2e_n{}^3$, maka diperoleh

$$x_{n+1}=\alpha+(2c_2c_3^2+10c_2{}^2c_4-4c_2^3+43c_2^3c_3+6c_2c_3-2c_3c_4$$
$$+4c_3^2+6c_2c_4+75c_2^5-19ac_2^4)e_n{}^6+O(e_n^7)) \quad (53)$$

Oleh karena $x_{n+1}=e_{n+1}+\alpha$, maka persamaan (53) menjadi

$$e_{n+1}=(2c_2c_3^2+10c_2{}^2c_4-4c_2^3+43c_2^3c_3+6c_2c_3-2c_3c_4+4c_3^2$$
$$+6c_2c_4+75c_2^5-19ac_2^4)e_n{}^6+\mathrm{O}(e_n{}^7) \quad (54)$$

3.2 Simulasi Numerik

Pada subbab ini, akan ditunjukkan peforma metode iterasi pada persamaan (32) untuk menyelesaikan persamaan nonlinier. Oleh karena itu, akan diberikan simulasi numerik menggunakan perangkat lunak Maple 13 dengan ketelitian 800 digit dan kriteria penghentian komputasi jika memenuhi kodisi berikut:

$$|x_{n+1}-\alpha|<e \quad (55)$$

yang bertujuan untuk membandingkan jumlah iterasi beberapa metode iteratif dalam menghampiri akar persamaan nonlinear dan dengan mengambil nilai tebakan awal x_0 sedekat mungkin dengan akar persamaan. Adapun fungsi yang akan digunakan adalah sebagai berikut:

$$f_1(x)=(x-1)^3-2,\ \alpha\approx 2{,}2599210498948731$$

$$f_2(x)=\sin^2(x)-x^2+1,\ \alpha\approx 1{,}4044916482153412$$

$f_3(x) = e^{-x^2+x+2} - 1$, $\alpha \approx -1{,}0000000000000000$

$f_4(x) = (x+2)e^x - 1$, $\alpha \approx -0.4428544010023885$

$f_5(x) = \sin(x)e^x + \ln(x^2+1)$, $\alpha \approx 0{,}0000000000000000$

$f_6(x) = \cos(x) - x$, $\alpha \approx 0{,}7390851332151606$7

Selain menggunakan ekspansi deret Taylor, orde konvergensi metode iterasi dapat ditentukan dengan menggunakan logaritma perbadingan galat yang biasa disebut COC (*computational of order convergence*),

$$\rho = \frac{\ln|(x_{n+2}-\alpha)/(x_{n+1}-\alpha)|}{\ln|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)|} = \frac{\ln|e_{n+2}/e_{n+1}|}{\ln|e_{n+1}/e_n|} \tag{56}$$

Terkait dengan COC untuk persamaan (32) diperlihatkan pada Tabel 1, 2 dan 3 yang masing-masing untuk nilai a = -1, a = 0 dan a = 1.

Tabel 1 Jumlah iterasi, galat mutlak dan COC persamaan (32) dengan $a = -1$

$f(x)$	x_0	N	$\|x_n - \alpha\|$	COC
$f_1(x)$	3	3	2.7173573482828331.10^{-307}	5,9999999987589198
$f_2(x)$	1	3	3,7630544050101519.10^{-692}	5,9999953066552556
$f_3(x)$	-0.7	4	0.0000000000000000.10^{-779}	6,0000003770535676
$f_4(x)$	2	4	7,7020001166416605.10^{-560}	5,9999999999999999
$f_5(x)$	0.7	4	6,1617317930860501.10^{-134}	5,9999999999999999
$f_6(x)$	2	4	7,7020001160396058.10^{-757}	5,9999999999999999

Berdasarkan Tabel 1 diperoleh jumlah iterasi dan nilai COC yang menunjukkan bahwa persamaan (32) untuk $a = -1$ memiliki orde konvergensi enam.

Berikutnya, akan dilakukan simulasi numerik persamaan (32) untuk $a = 0$.

Tabel 2 Jumlah iterasi, galat mutlak dan COC persamaan (32) dengan $a = 0$

$f(x)$	x_0	N	$\|x_n - \alpha\|$	COC
$f_1(x)$	3	4	3,4904943625316722.10^{-364}	5,9999999999999999
$f_2(x)$	1	3	3,7663054405010151.10^{-139}	5,9999289511552534
$f_3(x)$	-0.7	4	2,3564061181195063.10^{-232}	6,0000000003980787
$f_4(x)$	2	4	7,7020001166416605.10^{-222}	5,9999999999999999
$f_5(x)$	0.7	4	6,1617317930860501.10^{-276}	5,9999999999999999
$f_6(x)$	2	4	7,7020001160396055.10^{-100}	5,9999999999999999

Tabel 2 memperlihatkan banyaknya iterasi, galat mutlak dan orde konvergensi yang dihitung secara komputasi. Berdasarkan Tabel 2, dapat dilihat bahwa jumlah iterasi persamaan (32) untuk fungsi-fungsi yang diberikan adalah 4, dan COC persamaan (32) adalah enam. Hasil COC secara komputasi menguatkan hasil orde konvergensi yang telah diperoleh secara analitik. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik persamaan (32) untuk $a = 1$.

Tabel 3 Jumlah iterasi (n), galat mutlak dan COC persamaan (32) dengan $a = 1$

$f(x)$	x_0	N	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	COC
$f_1(x)$	3	4	$3{,}4904943625316722.10^{-498}$	5,9999999999999999
$f_2(x)$	1	3	$3{,}7630544050101515.10^{-86}$	5,9999953066552576
$f_3(x)$	-0.7	3	$1{,}5069178781310186.10^{-97}$	5,9999999987589192
$f_4(x)$	2	3	$2.4626320470954380.10^{-657}$	5,9999684660056966
$f_5(x)$	0.7	3	$5{,}3831346053917008.10^{-66}$	5,9999289511552598
$f_6(x)$	2	3	$6{,}1617317931790605.10^{-337}$	5,9999999999999999

Berdasarkan Tabel 3 dapat diketahui jumlah iterasi dan nilai COC yang menunjukkan bahwa persamaan iterasi (32) untuk $a = 1$ memiliki orde konvergensi enam.

Selanjutnya, akan dilakukan perbandingan jumlah iterasi antara persamaan iterasi (33), (34) dan (35) dengan beberapa metode iterasi lainnya, seperti: metode Newton dengan orde konvergensi dua (NM), metode Steffensen dengan orde konvergensi dua (SM), metode Newton-Steffensen dengan orde konvergensi tiga (NSM), modifikasi metode Newton-Steffensen, dengan $a = -1$ (NSMM1), a = 0 (NSMM2), dan a 1 (NSMM3). Berikut ini adalah tabel perbandingan jumlah iterasi dari beberapa metode tersebut.

Tabel 4 Perbandingan Jumlah Iterasi untuk Beberapa Metode Iterasi

$f(x)$	x_0	Jumlah Iterasi					
		NM	SM	NSM	NSMM1 ($a = -1$)	NSMM2 ($a = 0$)	NSMM3 ($a = 1$)
$f_1(x)$	3	12	19	7	3	4	4
$f_2(x)$	1	11	10	7	3	3	3
$f_3(x)$	-0.7	12	12	7	4	4	3
$f_4(x)$	2	13	Div	9	4	4	3
$f_5(x)$	0.7	13	14	8	4	4	3
$f_6(x)$	2	10	11	6	4	4	3

Tabel 4 menggambarkan perbandingan jumlah iterasi dari berbagai metode sebagamana telah disebutkan sebelumnya dengan menggunakan beberapa fungsi dan nilai awal yang berbeda..

Berdasarkan Tabel 4 dapat disimpulkan bahwa jumlah iterasi pada modifikasi metode Newton-Steffensen (NSMM) pada persamaan (32)untuk $a = -1$, $a = 0$, dan $a = 1$ lebih sedikit dibandingkan dengan metode Newton (NM), metode Steffensen (SM), dan metode Newton-Steffensen (NSM). Sehingga dapat dikatakan bahwa (NSMM) untuk $a = -1$, $a = 0$, dan $a = 1$ memiliki orde konvergensi yang lebih tinggi dari metode lainnya. Hal ini menujukkan bahwa metode NSMM lebih baik dibandingkan metode-metode lainnya.

4. Kesimpulan

Pada makalah ini diperoleh sebuah metode iterasi baru dengan orde konvergensi enam, baik hasil secara analitik maupun komputasi (COC) untuk sembarang nilai parameter a, dan melibatkan lima evaluasi fungsi, yaitu $f(x_n)$, $f(y_n)$, $f'(y_n)$, $f(z_n)$ dan $f'(x_n)$, sehingga diperoleh indeks efisiensi sebesar $6^{1/5} \approx$ 1,43097. Jika dibandingkan dengan metode Newton yang indeks efisiennya sebesar $\sqrt{2} \approx$ 1, 41421, maka metode iterasi persamaan (32) lebih efisien dibandingkan metode Newton.

Referensi

[1] Chun, C., “Some Improvements of Jarrat’s Method with Sixth-order Convergence” , *Applied Mathematics and Computation.* 2007, 190: 1432 – 1437
[2] Deghan, M. dan Hajarian, M., Some Derivative Free Quadratic and Cubic Convergence Iterative Formulas for Solving Nonlinear Equations, *Computational and Applied Mathematics*, 2010, 29(1): 19 – 30.
[3] Epperson, J. F., *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*, United States of America: Wiley, 2013,
[4] Hafiz, M. A., Solving Nonlinear Equations Using Steffensen-Type Methods with Optimal Order of Convergence, *Palestine Journal of Mathematics*, 2014, 3(1): 113 – 119.
[5] Hafiz, M. A dan Bahgat, M. S. M., Solving Nonsmooth Equations Using Family of Derivative-Free Optimal Methods, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 2013, 21: 38 – 43.
[6] Hajjah, A., Imran, M. dan Gamal, M.D.H., A Two-step Iterative Method Free from Derivative for Solving Nonlinear Equations, *Applied Mathematical Sciences*, 2014, 8(161): 8021 – 8027.
[7] Jaiswal, J.P., 2013, “A New Third-order Derivative Free Method for Solving Nonlinier Equations”, *Universal Journal of Applied Mathematics*, 2013, 1(2), 31 – 135 .
[8] Kou, J. dan Yitian Li, 2007, “An Improvement of the Jarrat Method”, *Applied Mathematics and Computatio,* No. 189, Hal. 1816-1821.
[9] Liu, Z dan Zheng, Q., A One-step Steffensen-type Method with Super-cubic Convergence for Solving Nonlinear Equations, Procedia Computer Science, 2014, 29: 1870 – 1875.
[10] Sharma, J.R, A Composite Third Order Newton-Steffensen Method for Solving Nonlinier Equations, *Applied Mathematics and Computation*, 2005, 169 : 242 – 246.
[11] Soleymani, F dan Hosseinabadi, V., New-Third and Sixth-Order Derivative-Free Techniques for Nonlinear Equations, *Journal of Mathematics Research*, 2011, 3(2): 107 – 112.
[12] Traub, J. F., Iterative Methods for the Solution of Equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.