Kestabilan Model SIRS dengan Pertumbuhan Logistik dan *Non-monotone Incidence Rate*

Mohammad soleh[1], Syamsuri[2]
[1,2]Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Suska Riau
Jln. HR. Soebrantas Km 15, Panam-Pekanbaru, Riau
e-mail: msoleh1975@yahoo.co.id

Abstrak

Pada makalah ini dibahas tentang penyebaran penyakit menular menggunakan model SIRS. Kebanyakan penelitian tentang model SIRS menggunakan pertumbuhan eksponensial, dengan laju penularan bilinear, sehingga pada makalah ini dipertimbangkan menggunakan pertumbuhan logistic dan laju penularan nonmonoton. Model SIRS yang dibentuk mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan ditentukan dengan menyelesaikan persamaan pada model. Masing-masing titik kesetimbangan diuji kestabilannya dengan kriteria nilai eigen. Hasil yang diperoleh yaitu jika $R_0 < 1$ titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik, sebaliknya jika $R_0 > 1$ titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik.

Kata kunci: Model SIRS, Pertumbuhan Eksponensial, Pertumbuhan Logistik, Stabil, Titik Kesetimbangan.

Abstract

This paper discussed about mathematical modeling on the spread of infectious diseases by SIRS model. Most research about SIRS models is using exponential growth, so we propose SIRS model with logistic growth. This model has two equilibrium states: disease-free equilibrium and endemic state. Both equilibrium state are determined by solving the equations in the model. Each equilibrium state tested stability criteria eigen values. Our result obtained that if $R_0 < 1$ *then a free equilibrium state is asymptotically stable, otherwise if* $R_0 > 1$ *then an endemic state is asymptotically stable.*

Keywords : *Asymptotically Stable, Equilibrium State, Exponential Growth, Logistic Growth, SIRS Model.*

1. Pendahuluan

Penyakit menular merupakan salah satu masalah serius dalam kehidupan manusia karena bisa menyebabkan kematian. Dampak kematian inilah yang sangat merugikan dan meresahkan masyarakat. Beberapa penyakit menular yang bisa menimbulkan kematian antara lain adalah HIV, demam berdarah, TBC dan lain-lain. Penyebaran penyakit disebabkan beberapa faktor antara lain lingkungan yang kurang bersih, seks bebas, migrasi dan lain-lain.

Model dasar penyebaran penyakit ini pertama kali diusulkan oleh Kermack dan Mc Kendrick pada tahun 1927 (Yulida, 2011). Model dasar yang diusulkannya adalah model SIR. Model SIR adalah model penyebaran penyakit yang membagi populasi menjadi tiga kelas yaitu kelas *susceptible* (*S*) merupakan kelas yang berisikan individu yang rentan terhadap penyakit, kelas kedua yaitu *infectible* (*I*) yakni kelas yang berisikan individu yang telah terinfeksi oleh penyakit dan mampu menularkan penyakit yang dibicarakan, sedangkan kelas ketiga yaitu *recovered* (*R*) yakni kelas yang berisikan individu yang sembuh dan memiliki kekebalan permanen dari penyakit yang dibicarakan. Model SIR berkembang menjadi beberapa model matematika diantaranya model SIRS, SIS, SI (Yulida, 2011).

Penelitian tentang model penyebaran penyakit model SIRS antara lain adalah pada jurnal matematika yang berjudul *Global Dinamic of an Epidemic Model with a Ratio-Dependent Nonlinear Incidence Rate* (Yuan, 2009). Jurnal yang berjudul *A SIRS Epidemic Model Incorporating Media Coverage with Random Perturbation* (Liu, 2013). Kemudian jurnal matematika yang berjudul *Bifurcations of an SIRS Epidemic Model with Nonlinear Incidence Rate* (Hu, 2011). Jurnal lainnya yang berjudul *Dynamic Behavior for an SIRS Model with Nonlinear Incidence Rate and Treatment* (Li, 2013).

2. Metode Riset

Metode riset pada makalah ini adalah pengembangan dari [3], dengan mengganti asumsi pertumbuhan eksponensial menjadi pertumbuhan logistik, adanya migrasi, dan adanya treatment. Eksistensi titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik di cari dengan menganalisis sistem persamaan differensial model [7]. Kestabilan titik ekuilibrium diinvestigasi dengan menggunakan kriteria nilai eigen matriks Jacobian [7] untuk menemukan sifat penyebaran penyakit yang dibicarakan.

3. Hasil dan Pembahasan.

Untuk model SIRS ini, populasi dibagi menjadi tiga kelompok yaitu *suspectible,* yaitu kelas yang berisikan individu yang rentan terhadap penyakit yang dibicarakan*, infectible* yaitu kelas yang berisikan individu yang telah terinfeksi penyakit dan mampu menularkan, dan yang terakhir kelas *recovered* yaitu kelas yang sembuh terhadap penyakit yang dibicarakan. Pada model SIRS individu hanya mengalami kekebalan sementara, dengan kata lain setelah individu memasuki kelas *recovered* ia akan masuk kembali pada kelas rentan atau kelas *suspectible*.

Untuk tak meluas pembahasannya, beberapa asumsi atau catatan yang diberikan pada model ini adalah: pertumbuhan logistic, populasi tertutup, penyakit dapat disembuhkan, laju penularan dinyatakan dengan $0 < \alpha \leq 1$, laju penyembuhan diperhatikan, dinyatakan dengan $\mu > 0$, individu yang sembuh dari penyakit yang dibicarakan masuk kembali kekelas rentan atau *suspectible* (*S*), dinyatakan dengan $\gamma > 0$, individu yang sembuh hanya mengalami kekebalan sementara, hanya ada satu jenis penyakit. Dengan demikian berdasarkan [3] dibentuk model SIRS dengan pertumbuhan logistic dan *nonmonotone incidence rate*:

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= rN\left(1-\frac{N}{k}\right) - \frac{kIS^2}{S^2+\alpha I^2} + \gamma R \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{kIS^2}{S^2+\alpha I^2} - \mu I \\
\frac{dR}{dt} &= \mu I - \gamma R \\
S + I + R &= N
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

3.1 Keadaan Setimbang

Terdapat dua keadaan setimbang yaitu ek*uilibrium* bebas penyakit dan ekuilibrium endemic. Titik *ekuilibrium* bebas penyakit dinotasikan dengan (S^*, I^*) sedangkan endemik dinotasikan dengan $(\hat{S}, \hat{I})$. Dengan menyelesaikan model (1), didapat $(S^*, I^*) = (k, 0)$ dan $(\hat{S}, \hat{I}) = \left(\sqrt{\frac{\mu\alpha}{k-\mu}}\,\hat{I}, \frac{k}{1+\frac{\mu}{\gamma}+\sqrt{\frac{\mu\alpha}{k-\mu}}}\right)$.

3.2 Kestabilan Keadaan Setimbang

Matriks Jacobian untuk model (1) adalah:

$$
J(S,I) = \begin{bmatrix} r - \frac{2r}{k}(S+I+R) - 2kI\left(\frac{\alpha I^2 S}{(S^2+\alpha I^2)^2}\right) & r - \frac{2r}{k}(S+I+R) - kS^2\left(\frac{S^2-\alpha I^2}{(S^2+\alpha I^2)^2}\right) \\ 2kI\left(\frac{\alpha I^2 S}{(S^2+\alpha I^2)^2}\right) & kS^2\left(\frac{S^2-\alpha I^2}{(S^2+\alpha I^2)^2}\right) - \mu \end{bmatrix} \qquad (2)
$$

Definisikan Angka Reproduksi Dasar:

$$R_0 = \frac{k}{\mu}$$

Teorema 1: Titik kesetimbangan bebas penyakit $(S^*, I^*) = (k, 0)$ stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$.

Bukti: Berdasarkan matriks Jacobian (2) bahwa

$$
J(S^*, I^*) = \begin{bmatrix} -r\left(1+\frac{2R}{k}\right) & -r\left(1+\frac{2R}{k}\right) - k \\ 0 & k-\mu \end{bmatrix}
$$

Diperoleh persamaan karakteristik: $\left(\lambda + r\left(1+\frac{2R}{k}\right)\right)(\lambda - (k-\mu)) = 0$, sehingga

$\lambda_1 = -r\left(1+\frac{2R}{k}\right) < 0$ dan $\lambda_2 = k - \mu = \frac{k}{\mu} - 1 = R_0 - 1$

Jika $R_0 < 1$ maka λ_2 bernilai real negatif, sehingga berdasarkan Teorema 1 terbukti titik kesetimbangan $(S^*, I^*) = (k, 0)$ stabil asimtotik lokal, jika $R_0 < 1$, ini artinya pada waktu yang lama dalam populasi tidak ada individu yang terinfeksi penyakit.

b). Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit $(\hat{S}, \hat{I})$=$\left(\sqrt{\frac{\mu\alpha}{k-\mu}}\ \hat{I}, \frac{k}{1+\frac{\mu}{\gamma}+\sqrt{\frac{\mu\alpha}{k-\mu}}}\right)$

Teorema 2: Titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{S}, \hat{I})$ stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.
Bukti :
Berdasarkan matriks Jacobian (2) diperoleh persamaan karakteristik:

$$\lambda^2 + \lambda\left(r + 2k\left(\frac{\alpha\left(\sqrt{\frac{\alpha}{R_0-1}}\right)}{\left(\frac{\alpha}{R_0-1}+\alpha\right)^2}\right) + \mu - k\left(\frac{\alpha}{R_0-1}\right)\left(\frac{\left(\frac{\alpha}{R_0-1}-\alpha\right)}{\left(\frac{\alpha}{R_0-1}+\alpha\right)^2}\right)\right) + r\left(\mu - k\left(\frac{\alpha}{R_0-1}\right)\left(\frac{\left(\frac{\alpha}{R_0-1}-\alpha\right)}{\left(\frac{\alpha}{R_0-1}+\alpha\right)^2}\right)\right) + 2k\left(\frac{\alpha\left(\sqrt{\frac{\alpha}{R_0-1}}\right)}{\left(\frac{\alpha}{R_0-1}+\alpha\right)^2}\right)(r+\mu) = 0 \qquad (3)$$

Misalkan,

$$Z = k\left(\frac{\alpha}{R_0-1}\right)\left(\frac{\left(\frac{\alpha}{R_0-1}-\alpha\right)}{\left(\frac{\alpha}{R_0-1}+\alpha\right)^2}\right)$$

$$X = 2k\left(\frac{\alpha\left(\sqrt{\frac{\alpha}{R_0-1}}\right)}{\left(\frac{\alpha}{R_0-1}+\alpha\right)^2}\right)$$

Maka persamaan menjadi :

$$\lambda^2 + \lambda(r + X + \mu - Z) + r(\mu - Z) + X(r+\mu) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(r+X+\mu-Z) \pm \sqrt{(r+X+\mu-Z)^2 - 4r(\mu-Z)+X(r+\mu)}}{2}$$

Dengan

$$r + X + \mu - Z = \left(\frac{\alpha k}{\left(\frac{\alpha}{R_0-1}+\alpha\right)^2}\right)\left(2\left(\sqrt{\frac{\alpha}{R_0-1}}\right) - \frac{1}{R_0-1}\left(\frac{\alpha}{R_0-1} - \alpha\right)\right)$$

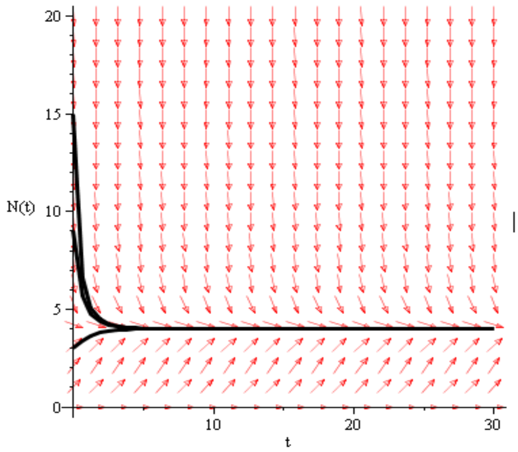
$$r(\mu - Z) + X(r+\mu) = r\mu - rk\left(\frac{\alpha}{R_0-1}\right)\left(\frac{\left(\frac{\alpha}{R_0-1}-\alpha\right)}{\left(\frac{\alpha}{R_0-1}+\alpha\right)^2}\right) + 2rk\left(\frac{\alpha\left(\sqrt{\frac{\alpha}{R_0-1}}\right)}{\left(\frac{\alpha}{R_0-1}+\alpha\right)^2}\right) + 2k\left(\frac{\alpha\left(\sqrt{\frac{\alpha}{R_0-1}}\right)}{\left(\frac{\alpha}{R_0-1}+\alpha\right)^2}\right)\mu$$

Jika $R_0 > 1$ maka bagian real λ_1 dan λ_2 bernilai negatif. Sehingga berdasarkan Teorema 2 terbukti titik kesetimbangan endemik penyakit stabil asimtotik jika $R_0 > 1$, Ini artinya pada waktu yang lama dalam populasi selalu ada individu yang terinfeksi penyakit.

4. Simulasi

Ambil parameter: $r = 1\,; k = 4\,;\ \mu = 2\,; \alpha = 1\,; \gamma = 0{,}5$.
Populasi akan setimbang sebagai:

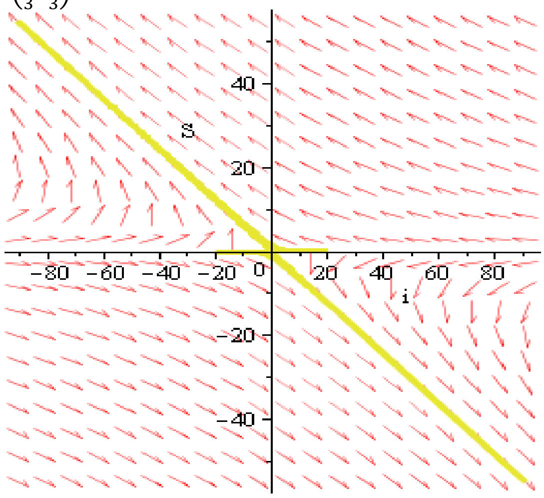
$$\lim_{t\to\infty} N(t) = 4$$



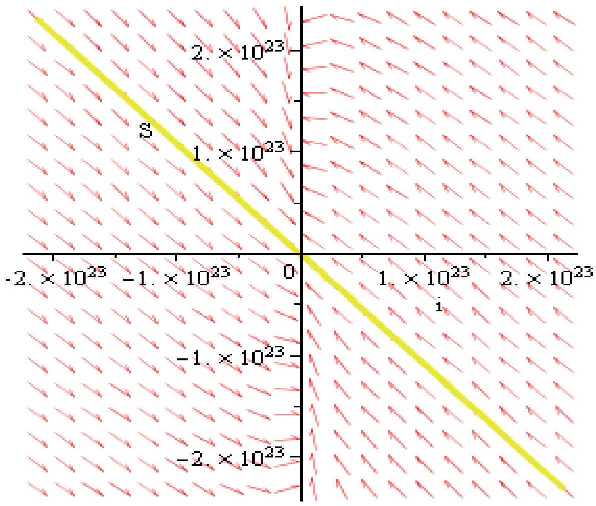
Gambar 1. Dinamika Pertumbuhan Populasi

a. Keadaan Setimbang dan kestabilan keadaan setimbang

Dengan substiusi nilai-nilai parameternya, diperoleh titik *equilibrium* bebas penyakit (S^*, I^*) = $(4,0)$ dan endemik $(\hat{S}, \hat{I}) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.



Gambar 2. Kestabilan bebas penyakit



Gambar 3. Kestabilan Endemik Penyakit

Bagian simulasi diperoleh $R_0 = 2 > 1$, jadi berdasarkan Teorema 2 maka titik *equilibrium* endemik penyakit stabil asimtotik. Ini terlihat dari Gambar 3 dengan arah panah menuju ke titik *equilibrium* endemik penyakit. Kondisi ini menunjukkan bahwa pada waktu yang lama dalam suatu populasi selalu ada individu yang terinfeksi penyakit.

Referensi

[1] Darlina, L. 2012. Kestabilan Titik *Equilibrium* Model SIR (*Suspectible, Infectible, Recovered*) Penyakit Fatal dengan Migrasi. *Tugas Akhir Mahasiswa UIN SUSKA Riau,* Pekanbaru.
[2] Hale, J. K. dan Kocak, H. 1991. *Dynamic Bifurcation,* Springer-Verlag, New York.
[3] Hu, Z. Dkk. 2011. *Bifurcations of an SIRS Epidemic Model with Nonlinear Incidence Rate*. Department of Applied Mathematics and Mechanics University of Science and Technology Beijing, Beijing, China.
[4] Lesmana, R. *Analisis Dinamik Model Penyebaran Virus Komputer dengan Intervensi Manusia.* FMIPA, Universitas Brawijaya, Malang. Indonesia.
[5] Li, J. dan Cui, Ning. 2013. *Dynamic Behavior for an SIRS Model with Nonlinear Incidence Rate and Treatment*. Department of Mathematics and Sciences, Hebei Institute of Architecture & Civil Engineering, Zhangjiakou, Hebei, China.
[6] Liu, W. 2013. *A SIRS Epidemic Model Incorporating Media Coverage with Random Perturbation*. College of Physics and Electronic Information Engineering, Wenzhou University, Wenzhou, China.
[7] Perko, L. 1991. *Differnsial Equations and Dynamical Systems,* Springer-Verlag, New York.
[8] Siregar, P. 2012. Model SIS dengan Pertumbuhan Logistik dan Migrasi. *Tugas Akhir Mahasiswa UIN SUSKA Riau,* Pekanbaru.
[9] Wiraningsih, E. D dan Widodo dan Aryati, Lina dan Toaha, Syamsudin. 2008. *Model SIS dengan Pertumbuhan Logistik*, Jakarta.
[10] Yuan, S dan Li, Bo . 2009. *Global Dynamics of an Epidemik Model with a Ratio-Dependent Nonlinear Incidence Rate*, College of Science, Shanghai University for Science and Technology, China.
[11] Yulida, Y, Faisal dan Ahsar K, Muhammad. 2011. *Analisis Kestabilan Global Model Epidemik SIRS Menggunakan Fungsi Lyapunov*, Unlam, Banjarbaru.