

# Kestabilan Model SIS dengan *Non-monotone Incidence Rate & Treatment*

**Mohammad Soleh**

Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Suska Riau  
Jln. HR. Soebrantas Km 15, Panam-Pekanbaru, Riau  
e-mail: msoleh1975@yahoo.co.id

## Abstrak

Pada makalah ini diadopsi laju penularan *non-monoton incidence rate*, pertumbuhan logistik, migrasi, dan adanya treatment untuk model SIS. Beberapa sifat semula yang menggunakan laju insidensi penularan bilinear akan tetap tercover dalam model yang baru. Keberadaan dan stabilitas titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik diinvestigasi untuk mengetahui sifat-sifat mendasar dari model. Keberadaan titik ekuilibrium dicari dengan menyelesaikan sistem persamaan differensial sedangkan kestabilannya masing-masing ditentukan dengan kriteria nilai eigen. Berdasarkan perhitungan diperoleh satu titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik yang masing-masing akan stabil asimtotik jika memenuhi syarat tertentu.

**Kata kunci:** Bebas Penyakit, Endemik, Kestabilan, Model SIS, *Non Monoton Incidence Rate*.

## Abstract

*Our paper proposed a non monoton incidence rate, logistic growth, migration, and under treatment for SIS model. The character of originally SIS model which using bilinear insience rate will cover by new model. An existences and stabilities of free disease state and endemic are investigated to explore the characteristic of model. The existence of equilibrium point is founded by solving differential equation of the model and their stability are explored by an eigen criteria. We obtained that only one free disease state and endemic which asimtotycal stable by condition.*

**Key words:** Endemic state, Free Disease state, Non Monoton Incidence Rate, SIS Model, treatment.

## 1. Pendahuluan

Tuber culosis (TBC), peunomia, meningitis, pertusis, shypilis, dan gonorhea, merupakan penyakit-penyakit yang dapat menyerang kembali orang yang sudah sembuh dari penyakit tersebut. Dengan lain kata, individu yang telah terbebas dari penyakit tertentu seperti di atas, tidak memiliki kekebalan untuk tak terjangkau lagi. Begitu individu sembuh dari sakit itu, individu tersebut kembali langsung rentan terhadap virus/bakterinya. Hal demikian berbeda dengan penyaki campak, cacar, cacar air, gondok, ataupun rubella, yang tidak menimbulkan resiko tertular lagi bagi orang yang telah sembuh.

Model epidemi SIS (*Susceptible, Infectives, Susceptible*) adalah model matematika untuk penyakit yang tidak memberikan kekebalan kepada penderitanya setelah sembuh. Model ini merupakan pengembangan dari model SIR (*Susceptible, Infectives, Recover*) oleh Kermack & Mckendrick [4], yaitu mengeliminasi kelas *R* karena waktu kebalnya sangat singkat.

Secara umum model SIS dan yang lainnya disusun secara deterministik, mengasumsikan populasi konstan, dan homogen dengan laju penularan berbentuk bilinear  $g(I)S = \beta IS$ . Laju penularan  $g(I)S = \beta IS$  menyatakan bahwa perubahan jumlah individu rentan menjadi terinfeksi berbanding secara linear terhadap *I* atau *S*. Semakin banyak individu yang sakit maka semakin banyak individu yang dapat tertular.

Dalam perkembangannya laju penularan bilinear tidak cocok dengan situasi sebenarnya karena asumsi homogen yang sulit terpenuhi. Disamping itu juga faktor psikologis akan mempengaruhi populasi ketika jumlah individu terinfeksi terlalu banyak. Biasanya akan dilakukan penanganan untuk mengurangi penularan penyakit. Efek ini dikenal sebagai *Saturation effect*, yaitu keadaan ketika jumlah individu sakit membesar tetapi jumlah individu tertular menurun.

Capasso & Serio (1973) mengusulkan bentuk lain laju penularan. Bentuk yang diusulkannya adalah mengganti asumsi bilinear menjadi nonlinear  $\frac{\beta IS}{1+kI}$ , dengan  $k$  bilangan positif. Dengan demikian jumlah kejadian individu rentan menjadi terinfeksi tidak lagi linear terhadap  $I$  tetapi sedikit lebih lambat dari  $I$ . Kemudian bentuk ini dikembangkan lagi oleh Ruan & Xio menjadi  $\frac{\beta IS}{1+kI^2}$ . Selanjutnya diperumum oleh beberapa matematikawan, seperti oleh Liu et.all (2002), Moghadas et.all (2010), dan Gupta et.all (2012) menjadi  $\frac{\beta I^p S}{1+kI^p}$ , dengan  $p$  positif. Chufen Wu et.all (2010) mengusulkan bentuk yang lebih umum yaitu  $aU(S)I$  sebagai *general non monotone incidence rate*. Di lain pihak, Kar et.all (2010) mengajukan bentuk lain  $\frac{\beta IS}{1+k_1I+k_2I^2}$ . Untuk selanjutnya bentuk-bentuk  $\frac{\beta IS}{1+kI}$ ,  $\frac{\beta IS}{1+kI^2}$ ,  $\frac{\beta I^p S}{1+kI^p}$ ,  $aU(S)I$ , dan juga  $\frac{\beta IS}{1+k_1I+k_2I^2}$  dikenal sebagai *non monotone incidence rates*.

Pada umumnya juga model yang telah dibahas mengasumsikan populasi tertutup dengan sumber daya tak terbatas. Padahal adanya migrasi (imigrasi dan emigrasi) dan keterbatasan sumber daya lingkungan merupakan keniscayaan pada suatu populasi. Disamping itu adanya *treatment* sangat menentukan penyebaran penyakit. Penulis menambahkan kedua asumsi tersebut pada model SIS untuk memperkaya sifat dinamik model.

## 2. Metode Riset

Metode riset pada makalah ini adalah pengembangan dari Soleh [10], dengan mengganti asumsi pertumbuhan eksponensial menjadi pertumbuhan logistik, adanya migrasi, dan adanya *treatment*. Eksistensi titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik di cari dengan menganalisis sistem persamaan differensial model [9]. Kestabilan titik ekuilibrium diinvestigasi dengan menggunakan kriteria nilai eigen matriks Jacobian [9] untuk menemukan sifat penyebaran penyakit yang dibicarakan.

## 3. Hasil dan Pembahasan.

Diberikan model SIS [10]. Terlebih dulu populasi dibagi menjadi dua kelas yaitu kelas *susceptible* atau kelas yang berisi individu-individu rentan terhadap penyakit, dan kelas *infectives* atau kelas yang berisi individu-individu terinfeksi penyakit dan dapat menularkan penyakit. Jika  $N(t)$  menyatakan jumlah populasi pada saat  $t$ ,  $S(t)$  jumlah individu yang *suspect* pada saat  $t$ , dan  $I(t)$  menyatakan jumlah individu terinfeksi pada saat  $t$ , maka  $N(t) = S(t) + I(t)$  atau dalam bentuk proporsi  $S(t) + I(t) = 1$ . Dengan mengganti laju pertumbuhan logistik dan adanya migrasi pada model (1) maka diperoleh model SIS:

$$\frac{dS}{dt} = N(a - bN) - \frac{\beta SI}{1 + k_1 I + k_2 I^2} + (\rho_1 - \rho_2)S + \gamma I \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + k_1 I + k_2 I^2} + (\rho_1 - \rho_2 - \gamma)I$$

$$N = S + I.$$

dengan  $\mu, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \gamma$  semuanya bilangan positif. Terlihat bahwa model (1) mempunyai  $\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = 0$ , yang berarti jumlah populasi selalu konstan. Dengan  $\rho_1, \rho_2$  masing-masing laju imigrasi dan laju emigrasi, dan  $N(a - bN)$  merupakan laju pertumbuhan logistik. Terlihat bahwa model (2) mempunyai  $\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} \neq 0$ , yang berarti jumlah populasi tidak konstan.

Kemudian dengan substitusi adanya *treatment*/penanganan terhadap individu terinfeksi sebesar:

$$T(I) = \begin{cases} rI, & 0 \leq I \leq I_0 \\ m, & I > I_0 \end{cases}$$

dengan  $m = rI_0$  dan  $r > 0$ , maka model (1) akan berubah menjadi:

$$\frac{dS}{dt} = N(a - bN) - \frac{\beta SI}{1 + k_1 I + k_2 I^2} + (\rho_1 - \rho_2)S + \gamma I + T(I) \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + k_1 I + k_2 I^2} + (\rho_1 - \rho_2 - \gamma)I - T(I)$$

$$N = S + I.$$

### 3.1 Keadaan Setimbang

Keadaan setimbang dari model (2) yaitu keadaan bebas penyakit dan keadaan endemik penyakit yang masing-masing disebut titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Kedua keadaan tersebut dijelaskan pada teorema sebagai berikut:

**Teorema 1:** Jika  $0 \leq I \leq I_0$  maka selalu terdapat satu titik ekuilibrium bebas penyakit pada model (2) dan jika  $\rho_1 < \rho_2 + \gamma < \rho_1 + \beta N^*$  maka model (2) memiliki satu titik ekuilibrium endemik.

Bukti: dengan menggunakan hubungan  $S = N - I$ , maka model (2) akan mempunyai titik ekuilibrium bebas penyakit  $(N^*, I^*)$ ;  $\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt}$  atau  $N^* = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{a + \rho_1 - \rho_2}{b}$ , sehingga  $(N^*, I^*) = \left(\frac{a + \rho_1 - \rho_2}{b}, 0\right)$ . Untuk keberadaan titik ekuilibrium endemik model (2) diperoleh dengan cara, diketahui bahwa  $S^* = N^* - I^*$ ,

$$\frac{\beta S^* I^*}{1 + k_1 I^* + k_2 I^{*2}} + (\rho_1 - \rho_2 - \gamma)I^* - rI^* = 0 \Leftrightarrow (-\rho_1 + \rho_2 + \gamma + r)k_2 I^{*2} + (\beta + k_2(-\rho_1 + \rho_2 + \gamma + r))I^* - \beta N^* + (-\rho_1 + \rho_2 + \gamma + r) = 0.$$

Misalkan  $p = -\rho_1 + \rho_2 + \gamma + r$ , maka

$$\hat{I} = \frac{-(\beta + k_2 p) \pm \sqrt{(\beta + k_2 p)^2 + 4k_2 r(\beta N^* - p)}}{2k_2 p} \quad (3)$$

Dengan demikian benar jika  $\rho_1 < \rho_2 + \gamma + r < \rho_1 + \beta N^*$  benar bahwa terdapat satu titik ekuilibrium endemik penyakit untuk model (2). Titik keseimbangan endemik tersebut dapat ditulis sebagai  $(\hat{N}, \hat{I})$ , dengan  $\hat{I}$  merupakan akar positif dari persamaan (3).

**Teorema 2:** Jika  $I > I_0$  maka selalu terdapat satu titik ekuilibrium bebas penyakit pada model (2) dan jika  $I^2 < \frac{1}{2k_2}$  dan  $\rho_2 + \gamma < \rho_1$  maka model (2) memiliki satu titik ekuilibrium endemik.

Bukti: Ketika jumlah individu yang terinfeksi meningkat dibanding jumlah terinfeksi mula-mula atau  $I > I_0$  dengan  $T(I) = rI_0$ , maka model (2) akan menjadi:

$$\frac{dS}{dt} = N(a - bN) - \frac{\beta SI}{1 + k_1 I + k_2 I^2} + (\rho_1 - \rho_2)S + \gamma I + rI_0 \quad (4)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{1 + k_1 I + k_2 I^2} + (\rho_1 - \rho_2 - \gamma)I - rI_0$$

$$N = S + I.$$

$$N(a - bN) - \frac{\beta SI}{1 + k_1 I + k_2 I^2} + (\rho_1 - \rho_2)S + \gamma I + rI_0 = 0$$

$$\frac{\beta SI}{1 + k_1 I + k_2 I^2} + (\rho_1 - \rho_2)I - \gamma I - rI_0 = 0.$$

Untuk keadaan bebas penyakit yaitu  $I = 0$ , maka  $N^*(a - bN^*) - \frac{\beta S^* I^*}{1 + k_1 I^* + k_2 I^{*2}} + (\rho_1 - \rho_2)S^* + \gamma I^* + rI_0 = 0$ , menyebabkan  $N^*(a - bN^*) + (\rho_1 - \rho_2)S^* + rI_0 = 0$ . Karena  $N^* = S^* + I^* = S^*$ , maka  $S^*(a - bS^*) + (\rho_1 - \rho_2)S^* + rI_0 = 0$ , sehingga titik ekuilibrium bebas penyakit yang diperoleh adalah  $(S^*, 0)$ , dengan

$S^*$  merupakan akar positif dari  $bS^{*2} - (a + \rho_1 - \rho_2)S^* - rI_0 = 0$ . Terbukti ada satu titik ekuilibrium bebas penyakit untuk model 4.

Sementara itu untuk mendapatkan titik ekuilibrium endemik diperoleh dengan cara sebagai berikut:

$$\frac{\beta \hat{S} \hat{I}}{1+k_1 \hat{I}+k_2 \hat{I}^2} + (\rho_1 - \rho_2 - \gamma) \hat{I} - r I_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{\beta \hat{S}}{1+k_1 \hat{I}+k_2 \hat{I}^2} + (\rho_1 - \rho_2 - \gamma) \right) \hat{I} = r I_0$$

Ambil pemisalan  $f(I) = \left( \frac{\beta S}{1+k_1 I+k_2 I^2} + (\rho_1 - \rho_2 - \gamma) \right) I$ , dan  $g(I) = r I_0$ , maka  $f'(I) = \frac{\beta S(1-2k_2 I^2)}{(1+k_1 I+k_2 I^2)^2} + (\rho_1 - \rho_2 - \gamma)$ . Nampak bahwa  $f'(I) > 0$  jika hanya jika  $I^2 < \frac{1}{2k_2}$  dan  $\rho_2 + \gamma < \rho_1$ . Dengan demikian jika  $I^2 < \frac{1}{2k_2}$  dan  $\rho_2 + \gamma < \rho_1$  terpenuhi sehingga  $f'(I) > 0$  menyebabkan  $f$  fungsi monoton naik dan  $g$  fungsi konstan, maka selalu terdapat satu titik ekuilibrium endemik  $(\hat{N}, \hat{I})$ .

### 3.2 Kestabilan keadaan setimbang

**Teorema 3:** titik keseimbangan bebas penyakit  $(S^*, I^*) = \left( \frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}, 0 \right)$  stabil asimtotik jika  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\beta(a + \rho_1 - \rho_2) < b(-\rho_1 + \rho_2 + \gamma + r)$ .

Untuk kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dihitung sebagai:

$$J(S^*, 0) = \begin{pmatrix} \rho_1 - \rho_2 & -\beta S^* + \gamma + r \\ 0 & \beta S^* + \rho_1 - \rho_2 - \gamma - r \end{pmatrix}.$$

Diperoleh nilai eigen matriks Jacobian  $J(S^*, 0)$ :

$$(\lambda - (\rho_1 - \rho_2))(\lambda - (\beta S^* + \rho_1 - \rho_2 - \gamma - r)) = 0, \text{ menyebabkan}$$

$$\lambda_1 = \rho_1 - \rho_2 < 0 \Leftrightarrow \rho_1 < \rho_2,$$

$$\lambda_2 = \beta S^* + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \Leftrightarrow \beta S^* < -\rho_1 + \rho_2 + \gamma + r,$$

Terbukti bahwa jika  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\beta(a + \rho_1 - \rho_2) < b(-\rho_1 + \rho_2 + \gamma + r)$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik.

**Teorema 4:** Jika  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\hat{I}^2 > \frac{1}{k_2}$  maka titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik.

Bukti: pandang kembali titik ekuilibrium endemik  $(\hat{S}, \hat{I})$ , dimana  $\hat{S} = \hat{N} - \hat{I}$  dengan  $\hat{I}$  merupakan akar positif dari persamaan (3). Misalkan  $x = 1 + k_1 \hat{I} + k_2 \hat{I}^2$ , dan  $y = \beta S(1 - k_2 \hat{I}^2)$ , maka matriks  $J(\hat{S}, \hat{I})$  dapat ditulis ulang sebagai:

$$J(\hat{S}, \hat{I}) = \begin{pmatrix} -\frac{\beta \hat{I}}{x} + \rho_1 - \rho_2 & \frac{\beta S y}{x^2} + \gamma \\ \frac{\beta \hat{I}}{x} & -\frac{\beta S y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma - r \end{pmatrix}.$$

Sehingga nilai eigen-nilai eigen matriks  $J(\hat{S}, \hat{I})$  dapat ditentukan dengan menyelesaikan persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \left( -\frac{\beta \hat{I}}{x} - \frac{\beta S y}{x^2} + 2\rho_1 - 2\rho_2 - \gamma \right) \lambda + \left( -\frac{\beta \hat{I}}{x} + \rho_1 - \rho_2 \right) \left( -\frac{\beta S y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma - r \right) - \frac{\beta \hat{I}}{x} \left( \frac{\beta S y}{x^2} + \gamma \right) = 0$$

Karena berdasarkan Teorema 3,  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\hat{I}^2 > \frac{1}{k_2}$ , maka

$$A = -\frac{\beta \hat{I}}{x} - \frac{\beta S y}{x^2} + 2\rho_1 - 2\rho_2 - \gamma < 0, B = -\frac{\beta \hat{I}}{x} + \rho_1 - \rho_2 < 0, C = -\frac{\beta S y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma - r < 0, D = \frac{\beta \hat{I}}{x} \left( \frac{\beta S y}{x^2} + \gamma \right) > 0. \text{ Diperoleh persamaan karakteristik: } \lambda^2 - A\lambda + BC - D = 0$$

Sehingga:  $\lambda_{1,2} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4(BC - D)}}{2}$ . Nilai eigen  $\lambda_{1,2}$  tergantung dari suku  $BC - D$ :

$$\left( -\frac{\beta \hat{I}}{x} + \rho_1 - \rho_2 \right) \left( -\frac{\beta S y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \right) - \frac{\beta \hat{I}}{x} \left( \frac{\beta S y}{x^2} + \gamma \right)$$

$$= -\frac{\beta \hat{I}}{x} (\rho_1 - \rho_2) + (\rho_1 - \rho_2) \left( -\frac{\beta S y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma - r \right). \text{ Karena } \rho_1 < \rho_2 \text{ dan } \hat{I}^2 > \frac{1}{k_2}, \text{ maka}$$

$$-\frac{\beta \hat{I}}{x} (\rho_1 - \rho_2) + (\rho_1 - \rho_2) \left( -\frac{\beta S y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma - r \right) > 0, \text{ atau } BC - D > 0.$$

Dengan demikian kedua nilai eigen  $\lambda_{1,2}$  mempunyai bagian real yang semuanya negatif. Terbukti bahwa titik ekuilibrium endemik  $(\hat{S}, \hat{I})$  stabil asimtotik lokal ketika  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\hat{I}^2 > \frac{1}{k_2}$ .

**Teorema 5:** Jika  $I > I_0$  titik keseimbangan bebas penyakit  $(S^*, I^*) = \left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}, 0\right)$  stabil asimtotik jika  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\beta(a + \rho_1 - \rho_2) < b(-\rho_1 + \rho_2 + \gamma)$ .

$$J(S^*, 0) = \begin{pmatrix} \rho_1 - \rho_2 & -\beta S^* \\ 0 & \beta S^* + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \end{pmatrix}.$$

Diperoleh nilai eigen matriks Jacobian  $J(S^*, 0)$ :

$$(\lambda - (\rho_1 - \rho_2))(\lambda - (\beta S^* + \rho_1 - \rho_2 - \gamma)) = 0,$$

menyebabkan

$$\lambda_1 = \rho_1 - \rho_2 < 0 \leftrightarrow \rho_1 < \rho_2,$$

$$\lambda_2 = \beta S^* + \rho_1 - \rho_2 - \gamma < \beta S^* < -\rho_1 + \rho_2 + \gamma,$$

Terbukti bahwa jika  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\beta(a + \rho_1 - \rho_2) < b(-\rho_1 + \rho_2 + \gamma)$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik.

**Teorema 6:** Jika  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\hat{I}^2 > \frac{1}{k_2}$  maka titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik.

Bukti: pandang kembali titik ekuilibrium endemik  $(\hat{S}, \hat{I})$ , dimana  $\hat{S} = \hat{N} - \hat{I}$ .

Maka matriks  $J(\hat{S}, \hat{I})$  adalah: Misalkan  $x = 1 + k_1 \hat{I} + k_2 \hat{I}^2$ , dan  $y = \beta S(1 - k_2 \hat{I}^2)$ , maka matriks  $J(\hat{S}, \hat{I})$  dapat ditulis ulang sebagai:

$$J(\hat{S}, \hat{I}) = \begin{pmatrix} -\frac{\beta \hat{I}}{x} + \rho_1 - \rho_2 & \frac{\beta S y}{x^2} + \gamma \\ \frac{\beta \hat{I}}{x} & -\frac{\beta S y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \end{pmatrix}.$$

Sehingga nilai eigen-nilai eigen matriks  $J(\hat{S}, \hat{I})$  dapat ditentukan dengan menyelesaikan persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &= 0 \\ \lambda^2 - \left(-\frac{\beta \hat{I}}{x} - \frac{\beta \hat{S} y}{x^2} + 2\rho_1 - 2\rho_2 - \gamma\right) \lambda + \left(-\frac{\beta \hat{I}}{x} + \rho_1 - \rho_2\right) \left(-\frac{\beta \hat{S} y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma\right) - \frac{\beta \hat{I}}{x} \left(\frac{\beta \hat{S} y}{x^2} + \gamma\right) &= 0 \end{aligned}$$

Karena berdasarkan Teorema 4,  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\hat{I}^2 > \frac{1}{k_2}$ , maka  $A = -\frac{\beta \hat{I}}{x} - \frac{\beta \hat{S} y}{x^2} + 2\rho_1 - 2\rho_2 - \gamma < 0$ ,  $B = -\frac{\beta \hat{I}}{x} + \rho_1 - \rho_2 < 0$ ,  $C = -\frac{\beta \hat{S} y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma < 0$ ,  $D = \frac{\beta \hat{I}}{x} \left(\frac{\beta \hat{S} y}{x^2} + \gamma\right) > 0$ .

Diperoleh persamaan karakteristik:

$$\lambda^2 - A\lambda + BC - D = 0$$

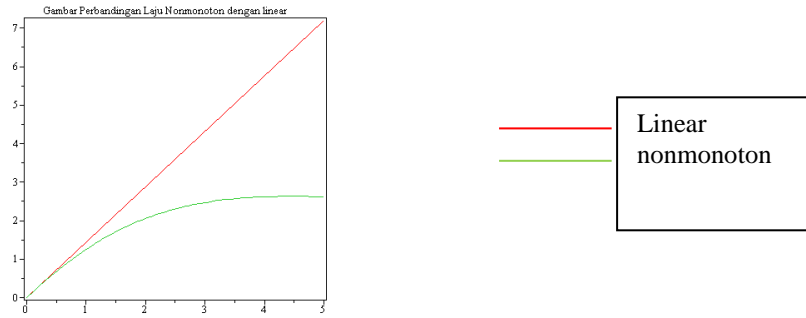
Nilai eigen  $\lambda_{1,2}$  tergantung dari suku  $BC - D$ :

$= -\frac{\beta \hat{I}}{x}(\rho_1 - \rho_2) + (\rho_1 - \rho_2) \left(-\frac{\beta \hat{S} y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma\right)$ . Karena  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\hat{I}^2 > \frac{1}{k_2}$ , maka  $-\frac{\beta \hat{I}}{x}(\rho_1 - \rho_2) + (\rho_1 - \rho_2) \left(-\frac{\beta \hat{S} y}{x^2} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma\right) > 0$ , atau  $BC - D > 0$ . Dengan demikian kedua nilai eigen  $\lambda_{1,2}$  mempunyai bagian real yang semuanya negatif. Terbukti bahwa titik ekuilibrium endemik  $(\hat{S}, \hat{I})$  stabil asimtotik lokal ketika  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\hat{I}^2 > \frac{1}{k_2}$ .

#### 4. Simulasi

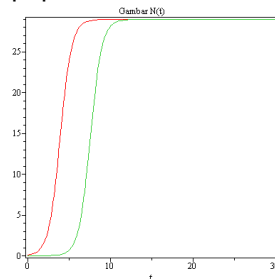
Dimisalkan nilai-nilai parameter untuk sistem (2) adalah:  $a = 1,5$ ;  $\beta = 1,44$ ;  $b = 0,05$ ;  $\rho_1 = 1,40$ ;  $\rho_2 = 1,45$ ;  $k_1 = 0,10$ ;  $k_2 = 0,05$ ;  $\gamma = 0,80$ . Beberapa hasil yang diperoleh berdasarkan pemberian nilai parameter tersebut diantaranya:

- Laju penularan nonmonotone incidence  $g(I) = \frac{\beta I}{1+k_1 I+k_2 I^2}$  jauh lebih lambat dibandingkan dengan laju penularan linear  $g(I) = \beta I$ .



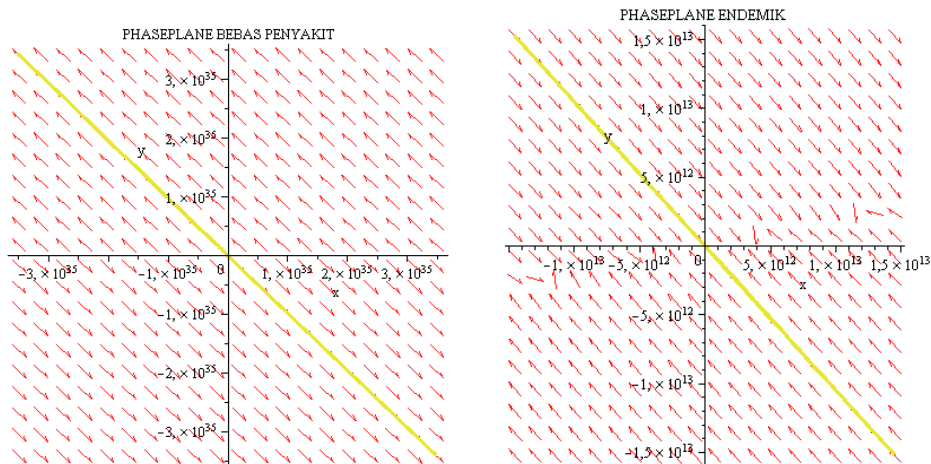
Gambar 1. Gradien Laju Penularan

- b. Jumlah kesetimbangan individu pada populasi adalah  $N^* = \frac{a+\rho_1-\rho_2}{b} = 29$ . Ini adalah jumlah individu pada populasi ketika  $t \rightarrow \infty$  atau  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 29$ .



Gambar 2. Jumlah Populasi dari waktu ke waktu

- c. Titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik berturut-turut adalah  $(S^*, I^*) = (29; 0)$  dan  $(\hat{S}, \hat{I}) = (22.16; 6.84)$ .
- d. Nilai  $\rho_1 = 1.40 < \rho_2 = 1.45$  dan  $\beta(a + \rho_1 - \rho_2) > b(-\rho_1 + \rho_2 + \gamma)$ . Menurut Teorema 2 titik keseimbangan bebas penyakit tidak stabil. Sementara itu bahwa  $\rho_1 < \rho_2$  dan  $\hat{I}^2 = 46.7856 > \frac{1}{k_2} = 20$ , dan menurut Teorema 3 titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik.



Gambar 3. Phaseplane bebas penyakit dan endemik

## Referensi

- [1] Alexander M.E, Moghadas S.M. Periodicity in an epidemic model with a generalized nonlinear incidence. *Mathematical Biosciences*. 2004; vol. 189, no. 1, pp. 75–96.
- [2] Capasso V, Serio G. A generalization of the Kermack-McKendrick deterministic epidemic model. *Mathematical Biosciences*. 1978; vol. 42, no. 1-2, pp. 43–61, 1978.
- [3] Chufen Wu, Peixuan Weng, Stability Analysis of Age Structured SIS Models with General Incidence Rate, *Elsevier*, 2009, 11(2010) 1826-1834.

- [4] Gajendra U, Gupta V.K, Singh B, Khandelwal R, and Neetu T. An Epidemic Model with Modified Non-monotonic Incidence Rate under treatment, *Applied Mathematical Sciences.*; 2012, Vol. 6, no. 24, 1159 – 1171.
- [5] H.W.Hetchote, the Mathematics Infectious Diseases, *SIAM Review*, vol. 42, No. 4 (Dec 2000), pp. 599-653.
- [6] Hu, Z., Liu, S., Wang, H., Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Standard Incidence Rate and Treatment Rate, *Mathematical Biosciences, Elsevier*, 2006, pp. 58-71.
- [7] Hu, Z., Ma, W., Ruan, S., Analysis of SIR Epidemic Models with Nonlinear Incidence Rate and Treatment, *Mathematical Biosciences, Elsevier*, 2012, pp. 12-20.
- [8] Kar T.K., Ashim B. : Modeling and Analysis of an Epidemic Model with Non-monotonic Incidence Rate under Treatment, *Journal of Mathematics Research*. 2010; Vol 2, No. 1, 103-115.
- [9] Linda JS. Allen, an Introduction to Stochastic Epidemic Models, Department of Mathematics and Statistics, Texas Tech University, Lubbock, TX 79409- 1042, USA.
- [10] Perko L., *Differential Equations and Dynamical System*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [11] Sheikh, S., Modeling and Analysis of an SEIR Epidemic Model with a Limited Resource for Treatment, *Global Journal of Science*, 2012, vol. 12, ISSN: 2249-4626.
- [12] Soleh, M., Kestabilan Model SIS dengan Logistik dan Non Monotone Incidence Rates, Laporan Penelitian Individu Fakultas Sains & Teknologi UIN Suska Riau, 2013, Pekanbaru.
- [13] Soleh, M., Kestabilan Model SIS dengan Non Monotone Incidence Rate, Prosiding SNTIKI 4, 2012, Pekanbaru, ISSN : 2085-9902.
- [14] Soleh & Siregar, Kestabilan Equilibrium Model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi, *Jurnal Sitekin*, vol. 9 No. 2, 2012, Pekanbaru. ISSN 1693-2390.
- [15] Soleh & Helvi, Model SIS (*Susceptible, Infectives, Susceptible*) dengan Pertumbuhan Alami dan Proses Migrasi, Skripsi, 2011, Pekanbaru.
- [16] Wang, W., Ruan, S., Bifurcation in an Epidemic Model with Constant Removal Rate of the Infectives, 2004, *J. Math. Anal. Appl.* 291, 775-793.
- [17] Wang, W., Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Treatment, *Mathematical Biosciences, Elsevier*, 2006, pp. 58-71.
- [18] Xiao D, Ruan S. Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate. *Mathematical Biosciences*. 2007; vol. 208, no. 2, pp. 419–429.
- [19] Zhou, L., Fan, M., Dynamics of SIR Epidemic Model with Limited Medical Resource Revisited, *Mathematical Biosciences, Elsevier*, 2012, pp. 312-324.