Modifikasi Metode Newton-Steffensen Bebas Turunan

M. Nizam M.Y[1,2]
[1] Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau
[2] Mahasiswa Program Studi Magister Matematika, FMIPA Universitas Riau
Kampus BinaWidya, Pekanbaru, 28293
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
e-mail : nizam_ys86@yahoo.com

Abstrak

Makalah ini mengembangkan metode Newton-Steffensen dengan melibatkan interpolasi Lagrange dan selisih terbagi untuk menghilangkan fungsi turunan dan meningkatkan orde konvergensi. Berdasarkan hasil penelitian ini diperoleh bahwa hasil modifikasi menghasilkan orde konvergensi lima dengan *efficiency index* $5^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}4953$. Simulasi numerik menunjukkan keefektifan dan performa metode baru dalam menyelesaikan persamaan nonlinier.

Kata kunci: *Interpolasi, Newton-Steffensen, Orde Konvergensi, Persamaan Nonlinear*.

Abstract

This paper develops Newton-Steffensen method involving Lagrange interpolation and the divided difference to eliminate the derivative function and increase the order of convergence. Based of this research is showed that the modified produce five-order convergence with efficiency index $5^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}4953$. *Simulation numerical are given to illustrate the efiiciency and performance of the new methods in solving nonlinier equations.*

Keywords: *Interpolation, Newton-Steffensen, Nonlinear Equations, Order of Convergence,*

1. Pendahuluan

Penyelesaian persamaan nonlinear adalah permasalahan yang sangat penting dalam analisis numerik, karena sebagian besar tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik. Untuk itu, diperlukan sebuah teknik penyelesaian yang bisa digunakan untuk menyelesaikannya yaitu metode numerik.

Salah satu permasalahan dalam persamaan nonlinear adalah menentukan akar-akar persamaan $f'(x_n)$. Banyak metode iterasi yang bisa digunakan dalam menyelesaikan permasalahan tersebut, tetapi metode iterasi yang sering digunakan adalah metode Newton Raphson yang ditulis

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

Metode ini memiliki konvergensi kuadratik. Untuk mempercepat kekonvergenannya metode Newton banyak mengalami modifikasi.Weerakon & Fernando (2000) dengan aturan trapesium, Ozban (2004) aturan titik tengah, Kanwar (2006) dengan mengevaluasi fungsi, dan Jisheng, *et.al* (2007) dengan melibatkan rata-rata aritmatik.

Selanjutnya, jika fungsi $f'(x_n)$ pada Persamaan (1) diaproksimasi dengan selisih maju berikut:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x)}{f(x_n)}$$

Maka akan diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f(x_n + f(x_n)) - f(x)} \tag{2}$$

ISSN :2085-9902

Metode ini dikenal dengan metode Steffensen. Sharma (2005) memodifikasi metode Steffensen dengan melibatkan kembali turunanan fungsi ($f'(x)$) dan metode Newton, yang ditulis

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f'(x)(f(x_n) - f(y_n))} \tag{3}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Metode ini dikenal dengan metode Newton Steffensen dengan orde konvergensi kubik. Dalam makalah ini, metode yang dikemukan oleh Sharma akan dimodifikasi menggunakan interpolasi langrange yang bebas turunan.

2. Metodologi Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka dengan mempelajari lilteratur-literatur yang berkaitan dengan pokok permasalahan dengan langkah-langkah yang digunakan sebagai berikut :

1. Mendefenisikan kembali Persamaan (3) dengan mengganti x_{n+1} dengan z_n , sehingga dapat ditulis
$$z_n = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f'(x)(f(x_n) - f(y_n))}$$
2. Selanjutnya, metode Newton pada Persamaan (1) didefeniskan kembali dengan mengganti x_n dengan z_n , yang ditulis
$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$
3. Fungsi $f'(x_n)$ diaproksimasi menggunakan interpolasi lagrange orde dua. Selanjutnya, hasilnya disubstitusikan ke persamaan pada langkah 2.
4. Hasil yang diperoleh pada langkah 3 yang masih memuat fungsi turunan diaproksimasi kembali menggunakan selisih terbagi, yaitu
$$f'(x_n) \approx f[x_n, w_n]$$
$$= \frac{f(w_n) - f(x_n)}{w_n - x_n}$$
Pada langkah ini akan diperoleh metode iterasi baru.
5. Menentukan orde konvergensi dan *indeks efisiensi* untuk metode iterasi yang diperoleh pada langkah 3.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Modifikasi Metode Newton-Steffensen

Berdasarkan Persamaan (1) dan (3), didefenisikan kembali metode Newton dengan mengganti x_n dengan z_n , sehingga dapat ditulis

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \tag{4}$$

dengan

$$z_n = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f'(x)(f(x_n) - f(y_n))}$$

Selanjutnya, fungsi $f'(z_n)$ pada persamaan (4) diaproksimasi menggunakan interpolasi Lagrange orde dua. Sehingga diperoleh

$$f'(z_n) = \frac{f(z_n) - f(x_n)}{z_n - x_n} + \frac{f(z_n) - f(y_n)}{z_n - y_n} - \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} \tag{5}$$

Persamaan (5) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$f'(z_n) = f[x_n, z_n] + f[y_n, z_n] - f[x_n, y_n] \tag{6}$$

dengan

$$f[x_n, z_n] = \frac{f(z_n) - f(x_n)}{z_n - x_n} \tag{6a}$$

$$f[y_n, z_n] = \frac{f(z_n) - f(y_n)}{z_n - y_n} \tag{6b}$$

$$f[x_n, y_n] = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} \tag{6c}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (6) ke Persamaan (4), maka diperoleh persamaan berikut

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f[x_n, z_n] + f[y_n, z_n] - f[x_n, y_n]} \tag{7}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f'(x)(f(x_n) - f(y_n))}$$

Oleh karena, pada Persamaan (7) untuk mengevaluasinya masih melibatkan fungsi turunan $f'(x_n)$. Maka $f'(x_n)$ akan diakprosimasi menggunakan selisih terbagi berikut :

$$\begin{aligned} f'(x_n) &\approx f[x_n, w_n] \\ &= \frac{f(w_n) - f(x_n)}{w_n - x_n} \\ &= \frac{f(w_n) - f(x_n)}{f(x_n)} \end{aligned} \tag{8}$$

dengan $w_n = x_n + f(x_n)$.

Substitusikan Persamaa (8) ke Persamaan (7), sehinga diperoleh

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f[x_n, z_n] + f[y_n, z_n] - f[x_n, y_n]} \tag{9a}$$

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, w_n]} \tag{9b}$$

$$z_n = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f[x_n, w_n](f(x_n) - f(y_n))} \tag{9c}$$

Persamaan (9) merupakan modifikasi metode Newton-Steffensen bebas turunan dengan melibatkan empat evaluasi fungsi.

3.2. Orde Konvergensi

Teorema 1. Asumsikan bahwa fungsi f memiliki turunan dan f memiliki akar penyelesaian $\alpha \in I$. Jika titik awal x_0 cukup dekat dengan α, maka metode iterasi pada Persamaan (9) memiliki orde konvergensi berikut :

$$e_{n+1} = 2(c_1+1)^2\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^4 e_n^{\,5} + O(e_n^{\,6}) \tag{10}$$

dengan $e_n = x_n - \alpha$.

Bukti : Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha)=0$, kemudian $x_n = \alpha + e_n$ dan, diasumsikan $f'(\alpha) \neq 0$, maka dengan menggunakan deret Taylor diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)(c_1e_n + c_2e_n^{\,2} + c_3e_n^{\,3} + c_4e_n^{\,4} + O(e_n^{\,5}) \tag{11}$$

dan

$$f^2(x_n) = f'(\alpha)(c_1^{\,2}e_n^{\,2} + 2c_1c_2e_n^{\,3} + (2c_nc_3 + c_2^{\,2})e_n^{\,4} + O(e_n^{\,5}) \tag{12}$$

Oleh karena $w_n = x_n + f(x_n)$, maka diperoleh

$$w_n = \alpha + (1+c_1)e_n + c_2e_n^{\,2} + c_3e_n^{\,3} + c_4e_n^{\,4} + O(e_n^{\,5})$$

Selanjutnya, dengan menggunakan ekspansi deret Taylor diperoleh

$$\begin{aligned} f(w_n) = f'(\alpha)\big[&(c_2c_1^{\,2} + c^2 + 3c_1c_2)e_n^{\,2} + (c_1^{\,2} + c_1)e_n + (c_3 + 3c_3c_1^{\,2} + c_3c_1^{\,3} \\ &+ 2c_1c_2^{\,2} + 4c_1c_3 + 2c_2^{\,2})e_n^{\,3} + (5c_2c_3 + 8c_1c_2c_3 + c_1c_4 + c_2^{\,3} \\ &+ 3c_1^{\,2}c_2c_3)e_n^{\,4} + O(e_n^{\,5})\big] \end{aligned} \tag{13}$$

$$f(w_n) - f(x_n) = c_1^{\,2}e_n + (3c_1c_2 + c_2c_1^{\,2})e_n^{\,2} + \ldots \tag{14}$$

sehingga

$$f[x_n, w_n] = c_1 + (2c_2 + c_1c_2)e_n + (c_2^{\,2} + 3c_3 + 3c_1c_3 + c_1^{\,2}c_2)e_n^{\,2} + \ldots \tag{15}$$

Selanjutnya, substitusikan Persamaan (15) ke Persamaan (9b) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_n, w_n]} \\ &= \alpha - \left(-c_2 - \frac{c_2}{c_1}\right)e_n^{\,2} - \left(-c_1c_3 - \frac{2c_3}{c_1} + c_2^{\,2} - 3c_3 + \frac{2c_2^{\,2}}{c_1^{\,2}} + \frac{2c_2^{\,2}}{c_1}\right)e_n^{\,3} + \cdots \end{aligned} \tag{16}$$

Selanjutnya, mengunakan ekspansi deret Taylor untuk Persaman (16) akan diperoleh

$$f(y_n) = (c_1c_2 + c_2)e_n^{\,2} + \left(-2c_2^{\,2} + 2c_3 + 3c_1c_3 - c_1c_2^{\,2} + 3c_3c_1^{\,2} - \frac{2c_2^{\,2}}{c_1}\right)e_n^{\,3} + \cdots \tag{17}$$

Substitusikan Persamaan (11), (12), (15), dan (17) ke Persamaan (9c), sehingga diperoleh

$$z_n = x_n - \frac{f^2(x_n)}{f[x_n, w_n](f(x_n) - f(y_n))}$$

$$= \alpha - \left(-\frac{c_2^{\,2}}{c_1} - \frac{c_2^{\,2}}{c_1^{\,2}} \right) e_n^{\,3} - \left(\frac{2c_2^{\,3}}{c_1^{\,3}} + \frac{2c_2^{\,3}}{c_1^{\,2}} \right) e_n^{\,4} + \cdots \tag{18}$$

Persamaan (18) diekspansi menggunakan deret Taylor akan diperoleh

$$f(z_n) = \left(\frac{c_2^{\,2}}{c_1} + c_2^{\,2} \right) e_n^{\,3} + \left(-\frac{2c_2^{\,3}}{c_1^{\,2}} - \frac{2c_2^{\,3}}{c_1} \right) e_n^{\,4} + \cdots \tag{19}$$

Selanjutnya, untuk memperoleh $f[x_n, z_n]$, $f[y_n, z_n]$, dan $f[x_n, y_n]$. Substitusikan Persamaan (11), (16), (17), (18), dan (19) ke Persamaan (6a-6c) sehingga diperoleh

$$f[x_n, z_n] = c_1 - c_2 e_n + \left(\frac{c_2^{\,3}}{c_1} + \frac{c_2^{\,3}}{c_1^{\,2}} \right) e_n^{\,3} + \left(-\frac{2c_2^{\,4}}{c_1^{\,3}} - \frac{2c_2^{\,4}}{c_1^{\,2}} \right) e_n^{\,4} + \cdots \tag{20}$$

$$f[y_n, z_n] = c_1 + \left(-c_2^{\,2} - \frac{c_2^{\,2}}{c_1} \right) e_n^{\,2} + \cdots + \left(-\frac{2c_2^{\,4}}{c_1^{\,3}} - \frac{2c_2^{\,4}}{c_1^{\,2}} \right) e_n^{\,4} + \cdots \tag{21}$$

$$f[x_n, y_n] = c_1 - c_2 e_n + \left(\frac{2c_2 c_3}{c_1} + c_1 c_2 c_3 - \frac{c_2^{\,3}}{c_1} + 3c_2 c_3 - \frac{2c_2^{\,3}}{c_1^{\,2}} \right) e_n^{\,3} + \cdots \tag{22}$$

Substitusikan Persamaan (18) - (22) ke Persamaan (9a), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f[x_n, z_n] + f[y_n, z_n] - f[x_n, y_n]} \\ &= \alpha - \left(\frac{2c_2^{\,4}}{c_1^{\,2}} + \frac{4c_2^{\,2}}{c_1^{\,3}} + \frac{2c_2^{\,4}}{c_1^{\,4}} \right) e_n^{\,5} + O(e_n^{\,6}) \end{aligned} \tag{23}$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ maka diperoleh

$$e_{n+1} = 2(c_1 + 1)^2 \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^4 e_n^{\,5} + O(e_n^{\,6}) \qquad \blacksquare$$

Definisi 1 Misalkan *p* adalah banyak evaluasi fungsi yang dibutuhkan oleh suatu metode. Efisiensi dari metode tersebut dihitung dengan konsep efisiensi indeks yang didefinisikan dengan $q^{\frac{1}{p}}$, dimana *q* adalah orde konvergensi dari metode tersebut.

Berdasarkan hasil yang diperoleh metode iterasi Persamaan (9) memiliki orde konvergensi lima dan empat evaluasi fungsi, sehingga metode ini memiliki *indeks efisiensi* $5^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}4953$

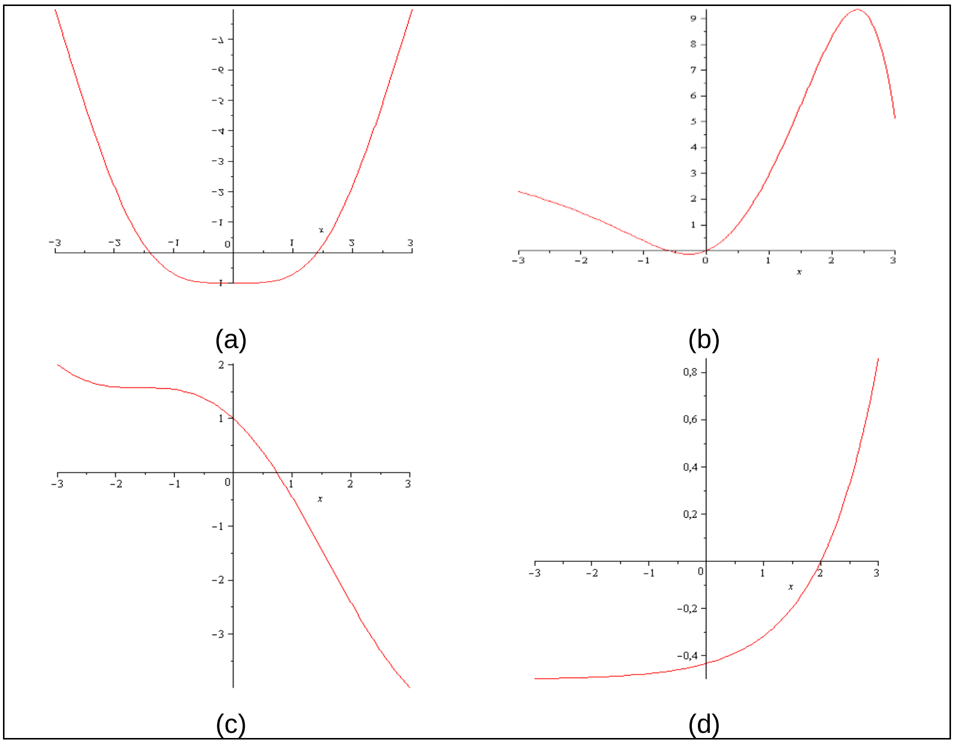
3.2. Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan untuk menguji performa metode iterasi yang diperoleh pada Persamaan (9). Simulasi dilakukan pada beberapa fungsi yang dipilih dengan mengambil tebakan x_0 sedekat mungkin dengan akar persamaan mengunakan software MAPLE 13 dengan ketelitian 800 digits. Adapun fungsi yang diambil adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} &f_1(x) = \sin^2(x) - x^2 + 1 && \alpha \approx 1{,}404491648215 \\ &f_2(x) = \sin(x)e^x + \ln(x^2 + 1) && \alpha \approx 0{,}000000000000 \\ &f_3(x) = \cos(x) - x && \alpha \approx 0{,}739085133215 \end{aligned}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}(e^{x-2} - 1) \qquad\qquad \alpha \approx 2{,}000000000000$$

Untuk memperlihatkan akar persamaan dari fungsi-fungsi di atas dapat dilihat pada Gambar 1 berikut :



Gambar 1 : Grafik fungsi (a) $f_1(x)$, (b) $f_2(x)$, (c) $f_3(x)$ dan (d) $f_4(x)$

Selanjutnya, hasil simulasi numerik untuk jumlah iterasi yang diperoleh untuk beberapa metode yaitu Metode Newton (NW), Metode Steffensen (MS), Metode Newton-Steffensen (MNS), dan Metode Modifikasi Newton-Steffensen (MMNS) dapat dilihat pada Tabel 1 berikut ini :

Tabel 1 : Perbandingan Jumlah Iterasi Beberapa Metode Iterasi

$f(x)$	x_0	Jumlah Iterasi			
		MN	**MS**	**MNS**	**MMNS**
$f_1(x)$	1,0	10	10	6	4
$f_2(x)$	0,7	11	13	7	5
$f_3(x)$	2,0	9	10	5	3
$f_4(x)$	2.5	10	10	6	4

Berdasarkan Tabel 1 terlihat bahwa modifikasi metode Newton-Steffensen bebas turunan memliki iterasi yang lebih sedikit dibandingkan metode yang lainnya. Selain dengan melihat jumlah iterasi performa metode iterasi juga dapat dilihat dengan menggunakan *Computational of Convergence*, yaitu perhitungan metode orde konvergensi secara numerik.

Definisi 2. Misalkan α adalah akar dari persamaan $f(x)=0$ dan misalkan x_{n+1}, x_n, x_{n-1} adalah tiga hasil iterasi berturut-turut yang cukup dekat ke akar α, maka orde konvergensi secara komputasi (*COC*) dapat diaproksimasikan dengan rumus

$$COC \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)\right|} \tag{24}$$

Tabel 2 di bawah ini menunjukkan perbandingan nilai orde konvergensi yang diperoleh dari perhitungan *COC*.

Tabel 2 : Perbandingan *COC* Beberapa Metode Iterasi

$f(x)$	x_0	**Jumlah Iterasi**			
		MN	**MS**	**MNS**	**MMNS**
$f_1(x)$	1,0	1,9999999999	1,9999999999	3,0000000000	4,9999999999
$f_2(x)$	0,7	1,9999999999	2,0000000000	2,9999999999	4,9999999999
$f_3(x)$	2,0	2,0000000000	1,9999999999	3,0000000000	4,9999999999
$f_4(x)$	2.5	2,0000000000	1,9999999999	2,9999999999	4,9999999999

Berdasarkan Tabel 2 terlihat bahwa MN dan MS memiliki konvergensi kuadratik, MNS memiliki konvergensi kubik, dan MMNS memiliki konvergensi lima.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pambasan Metode Modifikasi Newton-Steffensen (MMNS) memiliki orde konvergensi lima dan *indeks efesiensi* $5^{\frac{1}{4}} \approx 1,4953$. Ini lebih besar jika dibandingan dengan Metode Newton (MN) yaitu $2^{\frac{1}{2}} \approx 1,4142$, Metode Steffensen (MS) yaitu $2^{\frac{1}{2}} \approx 1,4142$, dan Metode Newton Steffensen (MNS) yaitu $3^{\frac{1}{3}} \approx 1,4422$.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa MMNS lebih efektif dan metode yang digunakan lebih efisien dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.

Referensi

[1] F. Soelaymani. 2011. Efficient Sixth Order Nonlinear Solvers Free from Deriva-tive. *World Applied Sciences Journal*. 13 : 2503 – 2508.

[2] Jisheng,K., *et.al*. 2007. Third-Order Modification of Newton's Method. *Journal Computational and Applied Mathematics.* 205 : 1 – 5.

[3] Kanwar, V. 2006. A Family of Third Orde Multipoint Methods for Solving Nonlinear Equations. 2006. *Applied Mathematics and Computation*. 176 : 409 – 413.

[4] Liu, Z., Q. Zheng, and P. Zhao. 2010. A Variant of Steffensen' Method of Fourth-Order Convergence and Its Apliactions. *Applied Mathematic and Computation*. 216 : 1978 – 1983.

[5] Ozban, A.Y. 2004. Some New Variants of Newton's Method. *Applied Mathematic Letters*. 13 : 87 – 93.

[6] Sharma, J.R. 2005. A Composite Third Order Newton Steffensen Method for Solving Nonlinear Equations. *Applied Mathematic and Computation*. 169 : 242 – 246.

[7] W. Gautschi, Numerical Analysis, 2nd Ed, Birkhauser, New York, 2012.

[8] Weerakon, S. And Ferrnando, T.G.I. 2000. A Variant of Newton's Methods with Accelered Third-Order Convergence. *Applied Mathematics Letters*. 13 : 87 – 93.