

Analisis Kestabilan Model Seiqr pada Penyebaran Penyakit Sars

Hafifah Istihapsari¹, I.Suryani²

Jurusan Matematika Fakultas Sains & Teknologi UIN SUSKA Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293
email: ¹istihapsarihafifah@gmail.com, ²irmayath@yahoo.co.id

Abstrak

Salah satu model untuk model penyakit SARS adalah menggunakan model SEIQR. Model SEIQR yang digunakan pada penyakit SARS ini diperoleh dua titik ekuilibrium, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Kestabilan ekuilibrium dihitung dari solusi persamaan dari model yang diperoleh dengan kriteria nilai eigen menggunakan kriteria Routh Hurwitz. Hasil yang diperoleh bahwa kestabilan ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik jika memenuhi $pq - \frac{\mu}{d}(\beta(A + \rho)) > 0$ dan ekuilibrium endemik penyakit stabil asimtotik jika $qr(\beta I^* + d) > \beta S^* \mu d$ dan $\beta I^*(r^2 + 2qr + q^2 + \beta I^*r + \beta q + 2dr + 2dq) - \beta S^* \mu(r + q + \beta I^*) > 0$.

Kata kunci: ekuilibrium, model SEIQR, nilai eigen, routh-hurwitz, stabil asimtotik

Abstract

One of model for model SARS disease wii be used is SEIQR model. SEIQR model has two equilibrium states, there are disease free-equilibrium states and endemic disease. Equilibrium states is obtained by determining the solution of the equations in the model with criteria of eigen value and Routh Hurwitz criteria. The Result of this research are disease free equilibrium states asytmotic stable if $pq - \frac{\mu}{d}(\beta(A + \rho)) > 0$ and endemic equilibrium states asytmotic stable if $qr(\beta I^* + d) > \beta S^* \mu d$ and $\beta I^*(r^2 + 2qr + q^2 + \beta I^*r + \beta q + 2dr + 2dq) - \beta S^* \mu(r + q + \beta I^*) > 0$.

Keywords: asytmotic stable, eigen values, equilibrium state, routh-hurwitz, SEIQR model

1. Pendahuluan

Penyebaran infeksi penyakit akibat virus merupakan ancaman yang berarti di bidang kesehatan, sosial dan ekonomi masyarakat. Penyakit infeksi seperti SARS dan Flu Burung adalah jenis penyakit yang mencemaskan dan banyak menimbulkan banyak korban. Sindrom Pernapasan Akut Berat (SARS) adalah sebuah jenis penyakit Pneumonia. SARS pertama kali muncul pada November 2002 di Provinsi Guangdong, Tiongkok. SARS disebabkan oleh virus *coronavirus*. *Coronavirus* menyebar lewat udara, masuk melalui saluran pernapasan lalu bersarang di paru-paru. Gejala dari penyakit ini meliputi: suhu badan lebih dari 38 derajat, batuk, sulit bernapas, dan napas pendek-pendek. Gejala lainnya adalah sakit kepala, otot terasa kaku, diare, timbul bintik-bintik merah kulit, dan badan lemas beberapa hari.

Belum ditemukan vaksin yang tepat dalam penanganan penyakit SARS, maka metode yang digunakan untuk mengontrol penyebaran infeksi penyakit SARS antara lain mengkarantina penderita yang dicurigai terkena virus tersebut dan melakukan penanganan terhadap individu yang terinfeksi dengan pengobatan tertentu. Hal yang perlu dilakukan sejak kemunculan penyakit diata sadalah merumuskan strategi model untuk mengontrol penyebaran virus ini agar dapat diminimalkan. Model matematika untuk epidemic merupakan suatu alat mempertimbangkan strategi untuk mengendalikan penyebaran penyakit.

Model dasar tentang penyebaran virus ini telah dilakukan oleh Kenmark dan McKendrick (1927) yaitu dengan menggunakan model sederhana SEIR. Mishra dan Navnit (2009) menggunakan model SEIQRS dalam jurnalnya dengan menggunakan kelas karantina dalam menentukan model penyebaran virus computer dalam jaringan komputer. Di sini penulis

menggunakan model SEIQR dalam menentukan analisa kestabilan pada penyakit menular influenza yaitu SARS dengan menambahkan asumsi kekebalan tubuh pada model tersebut.

2. Model Matematika Penyakit SARS

Populasi pada model SEIQR dibagi menjadi lima kelompok yaitu, *susceptible* (S) kelas subpopulasi yang rentan terinfeksi penyakit, *latent* (E) kelas individu yang telah terinfeksi penyakit tetapi tidak dapat menularkannya kepada individu lain, *infected* (I) kelas individu yang telah terinfeksi penyakit dan dapat menularkannya kepada individu lain, *quarantined* (Q) kelas individu yang sudah terinfeksi dan masuk dalam karantina, dan *recovered* (R) kelas subpopulasi yang sudah sembuh dari penyakit.

Adapun asumsi-asumsi yang diberikan pada model yaitu sebagai berikut:

- Populasi bersifat terbuka, yaitu terjadi proses imigrasi.
- Adanya tingkat kelahiran yang terjadi dan memasuki kelas *susceptible* (S) dengan laju A .
- Proses imigrasi terjadi pada kelas *susceptible* (S) dengan laju ρ .
- Kematian alami terjadi pada setiap kelas dengan laju d .
- Terdapat kematian karena penyakit pada kelas I dan kelas Q dengan laju α .
- Laju penularan dari kelas *Susceptible* ke kelas *laten* sebesar β .
- Laju penularan dari kelas *laten* ke kelas *infected* sebesar μ .
- Laju penyembuhan karena pengobatan tertentu dan karena sistem kekebalan tubuh (sistem imun) berturut-turut dari kelas I ke kelas Q sebesar γ dan σ .
- Proses perpindahan individu dari kelas I ke kelas Q sebesar δ .
- Proses penyembuhan individu dari kelas Q ke kelas R sebesar ϵ .

Bedasarkan asumsi-asumsi diatas, berikut model matematika penyebaran penyakit SARS:

$$\frac{dS}{dt} = A + \rho - dS - \beta SI \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - \mu E - dE \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \mu E - (d + \alpha + \gamma + \sigma + \delta)I \quad (3)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \delta I - (\epsilon + d + \alpha)Q \quad (4)$$

$$\frac{dR}{dt} = (\gamma + \sigma)I + \epsilon Q - dR \quad (5)$$

3. Hasil dan Pembahasan

Dari model penyakit SARS pada Sistem (1) – (5) diperoleh 2 titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit. Titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh:

$$E_0(\dot{S}, \dot{E}, \dot{I}, \dot{Q}, \dot{R}) = \left(\frac{A+\rho}{d}, 0, 0, 0, 0\right)$$

sedangkan titik kesetimbangan endemik penyakit diperoleh:

$$E_1(S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*) = \left(\frac{(\mu+d)(\delta+\gamma+\sigma+d+\alpha)}{\mu\beta}, \frac{\rho+A}{(\mu+d)} - \frac{d(\delta+\gamma+\sigma+d+\alpha)}{\mu\beta}, \frac{\mu E^*}{(\delta+\gamma+\sigma+d+\alpha)}, \frac{\delta \mu E^*}{(\delta+\gamma+\sigma+d+\alpha)(\epsilon+d+\alpha)}, \frac{(\sigma+\gamma)\mu E^*(\epsilon+d+\alpha)+\delta\epsilon\mu E^*}{d(\delta+\gamma+\sigma+d+\alpha)(\epsilon+d+\alpha)}\right).$$

Selanjutnya akan dianalisis kestabilan pada setiap titik seimbang tersebut dengan memasukkan titik kesetimbangan ke dalam matriks Jacobian dan untuk menguji kestabilan dari titik keseimbangan E_0 dan E_1 dilakukan dengan menentukan nilai eigen dari matriks jacobian yang diperoleh.

Teorema 1 Jika $pq - \frac{\mu}{d}(\beta(A + \rho)) > 0$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik.

Bukti:

Nilai eigen dari matriks jacobian untuk titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu:

$$\lambda_1 = -d$$

$$\lambda_2 = -(\epsilon + d + \alpha)$$

$$\lambda_3 = -d$$

dan sisanya merupakan akar-akar dari persamaan berikut:

$$\lambda^2 + (p + q)\lambda + pq - \frac{\mu}{d}\beta(A + \rho) = 0$$

dengan:

$$p = \mu + d$$

$$q = \delta + \gamma + \sigma + d + \alpha$$

dari persamaan karakteristik tersebut dimisalkan:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = p + q$$

$$a_2 = pq - \frac{\mu}{d}(\beta(A + \rho))$$

Nilai eigen dari persamaan diatas akan dianalisis dengan menggunakan kriteria Routh Hurwitz. Syarat agar persamaan tersebut mempunyai nilai eigen negatif yaitu $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$. Terlihat bahwa $a_1 = p + q > 0$, karena p dan q bernilai positif dan dengan kata lain nilai eigen dari persamaan karakteristik diatas bernilai negatif atau mempunyai bagian real bernilai negatif. Untuk $a_2 = pq - \frac{\mu}{d}(\beta(A + \rho)) > 0$, hal ini berdasarkan teorema 1. Maka dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik lokal.

Teorema 2 Jika $qr(\beta I^* + d) > \beta S^* \mu d$ dan $\beta I^*(r^2 + 2qr + q^2 + \beta I^* r + \beta q + 2 dr + 2 dq) > \beta S^* \mu(r + q + \beta I^*)$, maka titik kesetimbangan endemik penyakit stabil asimtotik.

Bukti:

Nilai eigen pada titik kesetimbangan endemik penyakit yaitu:

$$\lambda_1 = -d$$

$$\lambda_2 = -(\epsilon + d + \alpha)$$

dan sisanya adalah akar-akar dari persamaan:

$$\lambda^3 + (r + q + \beta I^* + d)\lambda^2 + (qr + \beta I^* r + \beta I^* q + dr + dq)\lambda + \beta I^* qr + dqr$$

dengan:

$$q = \mu + d$$

$$r = \delta + \gamma + \sigma + d + \alpha$$

diperoleh:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = r + q + \beta I^* + d$$

$$a_2 = qr + \beta I^* r + \beta I^* q + dr + dq - \beta S^* \mu$$

$$a_3 = \beta I^* qr + dqr - \beta S^* \mu d$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, nilai λ_2 , λ_3 dan λ_4 akan bernilai negatif jika $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 > a_3$.

Terlihat bahwa $a_1 = r + q + \beta I^* + d > 0$, karena nilai r , q , βI^* dan d bernilai positif. Untuk selanjutnya $a_3 = \beta I^* qr + dqr - \beta S^* \mu d > 0$ dan $a_1 a_2 > a_3$ atau $(r + q + \beta I^* + d)(qr + \beta I^* r + \beta I^* q + dr + dq - \beta S^* \mu) > \beta I^* qr + dqr - \beta S^* \mu d$ sudah terbukti pada teorema 2. Sehingga diperoleh nilai eigen bernilai negatif, yang berarti bahwa titik kesetimbangan endemik penyakit stabil asimtotik lokal.

4. Simulasi Numerik

Pada pembahasan berikutnya, model matematika penyebaran penyakit SARS akan dianalisis secara numerik dengan program Maple. Dengan memasukkan nilai parameter yang sudah ditentukan. Pada simulasi mengambil dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit.

Berikut ini simulasinya:

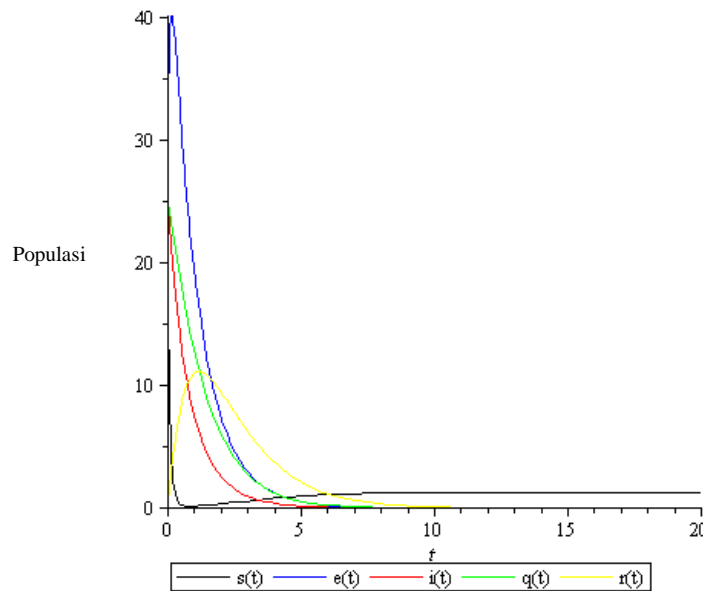
a. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Tabel 1. Nilai Parameter pada Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Parameter	Nilai Parameter
A	0.3
ρ	0.6
β	0.5
d	0.7
a	0.004
μ	0.3
δ	0.3

γ	0.7
σ	0.2
ϵ	0.2

Dimisalkan nilai awal yang diambil yaitu: $S(t) = 20, E(t) = 0, I(t) = 25, Q(t) = 25$ dan $R(t) = 0$. Sehingga dinamika populasi bebas penyakit dapat dilihat pada Gambar. Pada Gambar, sumbu horizontal menyatakan waktu (t) dalam tahun, dan sumbu vertikal menyatakan populasi (S, E, I, Q, R). Sehingga Gambar berikut merupakan perubahan masing-masing populasi terhadap waktu.



Grafik 1. Titik Ekuilbrium Bebas Penyakit

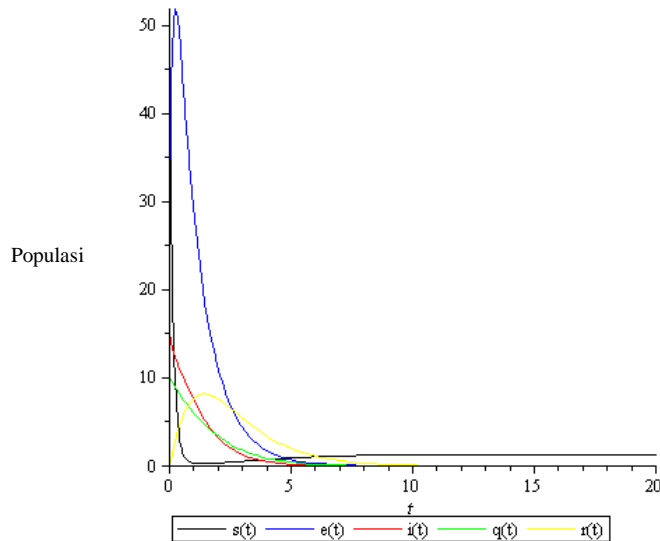
Berdasarkan Gambar 1, terlihat bahwa individu pada kelas S mengalami penurunan dan mengalami peningkatan pada tahun tertentu yang artinya masih ada individu yang rentan penyakit seiring berjalannya waktu. Sedangkan individu pada kelas E, I, Q, dan R akan ada peningkatan jumlah di awal tahun namun akhirnya individu akan habis

b. Titik Ekuilbrium Endemik Penyakit

Tabel 1. Nilai Parameter pada Titik Ekuilbrium Endemik Penyakit

Parameter	Nilai Parameter
A	0.3
ρ	0.6
β	0.5
d	0.7
a	0.004
μ	0.3
δ	0.3
γ	0.7
σ	0.2
ϵ	0.2

Dimisalkan nilai awal yang diambil yaitu: $S(t) = 50, E(t) = 25, I(t) = 15, Q(t) = 10$ dan $R(t) = 0$. Sehingga dinamika populasi endemik penyakit dapat dilihat pada Gambar. Pada Gambar, sumbu horizontal menyatakan waktu (t) dalam tahun, dan sumbu vertikal menyatakan populasi (S, E, I, Q, R). Sehingga Gambar berikut merupakan perubahan masing-masing populasi terhadap waktu.



Grafik 2. Kestimbangan Endemik Penyakit

Berdasarkan Gambar 2, terlihat bahwa individu pada kelas S mengalami penurunan dan mengalami peningkatan pada tahun tertentu. Sementara individu pada kelas E mengalami peningkatan jumlah individu yang terjangkit, dan setelah itu juga mengalami penurunan yang drastis menuju nol dikarenakan faktor seperti kematian alami dan juga perpindahan dari kelas E ke kelas I . Individu pada kelas I dan Q mengalami penurunan dan mengakibatkan individu pada kelas R bertambah.

5. Kesimpulan

Dari hasil pembahasan diperoleh kesimpulan:

a. Model SEIQR penyebaran penyakit SARS adalah:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= A + \rho - dS - \beta SI \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SI - \mu E - dE \\ \frac{dI}{dt} &= \mu E - (d + a + \gamma + \sigma + \delta)I \\ \frac{dQ}{dt} &= \delta I - (\epsilon + d + \alpha)Q \\ \frac{dR}{dt} &= (\gamma + \sigma) + \epsilon Q - dR\end{aligned}$$

dimana *Susceptible* (S) kelas subpopulasi yang rentan terinfeksi penyakit, *latent* (E) kelas individu yang telah terinfeksi penyakit tetapi tidak dapat menularkannya kepada individu lain, *infected* (I) kelas individu yang telah terinfeksi penyakit dan dapat menularkannya kepada individu lain, *quarantined* (Q) kelas individu yang sudah terinfeksi dan masuk dalam karantina, dan *recovered* (R) kelas subpopulasi yang sudah sembuh dari penyakit.

b. Ada dua titik kesetimbangan pada model SEIQR dengan populasi terbuka yaitu:

- 1) Titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}, \hat{Q}, \hat{R}) = (\frac{A+\rho}{d}, 0, 0, 0, 0)$.
- 2) Titik kesetimbangan endemik penyakit $E_1(S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*) = \left(\frac{(\mu+d)(\delta+\gamma+\sigma+d+\alpha)}{\mu\beta}, \frac{\rho+A}{(\mu+d)} - \frac{d(\delta+\gamma+\sigma+d+\alpha)}{\mu\beta}, \frac{\mu E^*}{(\delta+\gamma+\sigma+d+\alpha)}, \frac{\delta \mu E^*}{(\delta+\gamma+\sigma+d+\alpha)(\epsilon+d+\alpha)}, \frac{(\sigma+\gamma)\mu E^*(\epsilon+d+\alpha)+\delta\epsilon\mu E^*}{d(\delta+\gamma+\sigma+d+\alpha)(\epsilon+d+\alpha)} \right)$

c. Ada dua kestabilan titik kesetimbangan pada model SEIQR dengan populasi terbuka yaitu kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit dan kestabilan titik kesetimbangan endemik penyakit. Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal jika $pq - \frac{\mu}{d}(\beta(A + \rho)) > 0$, berarti dalam waktu yang lama penyakit akan hilang dari populasi, dan titik kesetimbangan endemik penyakit stabil asimtotik lokal jika $qr(\beta I^* + d) > \beta S^* \mu d$ dan $\beta I^*(r^2 + 2qr + q^2 + \beta I^*r + \beta q + 2dr + 2dq) > \beta S^* \mu(r + q + \beta I^*)$, yang berarti dalam waktu

yang lama penyakit akan terus ada dalam populasi dengan jumlah populasi setiap kelas sama.

Referensi

- [1] Abdalla, HasimObaid Ahmed., 2011. *Construction and Analysis of Efficient NumericalMethods to Solve Mathematical Models of TB and HIV Co-infection*.Department of Mathematics and Applied Mathematics at the Faculty of Natural Sciences, University of the Western Cape
- [2] Arlina,Vivi., 2013. *Kontrol Optimum PenyebaranPenyakit SARS berdasarkansubsistem model kompartemen*.IPB.
- [3] Clancy,M J A O'Callaghan and T C Kelly., 2006. *A Multi-scale problem arising in a model of avian flu virus in a seabird colony*. Institute of Physics Publishing,Ireland.
- [4] Ekawati,Aminah. *KestabilanModel SEIR*. ISSN 2085-3548
- [5] Fisher,SD., 1990. *Complex Variabel Second Edition*. Wadsworth & Brooks/ColeBooks & Software.Pasific Grove California.
- [6] Gleseacke J., 1994. *Modern Infectious Disease Epidemiology*.Oxford University.
- [7] Leon SJ., 1998. *Aljabar Linear danAplikasinya, Edisi ke-5*.Erlangga.
- [8] Nugroho, Didit Budi., 2010. *PersamaanDiferensialBiasadanAplikasinya*.Salatiga: GrahaIlmu.
- [9] Pratiwi,NovianadanKartono., 2008. *Strategi Model PengendalianPenyebaran Virus Influenza*.UniversitasDiponegoro.
- [10] Roni, T. P., 2011. *Kestabilan Lokal Bebas Penyakit Model Epidemic SEIR dengan Kemampuan Infeksi pada Periode Laten, Infeksi dan Sembuh*.Tugas Akhir Mahasiswa Politeknik Negeri Padang. Padang.
- [11] Strogartz SH., 1994. *Nonlinier Dynamics and Chaos with Application to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Perseus Books:New York.
- [12] Tamrin, Husnidkk., 2007. *Model SIR PenyakitTidak Fatal*.Jurusan Matematika FMIPA UGM. Yogyakarta.
- [13] Widodo., 2007. *Pengantar Model Matematika*.UniversitasGadjahMada. Yogyakarta.
- [14] XieLiejun., 2011. *A Criterion for Hurtwitz Polynomials and its Application*.MECS.