Aplikasi Geometri pada Permainan Dinamis Non-Kooperatif Skalar Waktu tak Berhingga

Nilwan Andiraja
UIN Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru
Jl. H.R Soebrantas No 155 Km. 18 telp : 0761-8359937
e-mail: nilwanandiraja@uin-suska.ac.id

Abstrak

Pada penelitian ini dibahas mengenai penentuan titik ekuilibrium Nash, pada permainan dinamis non-kooperatif skalar waktu tak berhingga untuk dua pemain, dengan mengaplikasikan geometri analitik. Pembahasan dimulai dengan membentuk persamaan model permainan dinamis non-kooperatif skalar waktu tak berhingga untuk dua pemain berdasarkan persamaan permainan dinamis non-kooperatif untuk waktu tak berhingga. Selanjutnya dibentuk dua persamaan aljabar Riccati dan vektor kendali untuk masing-masing pemain. Vektor kendali yang diperoleh digunakan untuk membentuk syarat kestabilan sistem permainan. Kemudian digunakan pendekatan geometri analitik untuk menganalisa titik ekuilibrium Nash permainan dinamis. Berdasarkan analisa didapat bahwa dua persamaan aljabar Riccati merupakan bentuk khusus dari persamaan berderajat dua yang merupakan persamaan hiperbola. Sehingga berdasarkan syarat kestabilan sistem permainan maka titik ekuilibrium Nash dapat diperoleh dari titik potong kedua hiperbola pada daerah yang memenuhi syarat kestabilan sistem.

Kata kunci: Dinamis, Geometri, Permainan, Riccati, Skalar

Abstract

In this research was discuss about to find equilibrium Nash in non-cooperative dynamic game two-player with scalar case for infinite time, by application the analytic geometry. Discuss was started from made of equation model for non-cooperative dynamic game two-player with scalar case for infinite time based on equation of non-cooperative dynamic game for infinite time. Then made of two the algebraic Riccati equation and control vector for each player. The control vector is used for made of stability condition of game. Then is used the curse of analytic geometry for analyse equilibrium Nash for dynamic game. Base on analyse, there are two algebraic Riccati equation which it is special case of the algebraic of second degree which it is hyperbolic equation. Then, based on of stability condition of game then equilibrium Nash can get from intersection point of two hyperbolic in adequate area for stability condition of game.

***Keywords**: Dynamic, Game ,Geometry, Riccati, Scalar*

1. Pendahuluan

Matematika telah banyak berperan dalam penyelesaian persoalan-persoalan sehari-hari. Dalam menyelasaikan persoalan-persoalan yang terjadi, matematika pada umumnya merubah persoalan-persoalan tersebut ke bentuk model matematika. Model matematika yang telah terbentuk, kemudian diselesaikan dengan menggunakan teori-teori yang sesuai dan tersedia di matematika.

Salah satu teori matematika yang sesuai dan sedang berkembang saat ini yaitu teori permainan. Hal ini karena, teori permainan merupakan sebuah teori yang mempelajari bagaimana seorang pihak yang kemudian disebut pemain harus bertindak secara rasional dalam persoalan yang kemudian disebut permainan. Pada teori permainan, persoalan dirubah ke model matematika yang telah terbentuk akan diselesaikan dengan solusi akhir berbentuk vektor kendali. Vektor kendali yang terbentuk jumlahnya tunggal atau banyak. Banyaknya vektor kendali yang diperoleh berhubungan dengan banyaknya titik ekuilibrium.

Menentukan titik ekuilibrium pada teori permainan, pada umumnya dilakukan dengan cara penurunan atau penjabaran dari persamaan-persamaan yang penuh dengan simbol-simbol variabel yang rumit dan abstrak. Oleh karena itu, dibutuhkan pemahaman yang baik terhadap teori kalkulus matriks, integral, teori diferensial, analisis real dan teori kendali. Sehingga tidak mudah untuk memperoleh titik ekuilibrium permainan. Hal ini dapat dilihat dari jurnal-jurnal mengenai teori permainan salah satunya yang dijelaskan oleh Jacob Engwerda (2000) yang menjelaskan tentang titik ekuilibrium permainan dinamis non-kooperatif dengan waktu tak hingga dan Weeren (1999) yang menjelaskan titik ekuilibrium persoalan permainan dinamis non-kooperatif dengan waktu tak hingga kasus non skalar dan skalar.

Namun pendekatan lain yang berbeda dan lebih sederhana, tapi dengan tujuan akhir yang sama yaitu mencari titik ekuilibrium adalah dengan menggunakan teori-teori yang tersedia di geometri. Selain tampak sederhana dalam analisa dan penurunan rumus, dengan geometri teori permainan juga dapat digambarkan. Karena dengan gambar grafik geometri, selain diperoleh titik ekuilibrium yang sesuai, dapat juga dilihat arah permainan mulai dari waktu awal sampai waktu tak hingga. Sehingga teori permainan tampak nyata dan kesan abstrak dapat dihilangkan sehingga pencarian titik ekuilibrium dapat lebih gampang dan lebih dimengerti. Oleh karena itu, penelitian ini akan membahas mengenai teori permainan dipandang dari teori geometri, termasuk mencari titik ekuilibrium sebagai solusi yang akan mengoptimalkan fungsi tujuan, yang sesuai dengan solusi strategi Nash.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan studi literatur dan langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Dibentuk model permainan yang terdiri dari sistem dinamis kasus permainan non-kooperatif skalar dua pemain dan fungsi tujuan untuk waktu tak hingga, berdasarkan permainan dinamis non-kooperatif untuk waktu tak berhingga,
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B_1\mathbf{u}_1(t) + B_2\mathbf{u}_2(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
dengan fungsi objektif yaitu
$$J_i(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,T) = \int_0^T \{\mathbf{x}^T(t)Q_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_i^T(t)R_{ii}\mathbf{u}_i(t) + \mathbf{u}_j^T(t)R_{ij}\mathbf{u}_j(t)\}dt, \quad j \neq i$$
2. Dibentuk persamaan aljabar Riccati untuk permainan dinamis non-kooperatif skalar dua pemain, vektor kendali dan syarat kestabilan sistem.
3. Selanjutnya, dengan geometri analitik dianalisa titik ekuilibrium Nash permainan dari persamaan aljabar Riccati yang diperoleh pada tahapan no. 2.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Permainan Dinamis Non-Kooperatif Untuk Waktu Tak Berhingga

Pada subab ini diberikan persamaan diferensial permainan dinamis dua pemain untuk waktu tak berhingga yaitu,
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B_1\mathbf{u}_1(t) + B_2\mathbf{u}_2(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
(1)

dengan para pemain meminimalkan fungsi tujuan,
$$J_i(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,T_f) = \int_0^{T_f} \{\mathbf{x}^T(t)Q_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_i^T(t)R_{ii}\mathbf{u}_i(t) + \mathbf{u}_j^T(t)R_{ij}\mathbf{u}_j(t)\}dt, \quad j \neq i \tag{2}$$

pada bagian ini dibahas untuk kasus waktu tak berhingga, yaitu fungsi tujuan memenuhi kriteria $J_i(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = \lim_{T_f \to \infty} J_i(\mathbf{x}_0,\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,T_f)$ dengan $i = 1,2$.

Dari sistem dinamik permainan dinamis dua pemain untuk waktu tak berhingga diatas dapat dibentuk persamaan aljabar Riccati yaitu,
$$0 = -(A - S_2K_2)^T K_1 - K_1(A - S_2K_2) + K_1S_1K_1 - Q_1 - K_2S_{21}K_2, \tag{3}$$
$$0 = -(A - S_1K_1)^T K_2 - K_2(A - S_1K_1) + K_2S_2K_2 - Q_2 - K_1S_{12}K_1, \tag{4}$$

Kedua persamaan aljabar Riccati diatas (3)-(4) akan memiliki solusi (K_1, K_2), yang akan membentuk vektor kendali $\mathbf{u}_i = -R_{ii}^{-1}B_iK_i\mathbf{x}(t)$ dengan $i = 1,2$. Dengan vektor-vektor kendali tersebut memenuhi

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}(t) - B_1R_{11}^{-1}B_1K_1\mathbf{x}(t) - B_2R_{22}^{-1}B_2K_2\mathbf{x}(t)$$

dengan $S_i = B_iR_{ii}^{-1}B_i$, maka

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}(t) - S_1K_1\mathbf{x}(t) - S_2K_2\mathbf{x}(t)$$

(5)

Vektor-vektor kendali $\mathbf{u}_i = -R_{ii}^{-1}B_iK_i\mathbf{x}(t)$ dengan $i = 1,2$ akan menstabilkan fungsi dinamik permainan diatas.

3.2. Permainan Dinamis Non-Kooperatif Untuk Waktu Tak Berhingga Kasus Skalar

Selanjutnya dibentuk sistem permainan non-kooperatif dua pemain untuk kasus skalar, dengan mensubstitusikan $R_{12} = R_{21} = 0$, $A = a$, $B_i = b_i$, $Q_i = q_i$, $R_{ii} = r_i$ dengan $i = 1,2$ ke sistem permainan (4.1)-(4.2) diperoleh

$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}(t) + B_1\mathbf{u}_1(t) + B_2\mathbf{u}_2(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ berubah menjadi

$$\dot{x} = ax(t) + b_1u_1(t) + b_2u_2(t), \quad x(0) = x_0 \tag{6}$$

dengan fungsi tujuan untuk setiap pemain,

$$J_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, T_f) = \int_0^{T_f} \{\mathbf{x}^T(t)Q_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_i^T(t)R_{ii}\mathbf{u}_i(t) + \mathbf{u}_j^T(t)R_{ij}\mathbf{u}_j(t)\}dt, \quad j \neq i$$

menjadi,

$$J_i(x_0, u_1, u_2) = \int_0^{\infty} \{x(t)q_ix(t) + u_i(t)r_iu_i(t) + u_j(t)(0)u_j(t)\}dt,$$

$$J_i(x_0, u_1, u_2) = \int_0^{\infty} \{q_ix^2(t) + r_iu_i^2(t)\}dt, \quad i = 1,2, \tag{7}$$

Selanjutnya, vektor kendali untuk pemain pertama dapat diperoleh berdasarkan vektor pemain kedua yaitu $u_2 = -r_2^{-1}b_2k_2x(t) = -\frac{b_2}{r_2}k_2x(t)$, maka fungsi dinamik menjadi

$$\dot{x} = ax + b_1u_1 - \frac{b_2^2}{r_2}k_2x(t) = (a - s_2k_2)x(t) + b_1u_1$$

dengan fungsi tujuan sebagai berikut

$$J_1 = \int_0^{\infty} \{q_1x^2 + r_1u_1^2\}dt$$

maka dapat dibentuk persamaan aljabar Riccati sebagai berikut,

$$0 = -(a - s_2k_2)^T k_1 - k_1(a - s_2k_2) + k_1s_1k_1 - q_1$$
$$0 = -ak_1 + s_2k_2k_1 - ak_1 + s_2k_2k_1 + k_1s_1k_1 - q_1$$
$$s_1k_1^2 + 2s_2k_1k_2 - 2ak_1 - q_1 = 0 \qquad (8)$$

dapat dibentuk vektor kendali untuk pemain pertama yaitu $u_1 = -\frac{b_1}{r_1}k_1x(t)$.

Berikutnya untuk pemain kedua, diketahui vektor kendali pemain pertama yaitu $u_1 = -\frac{b_1}{r_1}k_1x(t)$, maka fungsi dinamik menjadi,

$$\dot{x} = (a - s_1k_1)x(t) + b_2u_2$$

dengan fungsi tujuan sebagai berikut

$$J_1 = \int_0^{\infty} \{q_2x^2 + r_2u_2^2\}dt$$

maka dapat dibentuk persamaan aljabar Riccati sebagai berikut,

$$0 = -(a - s_1k_1)^T k_2 - k_2(a - s_1k_1) + k_2s_2k_2 - q_2$$
$$0 = -ak_2 + s_1k_1k_2 - ak_2 + s_1k_1k_2 + k_2s_2k_2 - q_2$$
$$s_2k_2^2 + 2s_1k_1k_2 - 2ak_2 - q_2 = 0 \qquad (9)$$

dapat dibentuk vektor kendali untuk pemain kedua yaitu $u_2 = -\frac{b_2}{r_2}k_2x(t)$.

Dengan mensubstitusikan vektor-vektor kendali pemain pertama dan kedua u_1 dan u_2 ke fungsi dinamik maka diperoleh

$$\dot{x} = (a - s_1k_1 - s_2k_2)x(t)$$

maka vektor-vektor kendali u_1 dan u_1 dapat menstabilkan sistem permainan, jika memenuhi

$$a - s_1k_1 - s_2k_2 < 0 \qquad (10)$$

3.3. Analisa Titik Ekuilibrium Nash

Berdasarkan geometri analitik, persamaan aljabar Riccati permainan dinamis waktu tak berhingga untuk kasus skalar yaitu persamaan (8)-(9) diketahui merupakan bentuk khusus dari persamaan berderajat dua

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Persamaan (8) merupakan persamaan hiperbola pada daerah (x_1, x_2), karena untuk $A = s_1,\ B = 2s_2,\ C = 0,\ D = -2a,\ E = 0,\ F = -q_1$ diperoleh

$$B^2 - 4AC = (2s_2)^2 - 4(s_1)(0) = 4s_2^2 > 0$$

kemudian berdasarkan persamaan (8) diperoleh

$$x_2 = -\frac{S_1}{2s_2}x_1 + \frac{a}{s_2} + \frac{\frac{q_1}{2s_2}}{x_1},$$

maka asimtot tegak adalah $x_1 = 0$, asimtot miring adalah $x_2 = -\frac{S_1}{2s_2}x_1 + \frac{a}{s_2}$, dan pusat hiperbola di $\left(0, \frac{a}{s_2}\right)$.

Selanjutnya persamaan (4.9) merupakan persamaan hiperbola pada daerah (x_1, x_2), karena untuk $A = s_2,\ B = 2s_1,\ C = 0,\ D = -2a,\ E = 0,\ F = -q_2$ diperoleh

$$B^2 - 4AC = (2s_1)^2 - 4(s_2)(0) = 4s_1^2 > 0$$

diperoleh

$$x_1 = -\frac{S_2}{2s_1}x_2 + \frac{a}{s_1} + \frac{\frac{q_2}{2s_2}}{x_2},$$

sehingga asimtot datar adalah $x_2 = 0$, asimtot miring adalah $x_1 = -\frac{S_2}{2s_1}x_2 + \frac{a}{s_1}$, dan pusat hiperbola di $\left(\frac{a}{s_1}, 0\right)$.

Persamaan (10) merupakan syarat kestabilan, yang menggambarkan daerah stabil dan daerah tidak stabil. Titik ekuilibrium Nash dapat diperoleh dari titik perpotongan kedua hiperbola pada daerah kestabilan. Seperti dapat dilihat pada contoh berikut.

Contoh 1. Diberikan persamaan (4.8)-(4.10), dengan $a = 1,\ b_i = r_i = 2,\ q_1 = \frac{1}{6}$ dan $q_2 = \frac{1}{9}$, dengan $a = 1,\ s_1 = s_2 = 2$ maka diperoleh persamaan hiperbola pertama adalah

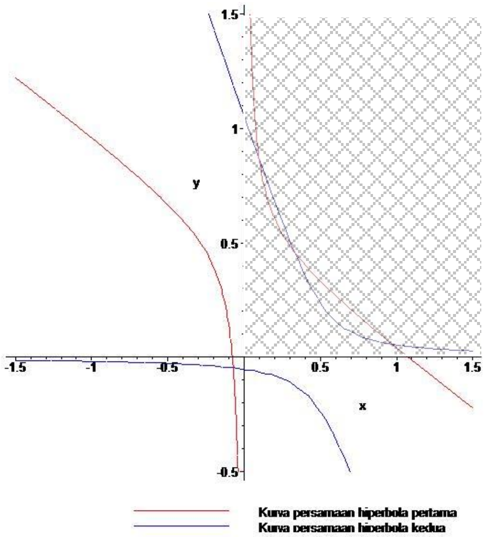
$$2k_1^2 + 4k_1k_2 - 2k_1 - \frac{1}{6} = 0$$

dengan asimtot tegak $k_1 = 0$, asimtot miring $k_2 = -\frac{S_1}{2s_2}k_1 + \frac{a}{s_2} = -\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}$ dan pusat hiperbola adalah $(0, \frac{1}{2})$.

Sedangkan persamaan hiperbola kedua diperoleh yaitu

$$2k_2^2 + 4k_1k_2 - 2k_2 - \frac{1}{9} = 0$$

dengan asimtot datar $k_2 = 0$, asimtot miring $k_1 = -\frac{S_2}{2s_1}k_2 + \frac{a}{s_1} = -\frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2}$ dan pusat hiperbola adalah $(\frac{1}{2}, 0)$. Syarat kestabilan sistem yaitu $1 - 2k_1 - 2k_2 < 0$, kedua hiperbola dapat dilihat pada gambar 1.



Gambar 1. Permainan dengan tiga titik ekuilibrium Nash

Berdasarkan gambar 1, diperoleh bahwa, kedua hiperbola memiliki empat titik potong, satu titik potong tidak memenuhi syarat kestabilan sistem dan tiga titik potong memenuhi syarat kestabilan sistem (daerah arsiran). Maka diperoleh tiga umpan balik ekuilibrium Nash yaitu tiga titik potong yang memenuhi syarat kestabilan sistem.

4. Kesimpulan

Berdasarkan uraian pembahasan yang telah diberikan, maka diperoleh kesimpulan bahwa berdasarkan persamaan diferensial sistem dinamik permainan non-kooperatif untuk kasus skalar yaitu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u_1(t) + B_2u_2(t), \qquad x(0) = x_0$$

dengan masing-masing pemain meminimalkan fungsi objektif

$$J_i(x_0, u_1, u_2) = \int_0^\infty \{q_i x^2(t) + r_i u_i^2(t)\}dt, \quad i = 1, 2$$

maka diperoleh persamaan aljabar Riccati untuk pemain pertama dan kedua berturut-turut $s_1k_1^2 + 2s_2k_1k_2 - 2ak_1 - q_1 = 0$ dan $s_2k_2^2 + 2s_1k_1k_2 - 2ak_2 - q_2 = 0$ serta diperoleh syarat kestabilan sistem yaitu $a - s_1k_1 - s_2k_2 < 0$.

Berdasarkan geometri analitik diperoleh bahwa kedua persamaan aljabar Riccati yang diperoleh merupakan persamaan hiperbola yang saling berpotongan. Titik potong dari dua hiperbola tersebut merupakan titik ekuilibrium Nash. Titik ekuilibrium Nash yang memenuhi untuk sistem dinamik permainan non-kooperatif untuk kasus skalar dua pemain merupakan titik potong kedua hiperbola yang memenuhi syarat kestabilan sistem.

Selanjutnya, untuk pengembangan penelitian dapat dilakukan penelitian dua pemain untuk kasus waktu berhingga dengan asumsi matriks-matriks menjadi skalar atau matriks berukuran $n \times n$. Penelitian dapat dilakukan untuk kasus *N* pemain dengan asumsi yang sama dengan kasus dua pemain untuk kasus waktu tak berhingga.

Referensi

[1]. Basar T. Dynamic noncooperative game theory. Philadelphia: SIAM. 1999.
[2] Bellman R. Introduction to Matrix Analysis. Philadelphia: SIAM. 1997
[3] Engwerda J. Feedback Nash equilibria in the scalar infinite horizon LQ-game. *Automatica*. 2000; 36 : 135-139.
[4] Engwerda J. LQ Dynamic Optimization and Differential Games. Chichester: John Wiley & Sons. 2005.
[5] Lewis FL. Applied Optimal Control and Estimation. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1992.
[6] Olsder GJ. Mathematical System Theory. Delft: University of Technology. 1994.
[7] Perko L. Differential Equations and Dynamical System. New York: Springer-Verlag. 1991.
[8] Weeren AJTM, Schumacher JM, Engwerda J. Asymptotic analysis of linear feedback Nash equilibria in nonzero-sum linear-quadratic differential games. *Journal of Optimization Theory and Applications*.1999: 101: p693–723.