Seminar Nasional Teknologi Informasi, Komunikasi dan Industri (SNTIKI) 8 *ISSN : 2085-9902*
Pekanbaru, 9 November 2016

Metode Iterasi Tiga Langkah dengan Orde Konvergensi Tujuh

Wartono[1], Mayumi Istiqomah[2]
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Subrantas km 16, Simpang Baru, Pekanbaru
e-mail: [1]wartono@uin-suska.ac.id

Abstrak

Metode Potra-Ptak dan varian Newton merupakan salah satu metode iterasi yang digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan nonlinear dengan orde konvergensi tiga. Pada Tugas Akhir ini penulis melakukan modifikasi komposit metode Potra-Ptak dan varian Newton dengan melibatkan parameter θ_1 dan θ_2 dan menambahkan langkah ketiga yang mana $f'(z_n)$diaproksimasi menggunakan interpolasi Lagrange orde dua. Berdasarkan hasil kajian, diperoleh metode iterasi baru berorde konvergensi tujuh dengan θ_1=3 dan θ_2= –2. Setiap iterasi memerlukan empat evaluasi fungsi f yaitu, $f(x_n)$, $f'(x_n)$,$f(y_n)$ dan$f(z_n)$ dengan indeks effisiensi $7^{1/4}\approx 1,6265$. Simulasi numerik dan perbandingan terhadap metode lain dilakukan untuk menunjukkan keefektifan metode baru dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.

Kata kunci: *indeks effisiensi, interpolasi Lagrange, komposit metode potra-ptak dan varian newton, orde konvergensi persamaan nonlinear*

Abstract

Potra-Ptak method and Newton's variant are one of iteration method which it uses for determine root of nonlinear similarity with third order convergence. In this Final Task, the writer has done modified composite of Potra-Ptak method and Newton's variant by enganging θ_1 and θ_2 parameter and adding the third step which approximation $f'(z_n)$ using second order Lagrange interpolation. Based on the research result new iteration method have seventh order convergence with θ_1=3 and θ_2=−2. Each of iteration needs four f evaluation function which they are $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f(y_n)$ and $f(z_n)$ with efficiency index of $7^{1/4}\approx 1{,}6265$. Numerical simulation is given to show the performance of composite Potra-Ptak method and Newton's variant.

Keywords: *composite of potra-ptak method and newton's variant, efficiency index, Lagrange interpolation, nonlinear equation, order convergence*

1. Pendahuluan

Persamaan nonlinear merupakan representasi dari fenomena bidang sains dan rekayasa yang hampir sebagain besar tidak dapat ditentukan penyelesaiannya secara analitik. Oleh karena itu, alternatif penyelesaian dilakukan secara numerik dengan perhitungan berulang atau disebut iterasi.

Salah satu metode iterasi yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear adalah metode Newton yang ditulis sebagai berikut.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (1)$$

Metode Newton merupakan metode iterasi dengan orde konvergensi kuadratik dan menggunakan dua evaluasi fungsi $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$pada setiap iterasinya. Oleh karena itu, indeks efisiennya sebesar $2^{1/2} \approx 1.414213$.

Indeks efisiensi merupakan salah satu parameter untuk mengukur kinerja dari suatu metode terasi, dan parameter tersebut bergantung kepada orde konvergensi dan banyaknya evaluasi fungsi yang dilibatkan pada setiap iterasi.

Beberapa peneliti melakukan usaha-usaha untuk mengembangan metode Newton dengan menggunakan berbagai pendekatan, seperti : integral Newton (Weerakoon dan

Fernando (2003)), titik tengah (Jisheng, dkk (2007)), rataan harmonik (Kalyanasundaram(2013), Nedzhibov (2002)), kuadratur Newton-Cote (Hasanov dkk (2002), Ozban (2004)), selisih terbagi maju (Sharma (2005)).

Selain memodifikasi, beberapa metode iterasi dengan orde konvergensi tiga juga dapat dihasilkan dengan mengkountruksi kembali berdasarkan beberapa pendekatan. Salah satunya yang dilakukan oleh Chun (2005) memodifikasi metode Newton menghasilkan metode Potra-Ptak berorde konvergensi tiga dengan rumusan sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \tag{2}$$

Selanjutnya Chun (2008) memodifikasi kembali metode Newton dengan cara menyetarakan dua metode untuk menghilangkan fungsi $f'(y_n)$ sehingga menghasilkan varian metode Newton berorde konvergensi tiga sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)+2f(y_n)}{f(x_n)+f(y_n)} \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3}$$

Berbagai macam cara dilakukan untuk meningkatkan orde konvergensi metode iterasi. Salah satunya adalah dengan menambah langkah dari metode iterasi. Selanjutnya lakukan pendekatan tertentu sehingga menjadi metode iterasi tiga langkah, sebagaimana yang dilakukan oleh Yasmin (2013) yang memodifikasi metode Steffensen menggunakan interpolasi Lagrange menghasilkan orde konvergensi tujuh, Khattri (2012) yang menggunakan pendekatan Gauss Kuadratur, Zhao (2012) yang menggunakan interpolasi Hermite sebagai langkah ketiga saat mengimprovisasi metode Potra-Ptak dengan metode Ostrowski dan Wang (2010) yang memodifikasi metode Ostrowski dengan interpolasi Hermite.

2. Metode yang Dikembangkan

Pertimbangkan kembali metode Potra-Ptak dan Varian Newton yang dikembangkan oleh Chun [ ] dengan orde konvergensi tiga yang masing-masing ditulis sebagai berikutit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \tag{4}$$

dan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)+2f(y_n)}{f(x_n)+f(y_n)} \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{5}$$

dengan yn di definisikan pada persamaan (1).

Selanjutnya Persamaan (4) dan Persamaan (5) akan dijumlahkan menggunakan cara komposit yang dilakukan oleh Ezzati (2011) dalam bentuk:

$$x_{n+1} = \theta_1\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}\right) + \theta_2\left(x_n - \frac{f(x_n)+2f(y_n)}{f(x_n)+f(y_n)} \cdot \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) \tag{6}$$

Kemudian Persamaan (4.4) disederhanakan sehingga menghasilkan bentuk:

$$x_{n+1} = (\theta_1+\theta_2)x_n - \theta_1 \frac{f(x_n)+f(y_n)}{f'(x_n)} - \theta_2 \frac{f(x_n)(f(x_n)+2f(y_n))}{f'(x_n)(f(x_n)+f(y_n))} \tag{7}$$

Persamaan (7) adalah metode iterasi dua langkah yang merupakan hasil komposit dari metode Potra-Ptak dan varian Newton yang menggunakan tiga evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan $f(y_n)$ pada setiap iterasinya.

Untuk meningkatkan orde konvergensi, selanjutnya akan ditambahkan langkah ketiga dalam bentuk Newton dalam z_n, sehingga Persamaan (1) didefinisikan kembali

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \tag{8}$$

dengan zn didefinisikan pada Persamaan (7).

Bentuk $f'(z_n)$ pada Persamaan (8) akan diaproksimasikan menggunakan interpolasi Lagrange orde dua dalam bentuk

$$f'(z_n)=\frac{f(z_n)-f(x_n)}{z_n-x_n}+\frac{f(z_n)-f(y_n)}{z_n-y_n}-\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$$

atau

$$f'(z_n)=f[x_n,z_n]+f[y_n,z_n]-f[x_n,y_n] \tag{9}$$

dengan

$$f[x_n,z_n]=\frac{f(z_n)-f(x_n)}{z_n-x_n} \tag{10}$$

$$f[y_n,z_n]=\frac{f(z_n)-f(y_n)}{z_n-y_n} \tag{11}$$

$$f[x_n,y_n]=\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} \tag{12}$$

Oleh karena itu, metode iterasi komposit metode Potra-Ptak dan varian Newton iterasi tiga langkah secara lengkap ditulis sebagai berikut:

$$y_n=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{13}$$

$$z_n=(\theta_1+\theta_2)x_n-\theta_1\frac{f(x_n)+f(y_n)}{f'(x_n)}-\theta_2\frac{f(x_n)(f(x_n)+2f(y_n))}{f'(x_n)(f(x_n)+f(y_n))} \tag{14}$$

$$x_{n+1}=z_n-\frac{f(z_n)}{f[x_n,z_n]+f[y_n,z_n]-f[x_n,y_n]} \tag{15}$$

Persamaan ( ) merupakan metode iterasi tiga langkah yang melibatkan empat evaluasi fungsi, yaitu $f(x_n)$, $f(y_n)$, $f(z_n)$ dan $f'(x_n)$.

3. Hasil dan Diskusi

3.1. Analisa Konvergensi

Berdasarkan persamaan (13) – (15), akan ditentukan orde konvergensi dengan menggunakan ekspansi deret Taylor pada teorema berikut.

Teorema 4.1: Asumsikan $\alpha\in D$ adalah akar dari fungsi $f(x)$ yang terdiferensial $f:D\to R$ pada interval terbuka D. Jika x_0 cukup dekat ke α, maka Persamaan (15) memiliki eror:

$$e_{n+1}=(c_2^2c_3^2-7c_2^4c_3)e_n^7+O(e_n^8) \tag{16}$$

Bukti: Misalkan α adalah akar dari fungsi $f(x)$. Asumsikan $f(\alpha)=0$ dan $x_n=\alpha+e_n$. Selanjutnya diaproksimasikan fungsi $f(x)$ disekitar x_n dengan menggunakan deret Taylor, sehingga diperoleh:

$$f(x_n)=f'(\alpha)\left(e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3+O(e_n^4)\right) \tag{17}$$

Kemudian untuk fungsi $f'(x_n)$ diekspansi disekitar x_n menggunakan deret Taylor sehingga diperoleh:

$$f'(x_n)=f'(\alpha)\left(1+2c_2e_n+3c_3e_n^2+O(e_n^3)\right) \tag{18}$$

Dengan menggunakan Persamaan (17) dan Persamaan (18), kemudian substitusikan ke Persamaan (13) dengan menggunakan $x_n=e_n+\alpha$ maka diperoleh:

$$y_n=\alpha+c_2e_n^2-(2c_2^2-2c_3)e_n^3+O(e_n^4) \tag{20}$$

Berdasarkan ekspansi deret Taylor disekitar α, maka selanjutnya $f(y_n)$ menghasilkan bentuk:

$$f(y_n) = f'(\alpha)(c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + (5c_2^3 - 7c_2 c_3 + 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5)) \tag{21}$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (17), (18) dan (21), maka diperoleh

$$\theta_1 \cdot \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)} = \theta_1 e_n - 2\theta_1 c_2^2 e_n^3 + (-7\theta_1 c_2 c_3 + 9\theta_1 c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5) \tag{22}$$

dan

$$\begin{aligned} \theta_2 \frac{(f(x_n) + 2f(y_n))f(x_n)}{(f(x_n) + f(y_n))f'(x_n)} = \theta_2 e_n - 3\theta_2 c_2^2 e_n^3 + (-11\theta_2 c_2 c_3 + 17\theta_2 c_2^3)e_n^4 + \\ (-322\theta_2 c_2^4 - 6\theta_2 c_2 c_4 + 68\theta_2 c_2^2 c_3 - \\ 4\theta_2 c_3^2)e_n^5 + O(e_n^6) \end{aligned} \tag{23}$$

Substitusikan Persamaan (22) dan (23) ke dalam Persamaan (14), maka diperoleh z_n sebagai berikut:

$$\begin{aligned} z_n = \alpha + (2\theta_1 c_2^2 + 3\theta_2 c_2^2)e_n^3 + (7\theta_1 c_2 c_3 - 17\theta_2 c_2^3 + 11\theta_2 c_2 c_3 - 9\theta_1 c_2^3)e_n^4 + \\ (-68\theta_2 c_2^2 c_3 + 38\theta_1 c_2^4 + 322\theta_2 c_2^4 + 6\theta_2 c_2 c_4 - 24\theta_1 c_2^2 c_3 + 4\theta_2 c_3^2)e_n^5 + O(e_n^6) \end{aligned} \tag{24}$$

Dengan menggunakan ekspansi deret Taylor f disekitar α, maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(z_n) = f'(\alpha)(2\theta_1 c_2^2 + 3\theta_2 c_2^2)e_n^3 + (7\theta_1 c_2 c_3 - 17\theta_2 c_2^3 + 11\theta_2 c_2 c_3 - 9\theta_1 c_2^3)e_n^4 \\ + (-68\theta_2 c_2^2 c_3 + 38\theta_1 c_2^4 + 322\theta_2 c_2^4 + 6\theta_2 c_2 c_4 - 24\theta_1 c_2^2 c_3 + 4\theta_2)e_n^5 + O(e_n^6) \end{aligned} \tag{25}$$

Selanjutnya, sebelum mengaproksimasikan $f'(z_n)$ pada Persamaan (25) terlebih dahulu akan ditentukan nilai-nilai dari fungsi $f[x_n, z_n], f[x_n, y_n]$ dan $f[y_n, z_n]$ dengan menggunakan ekspansi deret Taylor. Substitusikan Persamaan (21) dan (22) ke Persamaan (10), (11) dan (12), maka masing-masing diperoleh:

$$\begin{aligned} f[x_n, z_n] = f'(\alpha)(1 + c_2 e_n + c_3 e_n^2 + (c_4 + 2\theta_1 c_2^3 + 3\theta_2 c_2^3)e_n^3 + (9\theta_1 c_2^2 c_3 - 9\theta_1 c_2^4 \\ - 17\theta_2 c_2^4 + 14\theta_2 c_2^2 c_3)e_n^4 + (9\theta_2 c_2^2 c_4 - 33\theta_1 c_2^3 c_3 + 322\theta_2 c_2^5 + 38\theta_1 c_2^5 \\ - 85\theta_2 c_2^3 c_3 + 7\theta_1 c_2 c_3^2 + 11\theta_2 c_2 c_3^2 + 2\theta_1 c_2^2 c_4 + 4\theta_2 c_2)e_n^5 + O(e_n^6) \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} f[x_n, y_n] = f'(\alpha)(1 + c_2 e_n + (c_3 + c_2^2)e_n^2 + (c_4 + 3c_2 c_3 - 2c_2^3)e_n^3 \\ + (2c_3^2 + 3c_2^4 - 8c_2^2 c_3 + 4c_2 c_4)e_n^4 + O(e_n^5)) \end{aligned} \tag{27}$$

dan

$$\begin{aligned} f[y_n, z_n] = f'(\alpha)(1 + c_2^2 e_n^2 + (2\theta_1 c_2^3 + 2c_2 c_3 + 3\theta_2 c_2^3 - 2c_2^3)e_n^3 + (-12c_2^4 \\ - 96c_3^2 + 3c_2 c_4 + 58c_2^2 c_3 - 16\theta_1^4 c_2^4 - 16c_3^4 / c_2^4 - 81\theta_2^4 c_2^4 - 216\theta_2^2 c_2^4 - 96\theta_1^2 c_2^4 \\ - 288\theta_1\theta_2 c_2^4 + 299\theta_2 c_2^2 c_3 + 199\theta_1 c_2^2 c_3 - 216\theta_2^2 c_3^2 - 96\theta_1^2 c_3^2 + 64c_3^3 / c_2^2 \\ - 216\theta_2^3 c_2^4 - 64\theta_1^3 c_2^4 - 73\theta_1 c_2^4 - 113\theta_2 c_2^4 - 216\theta_1^2\theta_2^2 c_2^4 - 216\theta_1\theta_2^3 c_2^4 \\ - 96\theta_1^3\theta_2 c_2^4 + 432\theta_1\theta_2^2 c_2^2 c_3 + 288\theta_1^2\theta_2 c_2^2 c_3 + 576\theta_1\theta_2 c_2^2 c_3 - 288\theta_2 c_3^2 \\ - 192\theta_1 c_3^2 + 64\theta_1^3 c_2^2 c_3 + 64\theta_1 c_3^3 / c_2^2 + 216\theta_2^3 c_2^2 c_3 + 96\theta_2 c_3^3 / c_2^2 - 288\theta_1^2\theta_2 c_2^4 \\ - 432\theta_1\theta_2^2 c_2^4 + 432\theta_2^2 c_2^2 c_3 + 192\theta_1^2 c_2^2 c_3 - 288\theta_1\theta_2 c_3^2)e_n^4 + O(e_n^5)) \end{aligned} \tag{28}$$

Selanjutnya dengan menggunakan Persamaan (25), (26), (27), (28) dan disubstitusikan kep Persamaan (15), maka diperoleh

$$\begin{aligned} f'(z_n) \approx 1 + (-c_2 c_3 + 6\theta_2 c_2^3 + 4\theta_1 c_2^3)e_n^3 + (-15c_2^4 - 98c_3^2 - c_2 c_4 + 66c_2^2 c_3 - 16\theta_1^4 c_2^4 \\ - 16c_3^4 / c_2^4 - 81\theta_2^4 c_2^4 - 216\theta_2^2 c_2^4 - 96\theta_1^2 c_2^4 - 288\theta_1\theta_2 c_2^4 + 313\theta_2 c_2^2 c_3 + 208\theta_1 c_2^2 c_3 \\ + c_2^2 c_3 + 208\theta_1 c_2^2 c_3 - 216\theta_2^2 c_3^2 - 96\theta_1^2 c_3^2 + 64c_3^3 / c_2^2 - 216\theta_2^3 c_2^4 - 64\theta_1^3 c_2^4 \\ - 130\theta_2 c_2^4 - 216\theta_1^2\theta_2^2 c_2^4 - 216\theta_1\theta_2^3 c_2^4 - 96\theta_1^3\theta_2 c_2^4 + 432\theta_1 + \theta_2^2 c_2^2 c_3 \end{aligned}$$

$$+288\theta_1^2\theta_2 c_2^2 c_3 + 576\theta_1\theta_2 c_2^2 c_3 - 288\theta_2 c_3^2 - 192\theta_1 c_3^2 + 64\theta_1^3 + c_2^2 c_3$$
$$+64\theta_1 c_3^3 / c_2^2 + 216\theta_2^3 c_2^2 c_3 + 96\theta_2 c_3^3 / c_2^2 - 288\theta_1^2\theta_2 c_2^4 - 432\theta_1\theta_2^2 c_2^4$$
$$+432\theta_2^2 c_2^2 c_3 + 192\theta_1^2 c_2^2 c_3 - 288\theta_1\theta_2 c_3^2) e_n^4 + O(e_n^5) \tag{29}$$

Kemudian Persamaan (25) dibagi dengan Persamaan (29) sehingga menghasilkan

$$\frac{f(z_n)}{f'(z_n)} = (2\theta_1 c_2^2 + 3\theta_2 c_2^2) e_n^3 + (7\theta_1 c_2 c_3 - 17\theta_2 c_2^3 + 11\theta_2 c_2 c_3 - 9\theta_1 c_2^3) e_n^4 +$$
$$(-68\theta_2 c_2^2 c_3 + 38\theta_1 c_2^4 + 322\theta_2 c_2^4 + 6\theta_2 c_2 c_4 - 24\theta_1 c_2^2 c_3 + 4\theta_2) e_n^5 + O(e_n^6) \tag{30}$$

Substitusikan Persamaan (30) ke Persamaan (15) dan dengan menggunakan $x_n = \alpha + e_n$ maka diperoleh galat dari metode iterasi (13) – (15) sebagai berikut:

$$e_{n+1} = ((-2\theta_1 - 3\theta_2) c_2^3 c_3 + (12\theta_1\theta_2 + 4\theta_1^2 + 9\theta_2^2) c_2^5) e_n^6 + ((-864\theta_2\theta_1^2 - 240\theta_2\theta_1^4$$
$$-810\theta_2^4\theta_1 - 1296\theta_2^2\theta_1 - 628\theta_1\theta_2 - 1080\theta_2^3\theta_1^2 - 768\theta_2\theta_1^3 - 720\theta_2^2\theta_1^3 - 492\theta_2^2$$
$$-1728\theta_2^2\theta_1^2 - 648\theta_2^3 - 648\theta_2^4 - 243\theta_2^5 - 45\theta_2 - 192\theta_1^3 - 200\theta_1^2 - 1728\theta_2^3\theta_1$$
$$-30\theta_1 - 128\theta_1^4 - 32\theta_1^5) c_2^6 + (1336\theta_1\theta_2 + 1728\theta_2^2\theta_1^2 + 1728\theta_2^3\theta_1 + 768\theta_2\theta_1^3$$
$$+1728\theta_2\theta_1^2 + 384\theta_1^3 + 215\theta_2 + 1296\theta_2^3 + 648\theta_2^4 + 2592\theta_2^2\theta_1 + 128\theta_1^4$$
$$+444\theta_1^2 + 141\theta_1 + 1005\theta_2^2) c_3 c_2^4 + (-3\theta_2 - 2\theta_1) c_4 c_2^3 + (-864\theta_2^2 - 1152\theta_1\theta_2$$
$$-192\theta_1^3 - 305\theta_2 - 864\theta_2\theta_1^2 - 648\theta_2^3 - 203\theta_1 - 384\theta_1^2 - 1296\theta_2^2\theta_1) c_3^2 c_2^2 + (192\theta_2$$
$$+288\theta_2^2 + 128\theta_1 + 384\theta_1\theta_2 + 128\theta_1^2) c_3^3 + (-48\theta_2 - 32\theta_1) c_3^4 / c_2^2 \big) e_n^7 \tag{31}$$

Persamaan (31) merupakan orde konvergensi dari metode iterasi (13) – (15) yang masih memuat dua parameter θ_1 dan θ_2.Oleh karena itu, untuk meningkatkan orde konvergensi dapat dilakukan dengan menghilangkan koefisien dari e_n^6, atau secara matematis ditulis

$$-(2\theta_1 + 3\theta_2) c_2^3 c_3 + (4\theta_1^2 + 12\theta_1\theta_2 + 9\theta_2^2) c_2^5 = 0 \tag{32}$$

Berdasarkan Persamaan (32), diperoleh hubungan hubungan

$$2\theta_1 + 3\theta_2 = 0, \tag{33}$$

dan

$$\theta_1 + \theta_2 = 1 \tag{34}$$

dengan $\theta_1 \neq 0$ dan $\theta_2 \neq 0$. Berdasarkan Persamaan (33) dan Persamaan (34) diperoleh penyelesaian untuk $\theta_1 = 3$ dan $\theta_2 = -2$, sehingga dengan mensubstitusikan θ_1 dan $\theta_2$ke Persamaan (31) menjadi:

$$e_{n+1} = c_2^2 c_3 (-7c_2^2 + c_3) e_n^7 + O(e_n^8) \tag{35}$$

Persamaan (35) merupakan orde konvergensi dari metode iterasi (13) – (15) yang melibatkan empat evaluasi fungsi f yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f(y_n)$ dan $f(z_n)$ sehingga indeks effisiensinya sebesar $7^{1/4} \approx 1{,}626577$.

Selanjutnya, indeks efisien metode iterasi baru akan dibandingkan dengan beberapa metode diantaranya metode Newton yang disingkat dengan NM, metode Potra-Ptak (Chun, 2005) yang disingkat dengan PPM, Komposit metode Potra-Ptak dan metode Newton-Steffensen (KMPNS) (Jisheng, 2006), dekomposit metode Newton (Chun, 2005) yang disingkat dengan DNM, modifikasi metode Ostrowski (Singh, 2014) yang disingkat dengan MON. Hasil perbandingan indeks efisiensi ditunjukkan pada Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Perbandingan Indeks Effisiensi

No.	Metode Iterasi	Orde (p)	Evaluasi Fungsi (w)	Indeks Effisiensi (I)
1.	Newton (NM)	2	2	$2^{1/2} \approx 1{,}4142$
2.	Potra-Ptak (PPM)	3	3	$3^{1/3} \approx 1{,}4224$
3.	KMPNS	4	3	$4^{1/3} \approx 1{,}5874$
4.	Dekomposit Newton (DNM)	5	5	$5^{1/5} \approx 1{,}3797$
5.	Modifikasi metode Ostrowski (MON)	6	4	$6^{1/4} \approx 1{,}5651$
6.	KMPVN	7	4	$7^{1/4} \approx 1{,}6265$

Berdasarkan Tabel 1 terlihat bahwa metode dengan orde konvergensi yang besar dan evaluasi fungsi yang sedikit akan memiliki indeks effisiensi yang besar. Seperti hasil komposit metode Potra-Ptak dan varian Newton (KMPVN) yang memiliki orde konvergensi tujuh dengan empat evaluasi fungsi f sehingga menghasilkan indeks effisiensi $7^{1/4} \approx 1{,}6265$.

3.2. Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan untuk menguji performa metode iterasi baru dengan menentukan banyaknya jumlah iterasi yang diperlukan, galat mutlak pada iterasi ke-n dan orde konvergensi yang dihitung secara komputasi. Semua perhitungan dilakukan dengan menggunakan menggunakan *software* Maple 13 dan ketelitian 800 digit Adapun fungsi-fungsi yang akan diujiadalah sebagai berikut.

$f_1(x) = x^5 + x^4 + 4x^2 - 15$, α = 1,347428098968

$f_2(x) = e^{-x^2+x+2} - 1$, α = 1,000000000000

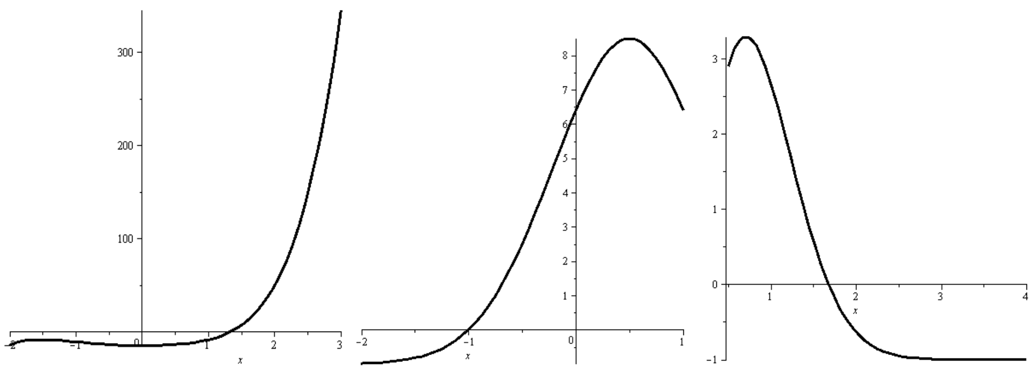
$f_3(x) = 10xe^{-x^2} - 1$, α = 1,679630610428

$f_5(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, α = 1,365230013414

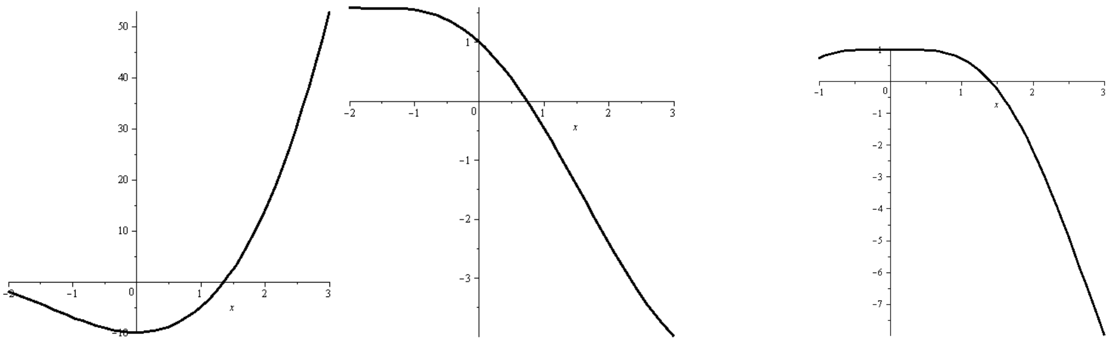
$f_6(x) = \cos x - x$, α = 0,739085133215

$f_7(x) = \sin^2 x - x^2 + 1$, α = 1,404491648215

Untuk melihat karakteristik dari fungsi-fungsi dapat ditunjukkan dengan menggunakan ploting grafik berikut.



(*b*) (c) (d)



(e) (*f*) (g)

Gambar 1. Grafik dari Fungsi-fungsi Nonlinear: a) $f_1(x)$, b) $f_2(x)$, c) $f_3(x)$, d) $f_4(x)$, e) $f_5(x)$, f) $f_6(x)$

Berdasarkan hasil perhitungan, diperoleh jumlah iterasi, galat mutlak pada iterasi ke-n, nilai fungsi pada iterasi ke-n dan orde konvergensi yang dihitung secara komputasi yang hasilnya ditampilkan dalam Tabel 2 berikut:

Tabel 2. Jumlah Iterasi Komposit metode Potra-Ptak dan varian Newton

Fungsi	x_0	n	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	$\lvert f(x_n) \rvert$	COC
$f_1(x)$	1,6	3	4,288730485959.E-219	1,588808243766.E-218	6,999992021395
$f_2(x)$	–0,5	3	5,608045595125.E-127	1,682413678537.E-126	6,999992021395
$f_3(x)$	1,8	3	3,351927506838.E-245	9,264366354839.E245	6,999982239341
$f_4(x)$	1,5	3	1,865757465811.E-429	3,080999761177.E-428	6,999999999531
$f_5(x)$	1,7	3	6,091026293118.E-261	1,019401487423.E-260	6,999999496938
$f_6(x)$	2	3	6,489013200822.E-155	1,610879884539.E-154	6,999015789199

Selanjutnya, banyaknya iterasi yang diperlukan pada metode baru akan dibandingkan dengan beberapa metode iterasi lainnya sebagaimana yang telah disebutkan sebelumnya. Hasil perbandingan jumlah iterasi diberikan pada Tabel 3 berikut:

Tabel 3. Perbandingan Jumlah Iterasi

$f(x)$	x_0	Jumlah Iterasi					
		NM	PPM	KMPNS	DNM	MON	KMPVN
$f_1(x)$	1,6	10	6	11	5	3	3
$f_2(x)$	-0,5	10	11	6	5	4	3
$f_3(x)$	1,8	9	6	5	4	3	3
$f_4(x)$	1,5	9	6	4	4	3	3
$f_5(x)$	1,7	9	6	5	4	3	3
$f_6(x)$	2	10	6	6	4	4	3

Berdasarkan Tabel 3 dapat dilihat bahwa metode iterasi dengan orde konvergensi yang lebih tinggi memiliki jumlah iterasi yang lebih sedikit dibanding dengan metode dengan orde konvergensi yang lebih rendah. Oleh karena itu, metode dengan orde konvergensi yang lebih tinggi akan lebih baik untuk menghampiri akar dari suatu persamaan nonlinear.

Selain membandingkan jumlah iterasi, perbandingan juga dilakukan terhadap COC yang hasilnya ditunjukkan pada Tabel 4 berikut.

Tabel 4. Perbandingan Nilai COC

$f(x)$	x_0	COC					
		NM	PPM	KMPNS	DNM	MON	KMPVN
$f_1(x)$	1,6	1,999999	2,999999	3,999999	4,999999	5,999996	6,999992
$f_2(x)$	–0,5	1,999999	2,999999	3,999999	5,000000	5,999999	6,999992
$f_3(x)$	1,8	1,999999	3,000000	3,999999	5,000000	5,999999	6,999982
$f_4(x)$	1,5	1,999999	2,999999	3,999999	4,999999	5,999999	6,999999
$f_5(x)$	1,7	1,999999	2,999999	3,999999	4,999999	5,999998	6,999999
$f_6(x)$	2	1,999999	3,000000	3,999999	4,999999	5,999999	6,999015

Berdasarkan Tabel 4 terlihat perbandingan nilai orde konvergensi secara komputasi (COC) dari metode baru adalah tujuh, yang mana hal ini menegaskan bahwa orde konvergensi dari metode iterasi baru lebih tinggi dibandingkan dengan orde konvergensi metode iterasi lainnya.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada Bab IV dapat diambil kesimpulan bahwa komposit metode Potra-Ptak dan varian metode Newton memiliki orde tujuh setelah dimodifikasi dengan menggunakan interpolasi Lagrange orde dua, maka diperoleh persamaan baru seperti pada persamaan (4.13), yaitu:

Hasil dari komposit metode Potra-Ptak dan varian Newton menghasilkan orde konvergensi tujuh dan empat evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f(y_n)$ dan $f(z_n)$ sehingga menghasilkan indeks effisiensi $7^{1/4} \approx 1{,}6265$.

Berdasarkan Tabel 3 dan Tabel 4 menujukkan bahwa metode dengan orde konvergensi yang lebih tinggi akan menghasilkan jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingan dengan metode yang memiliki orde konvergensi lebih rendah. Hal ini menunjukkan bahwa metode dengan orde konvergensi yang tinggi akan lebih efektif dalam menghampiri akar-akar dari suatu persamaan nonlinear.

Referensi

[1] C.Chapra, Steven. "*Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists*". Mc Graw Hill, Singapore. 2005.

[2] Chun, C."A simply Constructed Third-Order Modifications of Newton's Method",*Journal of Computational and Applied Mathematics*. Vol.219, hal.81-89,2008.

[3] Chun, C. "Iterative Methods Improving Newton's Method by The Decomposition Method",*Computers & Mathematics with Application*. Vol.50, hal.1559-1568,2005.

[4] Dukkipati, R. V.,"*Numerical Methods*". New Age International Publishers, New Delhi. 2010.

[5] Ezzati, R. "On The Construction of New Iterative Methods with Fourth-Order Convergence by Combining Previous Methods",*International Mathematical Forum*. Vol.06, hal.1319-1326,2011.

[6] Hasanov, V. I., Ivanov, I. G., dan Nedjibov, G., A new modification of Newton's method, *Applied Mathematics and Engineering*, 27, 278 -286, 2002.

[7] Jisheng, K., dkk., Third-order modification of Newton's method, *Journal of Computation and Applied Mathematics,* 205, 1 – 5, 2007.

[8] Jisheng, Kou.,dkk. "A Composite Fourth-Order Iterative Method for Solving Nonlinear Equation",*Applied Mathematics and Computation*. Vol.10, hal.96-100,2006.

[9] Kalyanasundaram, J. J., Modified Newton's method using harmonic mean for solving nonlinear equations, *IOSR Journal of Mathematics*, 7(4), 93- 97, 2013.

[10] Khattri, S.K. "Quadrature Based Optimal Iterative Methods with Applications in High-Precision Computing",*Meth Apple*. Vol.05, hal.592-601,2012.

[11] Nedzhibov, G., On a few iterative methods for solving nonlinear equations. *Application of Mathematics in Engineering and Economics XXVIII*, in: Proceeding of the XXVIII Summer school Sozopol' 02, pp.1-8, Heron press, Sofia, 2002.

[12] Ozban, A.Y., Some New Variants of Newton's Method, *Applied Mathematics Letter*, Vol. 17, hal. 677-682, 2004.

[13] Sharma, J. R., A Composite Third Order Newton-Steffensen Method for Solving Nonlinear Equations, *Applied Mathematics and Computation,* Vol. 169, No. 1, hal .242-246, 2005.
[14] Wang, X dan L. Liping. “Modified Ostrowski’s Method with Eight-Order Convergence and High Efficiency Index”,*Applied Mathematics Letters*. Vol.23, hal.549-554,2010.
[15] Weerakoon, S. dan Fernando, T. G. I., “A Variant of Newton’s Method with Accelerated Third-Order Convergence”,*Applied Mathematics Letters*. Vol.13, hal.87-93,2000.
[16] Zhao, Lingling.,dkk. “New Families of Eight-Order Methods with High Efficiency Index for Solving Nonlinear Equations”,*Department of Applied Mathematics*. Vol.11, hal.2224-2880,2012.