Aplikasi Teori Kendali Pada Permainan Dinamis Non-Kooperatif Waktu tak Berhingga

Nilwan Andiraja
UIN Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru
Jl. H.R Soebrantas No 155 Km. 18 telp : 0761-8359937
e-mail: nilwanandiraja336@gmail.com

Abstrak

Pada tulisan ini dibahas mengenai aplikasi teori kendali untuk membentuk vektor kendali pada permainan dinamis linier kuadratik non-kooperatif dua pemain dengan strategi Nash untuk waktu tak berhingga. Pembahasan diawali dari persamaan umum kendali optimal waktu kontinu, kemudian dilanjutkan ke persamaan umum untuk permainan dinamis non-kooperatif N pemain untuk waktu berhingga dengan beberapa asumsi. Kemudian, dengan asumsi yang sama dibentuk persamaan umum untuk permainan dinamis non-kooperatif dua pemain untuk waktu tak berhingga, yang terdiri dari persamaan diferensial sistem dinamik dan fungsi objektif yang sesuai. Kemudian dengan menggunakan teori kendali dibentuk persamaan aljabar Riccatii yang sesuai dengan persamaan diferensial dan fungsi objektif untuk masing-masing pemain. Berdasarkan persamaan aljabar Riccati yang dibentuk, diperoleh solusi yang digunakan untuk membentuk vektor kendali yang sesuai untuk masing-masing pemain. Akhirnya disimpulkan bahwa terdapat eksistensi vektor kendali pada permainan dinamis linier kuadratik non-kooperatif dua pemain dengan strategi Nash untuk waktu tak berhingga.

Kata kunci: *Permainan dinamis non-kooperatif, aljabar Riccati, vektor kendali*

Abstract

In this paper discuss about application the control theory to form control vector in linier quadratic non-cooperative dynamic game two-player with Nash strategy for infinite time. Discuss was started from general equation for optimal control of continuous time, then discuss to continue to general equation for non-cooperative dynamic game N player for finite time with several assumption. Then, with the same assumption to made general equation for non-cooperative dynamic game two-player for infinite time, which consisting of differential equation dynamical system and objective function suitably. Moreover, with used control theory to form algebraic Riccati equation suitably with differential equation and objective function for each player. Based on algebraic Riccati equation was formed, gotten solution which used to form control vector suitably for each player. Finally gets to be concluded there are exists control vector in linear quadratic non-cooperative dynamic game two-player with Nash strategy for infinite time.

Keywords*: non-cooperative dynamic game, algebraic Riccati, control vector*

1. Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari banyak persoalan yang dapat dihubungkan dengan matematika, bukan hanya persoalan yang rumit tapi juga persoalan yang menarik seperti permainan. Permainan dapat dibawa ke ranah matematika yang dikenal dengan teori permainan. Banyak orang telah mengetahui bahwa teori permainan merupakan bagian dari persoalan program linier atau riset operasi. Hal ini dikarenakan, didalam program linier atau riset operasi, persoalan permainan diasumsikan mencari keputusan yang mengoptimalkan fungsi tujuan dengan data-data awal disajikan dalam bentuk tabel dan tanpa memiliki pilihan strategi yang optimal.

Asumsi yang sama namun pendekatan penyelesaian yang lebih berbeda diberikan oleh teori kendali dalam persoalan teori permainan. Berdasarkan teori kendali, persoalan permainan dipandang sebagai persoalan sebuah model sistem dinamis disertai fungsi tujuan. Sehingga, didalam model sistem dinamis permainan tersebut, terdapat variabel state dan kendali. Sedangkan data-data awal disajikan dalam bentuk matriks, sehingga dapat digunakan teori-teori matriks seperti pada aljabar linier. Selanjutnya, untuk mencari keputusan yang akan mengoptimalkan fungsi tujuan, diperoleh dengan mencari kendali sebagai solusi yang sesuai dengan strategi yang diinginkan. Salah satu strategi yang menarik yaitu strategi Nash untuk waktu tak hingga. Masalah solusi strategi Nash, telah dijelaskan oleh beberapa ahli diantaranya diberikan oleh Tamer Basar (1999) dan Jacob Engwerda (2000) yang telah menjelaskan tentang eksistensi solusi strategi Nash untuk persoalan permainan dinamis non-kooperatif dengan waktu tak hingga kasus non skalar. Hal yang sama juga diberikan oleh Weeren (1999) yang menjelaskan mengenai eksistensi solusi strategi Nash untuk persoalan permainan dinamis non-kooperatif dengan waktu tak hingga kasus non skalar dan skalar.

Oleh karena itu, penelitian ini akan membahas mengenai teori permainan dipandang dari teori kendali. Termasuk mencari eksistensi keputusan sebagai solusi yang akan mengoptimalkan fungsi tujuan, yang sesuai dengan solusi strategi Nash, yang akan memberikan alternatif untuk menyelesaikan persoalan teori permainan disamping menggunakan pendekatan program linier serta akan memberi kemudahan menentukan keputusan bagi permainan dinamis non-kooperatif untuk berbagai kondisi sistem dinamik dan fungsi tujuan dua pemain waktu kontinu.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan studi literatur dan langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Membentukan model sistem dinamis kasus permainan non-kooperatif dua pemain beserta fungsi tujuan untuk waktu tak hingga berdasarkan masalah kendali optimal.
2. Membentuk persamaan aljabar Riccati yang bersesuaian berdasarkan persamaan diferensial Riccati,
$$-\dot{S} \quad SA - SBR^{-1}B^{T}S + Q \,,\; t \le T_f$$
3. Mencari eksistensi keputusan strategi Nash yang akan mengoptimalkan fungsi tujuan permainan dinamis.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Masalah Umum Kendali Optimal Waktu Kontinu.

Persamaan diferensial untuk permasalahan umum kendali optimal waktu kontinu untuk sistem dinamis diberikan sebagai berikut

$$\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \,, \qquad (3.1.1)$$

dengan $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ adalah vektor state internal dan $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^n$ adalah vektor kendali input. Fungsi tujuan yang akan dicapai yaitu meminimalkan fungsi objektif, dengan persamaan

$$J(t_0) = \phi(\mathbf{x}(T_f), T_f) + \int_{t_0}^{T_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\,dt \,, \qquad (3.1.2)$$

dengan t_0 adalah waktu awal dan T_f adalah waktu akhir.

3.2. Kendali Optimal Lingkar Tertutup Linier Kuadratik.

Pada persoalan sistem dinamik lingkar tertutup, diasumsikan terdapat sebuah persamaan diferensial sistem dinamik, dengan tujuan meminimalkan fungsi objektif berbentuk kuadratik. Selanjutnya akan dicari vektor kendali yang akan meminimalkan fungsi tujuan berdasarkan input yang diberikan kepada persamaan diferensial sistem dinamiknya.

Adapun bentuk model matematika persoalan masalah kendali optimal lingkar tertutup linier kuadratik, dapat didefinisikan pada persamaan diferensial sistem dinamik berikut

$$t) + B\mathbf{u}(t) \,, \qquad (3.2.1)$$

dengan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ dan kendali input $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$,dan meminimalkan fungsi objektif yaitu

$$J(t_0) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(T_f)S(T_f)\mathbf{x}(T_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T_f} (\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{u}^T R\mathbf{u})\,dt \,, \qquad (3.2.2)$$

dengan t_0 waktu awal dan T_f waktu akhir, matriks R, matriks Q dan matriks $S(T_f)$, ketiganya merupakan matriks simetri yang mempengaruhi fungsi objektif.

Diasumsikan Q dan $S(T_f)$ semi definit positif $(Q \ge 0,\, S(T_f) \ge 0)$, selanjutnya Q dan $S(T_f)$ memiliki nilai eigen nonnegatif sehingga $\mathbf{x}^T Q\mathbf{x}$ dan $\mathbf{x}^T(T_f)S(T_f)\mathbf{x}(T_f)$ bernilai nonnegatif untuk setiap $\mathbf{x}(t)$. Diasumsikan juga R adalah definit positif dengan $R > 0$ sehingga R memiliki nilai eigen positif sehingga $\mathbf{u}^T R\mathbf{u} > 0$ untuk setiap $\mathbf{u}(t) \ne 0$. Selanjutnya diberikan persamaan-persamaan berikut :

Persamaan Hamilton : $H(t) = \dfrac{1}{2}(\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{u}^T R\mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T(A\mathbf{x} + B\mathbf{u})$. (3.2.3)

Persamaan state yaitu $\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \quad A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$. (3.2.4)

Persamaan kostate yaitu $-\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = Q\mathbf{x} + A^T\boldsymbol{\lambda}$. (3.2.5)

Persamaan kondisi stasionary yaitu $0 = \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = R\mathbf{u} + B^T\boldsymbol{\lambda}$. (3.2.6)

Berdasarkan persamaan (3.2.6) diperoleh $\mathbf{u}(t) = -R^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}(t)$. (3.2.7)

Selanjutnya persamaan (3.2.7) disubstitusikan ke persamaan (3.2.4), maka diperoleh

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} - BR^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}. \quad (3.2.8)$$

Dengan mengambil persamaan (3.2.8) dan persamaan (3.2.5) maka dapat dibuat sistem homogen Hamilton yaitu

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}, \quad (3.2.9)$$

dengan matriks koefisien disebut matriks Hamiltonian. Diketahui t_0 dan $\mathbf{x}(t_0)$, waktu akhir T_f diketahui, state akhir $\mathbf{x}(T_f)$ bergantung kepada T_f sehingga $d\mathbf{x}(T_f)$ tidak nol, maka kondisi akhir yaitu

$$\boldsymbol{\lambda}(T_f) = S(T_f)\mathbf{x}(T_f), \quad (3.2.10)$$

Maka untuk mencari kendali optimal, maka akan diselesaikan masalah dua titik batas.

Diasumsikan $\mathbf{x}(t)$ dan $\boldsymbol{\lambda}(t)$ memenuhi persamaan (3.2.10) untuk setiap interval $[t_0, T_f]$ sehingga

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = S(t)\mathbf{x}(t), \quad (3.2.11)$$

dengan $S(T_f)$ adalah matriks $n \times n$. Selanjutnya diferensialkan persamaan (3.2.11) didapat $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{S}\mathbf{x} + S\dot{\mathbf{x}}$. Kemudian dari persamaan (3.2.8) diperoleh

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{S}\mathbf{x} + S(A\mathbf{x} - BR^{-1}B^TS\mathbf{x}). \quad (3.2.12)$$

Berdasarkan persamaan (3.2.5) didapat $-\dot{\boldsymbol{\lambda}} = Q\mathbf{x} + A^T\boldsymbol{\lambda} \Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Q\mathbf{x} - A^T\boldsymbol{\lambda}$, selanjutnya, disubstitusikan persamaan (3.2.12) ke $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Q\mathbf{x} - A^T\boldsymbol{\lambda}$, diperoleh

$$-Q\mathbf{x} - A^T\boldsymbol{\lambda} = \dot{S}\mathbf{x} + S(A\mathbf{x} - BR^{-1}B^TS\mathbf{x})$$

$$-\dot{S}\mathbf{x} = SA\mathbf{x} - SBR^{-1}B^TS\mathbf{x} + Q\mathbf{x} + A^TS\mathbf{x}$$

$$-\dot{S}\mathbf{x} = (A^TS + SA - SBR^{-1}B^TS + Q)\mathbf{x}, \quad (3.2.13)$$

karena persamaan (3.2.13) memenuhi untuk setiap waktu t ,maka diperoleh

$$-\dot{S} = A^TS + SA - SBR^{-1}B^TS + Q,\ t \le T_f, \quad (3.2.14)$$

persamaan (3.2.14) disebut persamaan diferensial Riccati. Jika $S(t)$ adalah solusi dengan kondisi akhir $S(T_f)$, maka persamaan (3.2.12) berlaku untuk setiap $t \le T_f$, maka asumsi benar.

Karena solusi persamaan diferensial Riccati adalah $S(t)$ dan $\lambda = S\mathbf{x}$, maka vektor kendali optimal yang diberikan dari persamaan (3.2.7) yaitu $\mathbf{u}(t) = -R^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}(t)$ menjadi

$$\mathbf{u}(t) = -R^{-1}B^TS(t)\mathbf{x}(t), \quad (3.2.15)$$

selanjutnya disimbolkan $K(t) = R^{-1}B^TS(t)$, (3.2.16)

sehingga vektor kendali optimal menjadi

$$\mathbf{u}(t) = -K(t)\mathbf{x}(t). \quad (3.2.17)$$

3.3. Permainan Dinamis Non-Kooperatif dua Pemain.

Masalah umum permainan dinamis non-kooperatif didefinisikan dalam bentuk persamaan diferensial sistem dinamik permainan untuk N pemain

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^{N} B_i\mathbf{u}_i(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.3.1)$$

ISSN : 2085-9902

dengan matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$ dan $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$. Setiap pemain memiliki sebuah fungsi objektif yang akan diminimalkan

$$J_i(\mathbf{u}_1,\cdots \quad \mathbf{x}^T(T_f)K_i(T_f)\mathbf{x}(T_f) + \int_0^{T_f} \{\mathbf{x}^T(t)Q_i\mathbf{x}(t) + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{u}_j^T(t)R_{ij}\mathbf{u}_j(t)\}dt \qquad (3.3.2)$$

dengan $i = 1, 2, \cdots$ serta semua matriks pada fungsi tujuan J_i diasumsikan merupakan matriks simetri, R_{ij} dan Q_i keduanya merupakan matriks definit positif untuk $i = 1, 2, \cdots$, serta didefinisikan

$$S_i = B_i R_{ii}^{-1} B_i^T \text{ dan } S_{ij} = B_i R_{ii}^{-1} R_{ji} R_{ii}^{-1} B_i^T \text{ untuk } i \neq j$$

Selanjutnya akan dibentuk persamaan diferensial sistem dinamik permainan non-kooperatif untuk dua pemain waktu tak berhingga

$$\dot{} \quad t) + B_1\mathbf{u}_1(t) + B_2\mathbf{u}_2(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \qquad (3.3.3)$$

Pada bagian waktu tak berhingga, fungsi objektif memenuhi kriteria $J_i(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = \lim_{T_f\to\infty} J_i(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$, sehingga para pemain meminimalkan fungsi objektif

$$J_i(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) = \mathbf{x}^T(T_f)K_i(T_f)\mathbf{x}(T_f) + \int_0^{\infty} \{\mathbf{x}^T(t)Q_i\mathbf{x}(t) + \sum_{j=1}^{2} \mathbf{u}_j^T(t)R_{ij}\mathbf{u}_j(t)\}dt \qquad (3.3.4)$$

untuk $i \neq j, \; i = 1, 2.$

Fungsi tujuan permainan dua pemain waktu tak berhingga memenuhi asumsi dan matriks R_{ij} serta matriks Q_i keduanya definit positif. Selanjutnya akan dibentuk vektor kendali $\mathbf{u}_i = F_i\mathbf{x}$ dengan $F_i^*(t) = -R_{ii}^{-1}B_i^T K_i$, $F_i \in \mathbb{R}^{m_i\times n}$ *i=1,2*, dan $F_i \in \mathbb{R}^{m_i\times n}$ merupakan ekuilibrium linier umpan balik Nash. (F_1, F_2) adalah anggota $\mathcal{F} = \{F = (F_1, F_2) \mid A + B_1F_1 + B_2F_2 \; stabil\}$, yang memenuhi definisi berikut.

Defenisi 3.3.1 *Ekuilibrium linier* $\left(F_1^*, F_2^*\right) \in \mathcal{F}$ *disebut ekuilibrium linier umpan balik Nash jika memenuhi pertidaksamaan* $J_1(\mathbf{x}_0, F_1^*, F_2^*) \le J_1(\mathbf{x}_0, F_1, F_2^*)$ *dan* $J_2(\mathbf{x}_0, F_1^*, F_2^*) \le J_2(\mathbf{x}_0, F_1^*, F_2)$ *untuk setiap* $\mathbf{x}_0$ *dan untuk setiap matriks state umpan balik* $F_i, \; i = 1, 2$ *sedemikian sehingga* $(F_1, F_2^*) \; dan \; (F_1^*, F_2) \in \mathcal{F}$.

3.4. Eksistensi solusi Permainan Dinamis Non-Kooperatif dua Pemain.

Dipandang kembali sistem persamaan diferensial sistem dinamik permainan non-kooperatif untuk dua pemain waktu tak berhingga, berturut-turut persamaan (3.3.3) dan (3.3.4). Akan ditunjukkan ada $\left(K_1(t), K_2(t)\right)$ yang memenuhi $F_i^*(t) = -R_{ii}^{-1}B_i^T K_i$ dengan asumsi $(F_1^*, F_2^*) \in \mathcal{F}$ adalah ekuilibrium umpan balik Nash, yang memenuhi

$$J_1(\mathbf{x}_0, F_1^*, F_2^*) \le J_1(\mathbf{x}_0, F_1, F_2^*) \text{ dan } J_2(\mathbf{x}_0, F_1^*, F_2^*) \le J_2(\mathbf{x}_0, F_1^*, F_2).$$

Sehingga dapat dibentuk $\mathbf{u}_i = F_i\mathbf{x}$.

Pada kasus pemain pertama, diketahui F_2^* dengan $\mathbf{u}_2^*(t) = F_2^*\mathbf{x}(t)$, maka sistem dinamik pemain pertama menjadi $\dot{} \quad {}_1\mathbf{u}_1 + B_2F_2^*\mathbf{x}$ dengan fungsi objektif

$$J_1 = \mathbf{x}^T(T_f)K_1(T_f)\mathbf{x}(T_f)\int_0^{\infty} \{\mathbf{x}^T(Q_1 + F_2^{*^T}R_{12}F_2^*)\mathbf{x} + \mathbf{u}_1^T R_{11}\mathbf{u}_1\}dt,$$

berdasarkan sistem dinamik dan fungsi objektif pemain pertama, dapat dibentuk persamaan aljabar Riccati

$$0 = -(A + B_2F_2^*)^T K_1 - K_1(A + B_2F_2^*) + K_1S_1K_1 - (Q_1 + F_2^{*^T}R_{12}F_2^*), \qquad (3.4.1)$$

dengan mensubstitusikan $F_2^* = -R_{22}^{-1}B_2^T K_2$ kepersamaan (3.4.1), maka diperoleh

$$-(A - S_2K_2)^T K_1 - K_1(A - S_2K_2) + K_1S_1K_1 - Q_1 - K_2S_{21}K_2 = 0. \qquad (3.4.2)$$

Persamaan (3.4.2) akan memiliki solusi K_1. Sehingga dapat dibentuk $F_1^* = -R_{11}^{-1}B_1^T K_1$, maka pemain pertama dapat membentuk fungsi kendali $\mathbf{u}_1 = F_1^*\mathbf{x}$.

Secara sama untuk pemain kedua, maka sistem dinamik pemain pertama menjadi

${}_1F_1^*\mathbf{x} + B_2\mathbf{u}_2$ dengan fungsi objektif

$$J_2 = \mathbf{x}^T(T_f)K_2(T_f)\mathbf{x}(T_f)\int_0^\infty \{\mathbf{x}^T(Q_2 + F_1^{*T}R_{21}F_1^*)\mathbf{x} + \mathbf{u}_2^T R_{22}\mathbf{u}_2\}dt$$

Maka dapat dibentuk persamaan aljabar Riccati

$$0 = -(A + B_1F_1^*)^T K_2 - K_2(A + B_1F_1^*) + K_2S_2K_2 - (Q_2 + F_1^{*T}R_{21}F_1^*) \qquad (3.4.3)$$

Dengan mensubstitusikan $F_1^* = -R_{11}^{-1}B_1^T K_1$ kepersamaan (3.4.3), maka diperoleh

$$-(A - S_1K_1)^T K_2 - K_2(A - S_1K_1) + K_2S_2K_2 - Q_2 - K_1S_{12}K_1 = 0 \qquad (3.4.4)$$

Maka dapat diperoleh K_2 sebagai solusi dari persamaan (3.4.4) sehingga $F_2^* = -R_{22}^{-1}B_2^T K_2$ maka pemain pertama dapat membentuk fungsi kendali $\mathbf{u}_2 = F_2^*\mathbf{x}$.

Berdasarkan persamaan (3.4.2) dan (3.4.4) diperoleh $\mathbf{u}_1 = F_1^*\mathbf{x}$ dan $\mathbf{u}_2 = F_2^*\mathbf{x}$, kemudian disubsitusikan ke persamaan diferensial sistem dinamik, maka diperoleh

$${}_1\mathbf{u}_1 + B_2\mathbf{u}_2 = A\mathbf{x} + B_1F_1^*\mathbf{x} + B_2F_2^*\mathbf{x} = \left(A + B_1F_1^* + B_2F_2^*\right)\mathbf{x}.$$

Selanjutnya karena $\left(F_1^*, F_2^*\right)$ ekuilibrium Nash yang memenuhi

$$J_1(\mathbf{x}_0, F_1^*, F_2^*) \le J_1(\mathbf{x}_0, F_1, F_2^*) \text{ dan } J_2(\mathbf{x}_0, F_1^*, F_2^*) \le J_2(\mathbf{x}_0, F_1^*, F_2)$$

maka diasumsikan $F_1^* = F_1$ dan $F_2^* = F_2$ sehingga diperoleh ${}_1F_1 + B_2F_2\big)\mathbf{x}$ dengan nilai eigen real bernilai negatif untuk $A + B_1F_1 + B_2F_2$, maka $A + B_1F_1 + B_2F_2$ stabil.

Sehingga solusi $\mathbf{u}_1 = F_1^*\mathbf{x}$ dan $\mathbf{u}_2 = F_2^*\mathbf{x}$, dapat menstabilkan persamaan diferensial sistem dinamik permainan non-kooperatif.

4. Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada hasil dan pembahasan yang telah diberikan, maka diperoleh kesimpulan bahwa berdasarkan permainan dinamis non-kooperatif untuk *N* pemain, dapat dibentuk persamaan diferensial sistem dinamik permainan non-kooperatif untuk dua pemain waktu tak berhingga yaitu

$$t) + B_1\mathbf{u}_1(t) + B_2\mathbf{u}_2(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

dengan para pemain meminimalkan fungsi objektif

$$J_i(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbf{x}^T(T_f)K_i(T_f)\mathbf{x}(T_f) + \int_0^\infty \{\mathbf{x}^T(t)Q_i\mathbf{x}(t) + \sum_{j=1}^{2}\mathbf{u}_j^T(t)R_{ij}\mathbf{u}_j(t)\}dt.$$

Selanjutnya berdasarkan persoalan kendali optimal waktu kontinu, maka masing-masing pemain pada permasalahan permainan dinamis non-kooperatif dua pemain dapat dibentuk persamaan aljabar Riccati, yang digunakan untuk membentuk vektor kendali $\mathbf{u}_i = F_i^*\mathbf{x}$ dengan $F_i^*(t) = -R_{ii}^{-1}B_i^T K_i$ untuk $i = 1, 2$ yang merupakan ekuilibrium umpan balik Nash untuk masing-masing pemain.

Untuk penelitian selanjutnya, dapat dilakukan penelitian dua pemain untuk kasus waktu tak berhingga dengan asumsi matriks-matriks menjadi skalar atau dengan meneliti untuk kasus *N* pemain dengan asumsi yang sama dengan kasus dua pemain untuk kasus waktu tak berhingga.

ISSN : 2085-9902

Daftar Pustaka

Jurnal :

[1] Engwerda J. Feedback Nash equilibria in the scalar infinite horizon LQ-game. *Automatica*. 2000; 36 : 135-139.
[2] Weeren AJTM, Schumacher JM, Engwerda J. Asymptotic analysis of linear feedback Nash equilibria in nonzero-sum linear-quadratic differential games. *Journal of Optimization Theory and Applications*.1999: 101: p693–723.

Buku :

[1] Basar T. Dynamic noncooperative game theory. Philadelphia: SIAM. 1999.
[2] Bellman R. Introduction to Matrix Analysis. Philadelphia: SIAM. 1997
[3] Engwerda J. LQ Dynamic Optimization and Differential Games. Chichester: John Wiley & Sons. 2005.
[4] Lewis FL. Applied Optimal Control and Estimation. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1992.
[5] Olsder GJ. Mathematical System Theory. Delft: University of Technology. 1994.
[6] Perko L. Differential Equations and Dynamical System. New York: Springer-Verlag. 1991.