ISSN : 2085-9902

Kestabilan Titik Ekuilibrium Model SIS dengan Pertumbuhan Logistik dan Migrasi

Mohammad soleh[1], Parubahan Siregar[2]
[1,2]Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru
[1)] Email: *msoleh1975@yahoo.co.id*
[2)] Email: *siregarperu@yahoo.com*

ABSTRAK

Pada makalah ini dibahas model SIS dengan penambahan asumsi pertumbuhan logistik dan migrasi dalam populasi. Model ini merupakan pengembangan dari model SIS dengan pertumbuhan ekponensial tanpa migrasi. Setelah model terbentuk, keberadaan titik ekuilibrium bebas penyakit, endemik dan kestabilan masing-masing titik ekuilibrium diekplorasi untuk menentukan sifat-sifat dinamik model. Titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik dicari dengan menyelesaikan sistem persamaan differensial dari model. Sedangkan kestabilan masing-masing titik ekuilibrium ditentukan dengan kriteria nilai eigen. Hasil yang diperoleh dari model ini adalah : jika $\rho_2 < \rho_1 + a \; dan \; \beta + \rho_1 < \rho_2 + \gamma$, maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal. Sebaliknya jika $2bN + \beta > a + \gamma$ dan $\rho_1 + \rho_2 > a - 2bN$, maka titik kesetimbangan endemik penyakit stabil asimtotik lokal.

Kata Kunci : *model logistik, model SIS, stabil asimtotik, titik kesetimbangan.*

ABSTRACT

This paper is discussed about SIS model with addition of assumption growth of migration and logistics in population. Our model represent development of SIS model with growth of exponential without migration. After model formed, existences of free disease state, endemic state and stability of each of ekuilibrium is explored to determine the nature of model dynamic. The free disease and endemic state are searched by finishing differential equation system of model. The stability of each ekuilibrium are determined with eigen criterion. We obtained that : if $\rho_2 < \rho_1 + a \; and \; \beta + \rho_1 < \rho_2 + \gamma$, hence free disease state is local asimtotik stable. On the contrary if $2bN + \beta > a + \gamma$ dan $\rho_1 + \rho_2 > a - 2bN$, hence endemic state is local asimtotik stable.

Key word *: logistic model, SIS model, asymptotic stable, equilibrium point.*

1. Pendahuluan

Penyebaran berbagai jenis penyakit menular telah menjadi perhatian yang begitu luas dari masyarakat karena banyak mengakibatkan kematian dan kerugian. Hal ini akan semakin berdampak buruk jika tidak segera di atasi dengan baik. Salah satu cara untuk mengatasi masalah penyebaran penyakit menular ini dapat menggunakan penerapan ilmu matematika berupa pemodelan matematika.

Model penyebaran penyakit pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick [2] pada tahun 1927 berbetuk model SIR. Model ini membagi populasi menjadi tiga kelas yaitu kelas *susceptible (sehat*) merupakan kelas dengan individu-individu sehat, kelas *infectives merupakan* kelas dengan individu yang terinfeksi penyakit dan mampu menularkan ke kelas sehat, dan kelas *recovered merupakan* kelas dengan individu telah sembuh dari sakit dan mempunyai kekebalan tubuh terhadap penyakit tertentu. Model SIR dapat berubah jika terjadi perubahan pada asumsi-asumsi, yaitu di antaranya menjadi model SEIR (*suspectible, exposed, infectives, recovered*), model SIAR (*suspectible, infectives, aids, recovered)*, SIS (*suspectible, infectives, suspectible*), dan IA (*infectives, aids*), dll.

Model SIS adalah model yang mengasumsikan individu yang telah sembuh tidak mengalami kekebalan atau masih dapat tertular penyakit kembali. Dengan kata lain, individu yang telah sembuh masuk ke kelas *susceptible*. Contoh penyakit yang dapat diterapkan dengan model SIS ini di antaranya yaitu influenza, tuberculosis, malaria, dan beberapa penyakit menular seksual. Beberapa penelitian tentang model penyebaran penyakit yang menggunakan model SIS atau modifikasinya diantaranya adalah jurnal matematika yang berjudul *analisis kestabilan titik tetap pada model SIS dengan penambahan populasi rentan, konstan dan penambahan populasi dan kematian, sesuai persamaan logistik* [3], Tugas Akhir Matematika yang berjudul *Model SIS (Suspectible, Infectives, Suspectible) dengan pertumbuhan alami dan proses migrasi* [10].

ISSN : 2085-9902

2. Metodologi Penelitian

Adapun metodologi atau langkah-langkah dalam pembuatan makalah ini adalah sebagai berikut:

a. Membuat asumsi-asumsi yang sesuai untuk model SIS [1]
b. Mendefenisikan paremeter-parameter yang digunakan [5,10]. Adapun parameter-parameter ataupun koefisien-koefisien yang digunakan dalam model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi ini diantaranya adalah a (laju kelahiran), b (laju kematian), β (laju penularan penyakit), ρ_1 (laju imigrasi), ρ_2(laju emigrasi) dan γ (laju kesembuhan).
c. Menentukan titik kesetimbangan [7]
d. Menganalisa kestabilan dari titik kesetimbangan yang telah ditentukan [8]
e. Menyimpulkan hasil dari analisa kestabilan titik ekuilibrium [6]

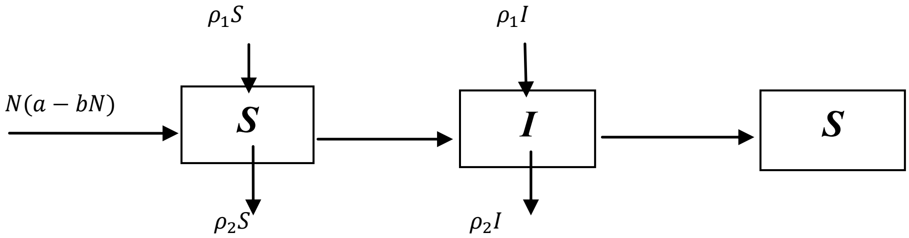
3. Pembahasan dan Hasil

3.1 Pembentukan Model

Model SIS dengan pertumbuhan Logistik dan Migrasi adalah suatu model SIS yang dimodifikasi dengan menambahkan asumsi pertumbuhan logistik dan adanya proses migrasi. Secara umum asumsi-asumsi yang digunakan dalam penyusunan model ini diantaranya sebagai berikut :

a. Adanya pertumbuhan logistik [5]
b. Dalam populasi terjadi proses migrasi, dengan laju imigrasi besarnya konstan $\rho_1 > 0$, dan laju emigrasi besarnya konstan $\rho_2 > 0$.
c. Laju penularan penyakit dari *suspectible* menjadi *infectives* adalah konstan dan dinyatakan dengan $\beta > 0$.
d. Laju kesembuhan penyakit dari *infectives* menjadi *suspectible* kembali adalah konstan dan dinyatakan dengan $\gamma > 0$.
e. Populasi tidak tertutup dan tidak konstan.

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas dapat digambarkan perpindahan individu-individu antar kelas menggunakan diagram alir model SIS berikut ini :



Selanjutnya berdasarkan diagram alir di atas dapat dituliskan sistem persamaan differensial model SIS:

$$\frac{dS}{dt} = N(a-bN) + \rho_1 S - \beta\frac{S}{N}I - \rho_2 S + \gamma I,$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta\frac{S}{N}I + \rho_1 I - \rho_2 I - \gamma I, \qquad (3.1)$$

dengan $S + I = N$ merupakan jumlah populasi keseluruhan.

Karena $N = S + I$ maka $\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt}$, sehingga $\frac{dN}{dt} = N(a-bN) + \rho_1 S - \beta\frac{S}{N}I - \rho_2 S + \gamma I + \beta\frac{S}{N}I + \rho_1 I - \rho_2 I - \gamma I = (a - bN + \rho_1 - \rho_2)N$.

Jumlah populasi *N* dalam model ini dicari dengan integrasi $\frac{dN}{dt}$:

$$\frac{dN}{dt} = (a - bN + \rho_1 - \rho_2)N \ .$$

Dengan bantuan integrasi benuk rasional maka diperoleh:

$$\frac{1}{(a+\rho_1-\rho_2)}\ln|N| - \frac{1}{(a+\rho_1-\rho_2)}\ln|a - bN + \rho_1 - \rho_2| = t + C$$
$$\leftrightarrow \frac{1}{(a+\rho_1-\rho_2)}(\ln|N| - \ln|a - bN + \rho_1 - \rho_2|) = t + C$$
$$\leftrightarrow \frac{N}{a-bN+\rho_1-\rho_2} = e^{(a+\rho_1-\rho_2)(t+C)}. \qquad (3.2)$$

Jika $N = N(0) = N_0$ dan $a + \rho_1 - \rho_2 = q$, maka persamaan di atas berubah menjadi :

$$N = \frac{qN_0e^{qt}}{q-bN_0+bN_0e^{qt}} \quad \text{atau} \quad N = \frac{q/b}{1+(\frac{q-bN_0}{bN_0})e^{-qt}} \ .$$

g

3.2 Titik Kesetimbangan (*Ekuilibrium*)

a. Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit merupakan suatu titik dimana tidak ada satupun individu yang terserang penyakit ($I = 0$). Untuk mendapatkan titik kesetimbangan Sistem (3.1), maka masing-masing persamaan pada Sistem (3.1) diberi nilai nol, sehingga Sistem (4.1) menjadi:

$$N(a-bN) + \rho_1 S - \beta\frac{S}{N}I - \rho_2 S + \gamma I = 0 \qquad (3.3)$$
$$\beta\frac{S}{N}I + \rho_1 I - \rho_2 I - \gamma I = 0 \qquad (3.4)$$

 ISSN : 2085-9902

Untuk mendapatkan S, substitusikan $I = 0$ pada persamaan (3.3) di atas. Karena pada persamaan (3.3) terdapat N dan diketahui bahwa $N = S + I$, maka diperoleh $N = S$, sehingga persamaan (3.3) berubah menjadi :

$$\mathrm{S}(a - bS) + \rho_1 S - \beta \frac{S}{N} I - \rho_2 S + \gamma I = 0.$$
$$\leftrightarrow S(a - bS) + \rho_1 S - \rho_2 S = 0$$
$$\leftrightarrow aS - bS^2 + \rho_1 S - \rho_2 S = 0$$
$$\leftrightarrow (a - bS + \rho_1 - \rho_2) S = 0.$$

Hasilnya adalah $S = 0$ atau $S = \frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}$. Karena $S = 0$ menyebabkan $N = 0$, solusi ini diabaikan. Solusi yang diambil adalah $S^* = \frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}$. Berdasarkan penyelesaian di atas, maka diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit $(I^*, S^*) = \left(0, \frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)$.

b. Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit

Titik kesetimbangan endemik penyakit artinya selalu ada penyakit dalam populasi atau $I > 0$. Dari persamaan (3.4) diperoleh :

$$\beta \frac{S}{N} I + \rho_1 I - \rho_2 I - \gamma I = 0$$
$$\leftrightarrow \left(\beta \frac{S}{N} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma\right) I = 0 \qquad I \neq 0$$
$$\leftrightarrow \left(\beta \frac{S}{N} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma\right) = 0$$
$$\leftrightarrow \beta \frac{S}{N} = -\rho_1 + \rho_2 + \gamma$$

Dengan demikian maka diperoleh titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{I}, \hat{S}) = \left(\frac{\beta+\rho_1-\rho_2-\gamma}{\beta} N, \frac{\rho_2-\rho_1+\gamma}{\beta} N\right)$.

3.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Setelah diperoleh titik kesetimbangan dari model, maka akan diselidiki kestabilan titik kesetimbangan pada model tersebut. Sifat kestabilan ini berguna untuk mengetahui kecenderungan apakah dalam populasi akan terbebas dari penyakit yang dibicarakan ataukah justru akan terjadi endemik penyakit. Metode yang digunakan untuk menguji kestabian titik ekuilibrium pada makalah ini adalah kriteria nilai eigen.

Misalkan :

$$f(I, S) = N(a - bN) + \rho_1 S - \beta \frac{S}{N} I - \rho_2 S + \gamma I$$
$$g(I, S) = \beta \frac{S}{N} I + \rho_1 I - \rho_2 I - \gamma I.$$

Turunan parsial masing-masing fungsi tersebut adalah:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial\left(N(a-bN)+\rho_1 S-\beta\frac{S}{N}I-\rho_2 S+\gamma I\right)}{\partial S} = \frac{\partial\left((S+I)(a-b(S+I))+\rho_1 S-\beta\frac{S}{N}I-\rho_2 S+\gamma I\right)}{\partial S}$$
$$= \frac{\partial\left(aS+aI-bS^2-2bSI-bI^2+\rho_1 S-\beta\frac{S}{N}I-\rho_2 S+\gamma I\right)}{\partial S}$$
$$= a - 2bS - 2bI + \rho_1 - \beta \frac{I}{N} - \rho_2$$
$$\frac{\partial f}{\partial I} = \frac{\partial(aS+aI-bS^2-2bSI-bI^2+\rho_1 S-\beta\frac{S}{N}I-\rho_2 S+\gamma I)}{\partial I}$$
$$= a - 2bS - 2bI - \beta \frac{S}{N} + \gamma$$
$$\frac{\partial g}{\partial S} = \frac{\partial\left(\beta\frac{S}{N}I+\rho_1 I-\rho_2 I-\gamma I\right)}{\partial S} = \beta \frac{I}{N}$$
$$\frac{\partial g}{\partial I} = \frac{\partial\left(\beta\frac{S}{N}I+\rho_1 I-\rho_2 I-\gamma I\right)}{\partial I} = \beta \frac{S}{N} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma.$$

Matriks Jacobian dari model:

$$Jf(I, S) = \begin{bmatrix} a - 2bS - 2bI + \rho_1 - \beta \frac{I}{N} - \rho_2 & a - 2bS - 2bI - \beta \frac{S}{N} + \gamma \\ \beta \frac{I}{N} & \beta \frac{S}{N} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \end{bmatrix}$$

Teorema 1 : Titik kesetimbangan bebas penyakit, $(I^*, S^*) = (0, \frac{a+\rho_1-\rho_2}{b})$ stabil asimtotik jika $\rho_2 < \rho_1 + a$ dan $\beta + \rho_1 < \rho_2 + \gamma$.

Bukti:

Berdasarkan matriks Jacobian $Jf(I, S)$ di atas maka matriks $Jf\left((I^*, S^*)\right)$ menjadi :

$$Jf(I^*, S^*) = \begin{bmatrix} a - 2b\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right) + \rho_1 - \rho_2 & a - 2b\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right) - \beta \frac{\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)}{N} + \gamma \\ 0 & \beta \frac{\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)}{N} + \rho_1 - \rho_2 - \gamma \end{bmatrix},$$

Karena $N = S + I$ dan $I = 0$ maka diperoleh $N = S$, sehingga matriks Jcobian di atas menjadi :

$$Jf(I^*,S^*) = \begin{bmatrix} a-2b\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)+\rho_1-\rho_2 & a-2b\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)-\beta\frac{\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)}{\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)}+\gamma \\ 0 & \beta\frac{\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)}{\left(\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b}\right)}+\rho_1-\rho_2-\gamma \end{bmatrix}$$

$$Jf(I^*,S^*) = \begin{bmatrix} \rho_2-\rho_1-a & 2\rho_2-2\rho_1-a+\beta+\gamma \\ 0 & \beta+\rho_1-\rho_2-\gamma \end{bmatrix}.$$

Diperoleh persamaan karakteristik, yaitu :

$$(\lambda-[\rho_2-\rho_1-a])(\lambda-[\beta+\rho_1-\rho_2-\gamma])=0$$

sehingga dapat ditentukan nilai eigen-nilai eigen dari persamaan karakteristik di atas :

$$\lambda_1=\rho_2-\rho_1-a \text{ dan } \lambda_2=\beta+\rho_1-\rho_2-\gamma.$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa kesetimbangan bebas penyakit $(I^*,S^*)=(0,\frac{a+\rho_1-\rho_2}{b})$ stabil asimtotik jika $\rho_2-\rho_1-a<0$ yang mengakibatkan $\rho_2<\rho_1+a$ dan $\beta+\rho_1-\rho_2-\gamma<0$, mengakibatkan $\beta+\rho_1<\rho_2+\gamma$.

Teorema 2 : Titik kesetimbangan endemik penyakit $(\hat{I},\hat{S})=\left(\frac{\beta+\rho_1-\rho_2-\gamma}{\beta}N,\frac{\rho_2-\rho_1+\gamma}{\beta}N\right)$ adalah stabil asimotik jika $2bN+\beta>a+\gamma$ dan $\rho_1+\rho_2>a-2bN$.

Bukti :

Diketahui bahwa:

$$Jf(I,S) = \begin{bmatrix} a-2bS-2bI+\rho_1-\beta\frac{I}{N}-\rho_2 & a-2bS-2bI-\beta\frac{S}{N}+\gamma \\ \beta\frac{I}{N} & \beta\frac{S}{N}+\rho_1-\rho_2-\gamma \end{bmatrix}.$$

Setelah dimasukkan nilai $\hat{I}$ dan $\hat{S}$ maka matriks di atas menjadi

$$Jf(\hat{I},\hat{S}) = \begin{bmatrix} a-2bN-\beta+\gamma & a-2bN-\rho_2+\rho_1 \\ \beta+\rho_1-\rho_2-\gamma & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks di atas, maka akan dicari determinan $\left(\lambda I-Jf(\hat{I},\hat{S})\right)=0$, sehingga diperoleh persamaan karakteristik matriks Jacobian di atas yaitu :

$$(\lambda-a+2bN+\beta-\gamma)(\lambda)-(-\beta-\rho_1+\rho_2+\gamma)(2bN-a-\rho_1+\rho_2)=0$$
$$\lambda^2+(2bN-a+\beta-\gamma)\lambda-(\rho_2-\beta-\rho_1+\gamma)(2bN-a-\rho_1+\rho_2)=0.$$

Misalkan $P=2bN-a+\beta-\gamma$ dan $Q=(\rho_2-\beta-\rho_1+\gamma)(2bN-a-\rho_1+\rho_2)$, maka persamaan karakteristik di atas dapat ditulis $\lambda^2+P\lambda-Q=0$, sehingga didapat akar-akar persamaan atau nilai eigennya, yaitu sebagai berikut:

$$\lambda_1=\frac{-P+\sqrt{P^2-4Q}}{2} \quad \text{dan} \quad \lambda_2=\frac{-P-\sqrt{P^2-4Q}}{2}\text{n}$$

.

Karena $2bN+\beta>a+\gamma$ dan $\rho_1+\rho_2>a-2bN$, maka bilangan real pada $\lambda_1<0$ dan $\lambda_2<0$ sehingga titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal. Hal ini berarti bahwa pada populasi selalu ada individu yang terinfeksi penyakit dan dalam waktu yang lama jumlah tiap kelas pada populasi akan sama dengan $(\hat{I},\hat{S})=\left(\frac{\beta+\rho_1-\rho_2-\gamma}{\beta}N,\frac{\rho_2-\rho_1+\gamma}{\beta}N\right)$.

3.4 Simulasi

a. Kestabilan titik equilibrium bebas penyakit

Diketahui : $Jf(I^*,S^*)=\begin{bmatrix} \rho_2-\rho_1-a & 2\rho_2-2\rho_1-a+\beta+\gamma \\ 0 & \beta+\rho_1-\rho_2-\gamma \end{bmatrix}$, adalah matriks jacobian untuk kesetimbangan bebas penyakit dimana $\rho_2<\rho_1+a$ dan $\beta+\rho_1<\rho_2+\gamma$.

Diambil $a=20$, $\rho_1=10$, $\rho_2=8$, $\beta=4$ dan $\gamma=15$, maka

$$Jf(I^*,S^*) = \begin{bmatrix} 8-10-20 & 2(8)-2(10)-20+4+15 \\ 0 & 4+10-8-15 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -22 & -5 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}.$$

Misalkan λ nilai eigen dari Matriks $Jf(I^*,S^*)=\begin{bmatrix} -22 & -5 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$.

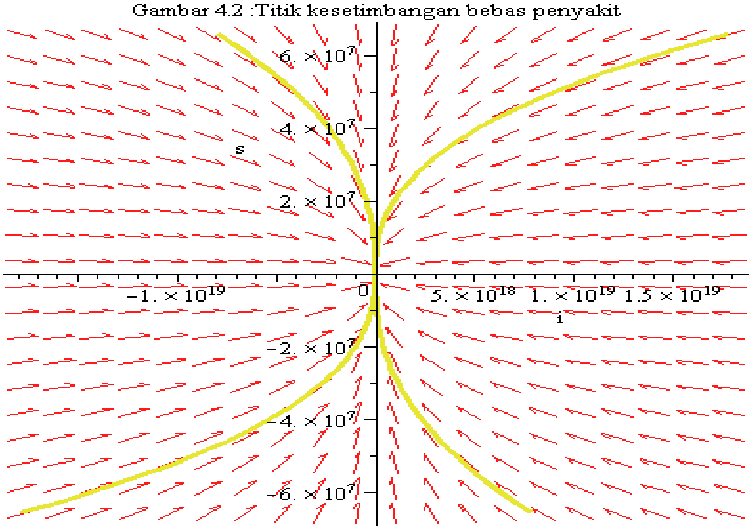
Dengan memasukkan nilai-nilai koefisien (parameter) yang ada, maka diperoleh:

$$\lambda_{1.2}=\frac{-22+(-9)\pm\sqrt{((-22)+(-9))^2-4((-22)((-9))-(-5)(0))}}{2}$$
$$\leftrightarrow \lambda_1=\frac{-31+13}{2}=-9 \text{ dan } \lambda_2=\frac{-31-13}{2}=-22.$$

Karena $\lambda_{1.2}$ bagian realnya semua negatif, maka titik kesetimbangan bebas penyakit adalah Stabil. Hasil simulasi ditunjukkan pada gambar berikut ini :

ISSN : 2085-9902

Gambar 4.2 :Titik kesetimbangan bebas penyakit



b. Kestabilan titik ekuilibrium endemik penyakit

Diketahui : $Jf(I^*,S^*) = \begin{bmatrix} a-2bN-\beta+\gamma & a-2bN-\rho_2+\rho_1 \\ \beta+\rho_1-\rho_2-\gamma & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks jacobian untuk kesetimbangan endemik penyakit dimana $2bN+\beta > a+\gamma$ dan $\rho_1+\rho_2 > a-2bN$.
Diambil $bN = 30$, $a = 20$, $\rho_1 = 10$, $\rho_2 = 8$, $\beta = 10$ dan $\gamma = 6$, sehingga matriks jacobiannya berubah menjadi:

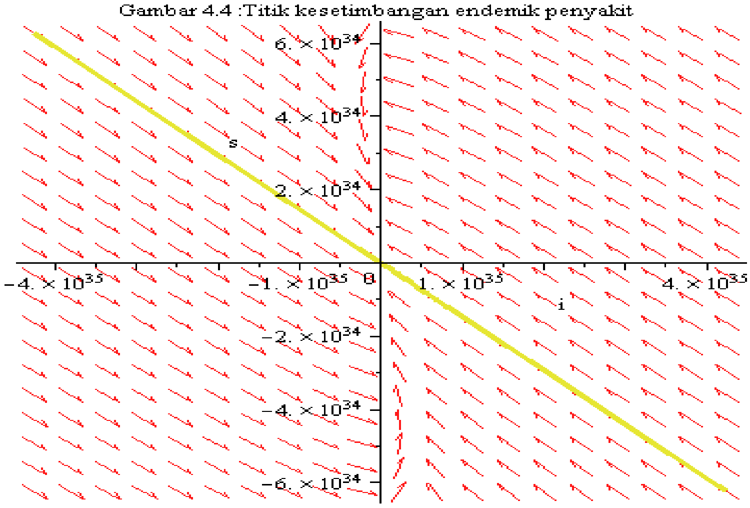
$$Jf(I^*,S^*) = \begin{bmatrix} 20-2(30)-10+6 & 20-2(30)-8+10 \\ 10+10-8-6 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -44 & -22 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan cara yang sama saat mengerjakan kestabilan titik kesetimbangan pada titik kesetimbangan bebas penyakit, maka dari bentuk di atas diperoleh:

$$\lambda_{1.2} = \frac{-44+0 \pm \sqrt{((-44)+0)^2 - 4((-44)(0)-(-22)(6))}}{2}$$
$$\leftrightarrow \lambda_{1.2} = \frac{-44 \pm \sqrt{1408}}{2}.$$

Karena bagian real $\lambda_{1.2}$ semuanya negatif maka titik ekuilibrium endemik penyakit adalah Stabil. Hasil simulasi ditunjukkan pada gambar berikut ini:

Gambar 4.4 :Titik kesetimbangan endemik penyakit



4. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat dipaparkan dari hasil pembahasan di atas adalah:

a. Terdapat masing-masing satu titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik penyakit, yaitu berturut-turut $(I^*,S^*) = (0, \frac{a+\rho_1-\rho_2}{b})$ dan $(\hat{I},\hat{S}) = \left(\frac{\beta+\rho_1-\rho_2-\gamma}{\beta}N, \frac{\rho_2-\rho_1+\gamma}{\beta}N\right)$ dari model SIS dengan pertumbuhan logistik dan migrasi.

b. Titik ekuilibrium bebas penyakit $(I^*, S^*) = (0, \frac{a+\rho_1-\rho_2}{b})$ akan stabil asimtotik lokal jika $\rho_2 < \rho_1 + a$ dan $\beta + \rho_1 < \rho_2 + \gamma$. Atau dengan kata lain dalam waktu yang cukup lama tidak ada lagi penyakit dalam populasi, jika dalam populasi emigrasi lebih kecil daripada imigrasi ditambah dengan kelahiran dan laju penularan penyakit ditambah dengan imigrasi lebih kecil daripada emigrasi ditambah dengan laju kesembuhan.
c. Titik ekuilibrium endemik $(\hat{I}, \hat{S}) = \left(\frac{\beta+\rho_1-\rho_2-\gamma}{\beta}N, \frac{\rho_2-\rho_1+\gamma}{\beta}N\right)$ akan stabil asimtotik jika $2bN + \beta > a + \gamma$ dan $\rho_1 + \rho_2 > a - 2bN$. Atau dengan kata lain jika dalam populasi laju penularan ditambah dengan dua kali kematian alami lebih besar daripada kelahiran ditambah dengan laju kesembuhan, kemudian besarnya imigrasi ditambah dengan emigrasi lebih besar daripada kelahiran dikurangi dengan dua kali kematian alami.

5. Referensi

[1] Baiduri. Persamaan Differensial dan Matematika Model. Malang: UMM Press. 2002.
[2] Castillo C., Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology., Canada, 2000
[3] Ferawati. *Analisis Kestabilan Titik Tetap Pada Model SIS dengan Penambahan Populasi Rentan, Konstan dan penambahan populasi dan Kematian, Sesuai Persamaan Logistik, Tugas Akhir Mahasiswa Institut Teknologi Bandung,* Bogor. 2004.
[4] Finizio dan Ladas. Penerapan Differensial Biasa degan Penerapan Modern. Edisi Kedua. Terjemahan Widiarti Santoso. Jakarta : Erlangga. 1998.
[5] Haberman, Richard. Mathematical models in mechanical vibrations, population dynamics, and traffic flow. USA. 1977.
[6] Hale, J. K. dan Kocak, H. Dynamic and Bifurcation, Springer-verlag, New York. 1991.
[7] Meiss, J. D. Differential Dyamical Systems, Society for Industrial and Applied Mathematics, USA. 2007.
[8] Neuhauser, Claudia. Calculus for Biology and Medicine. New Jersey : Pearson Education. 2004.
[9] Perko, L. Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-verlag, New York. 1991.
[10] Umbari, Helvi Agustianti. *Model SIS (Suspectible, Infectives, Suspectible) dengan pertumbuhan alami dan proses migrasi*. *Tugas Akhir Mahasiswa Uin Suska Riau,* Pekanbaru. 2012.