 ISSN : 2085-9902

Penyelesaian Persamaan Painleve Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace

M. Nizam Muhaijir[1], Wartono[2]
Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
e-mail : nizam_ys86@yahoo.com

Abstrak

Makalah ini membahas tentang penyelesaian persamaan Painleve menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace. Metode dekomposisi Adomian Laplace adalah metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier yang mengkombinasikan antara tranformasi Laplace dan metode dekomposisi Adomian. Berdasarkan perhitungan terlihat bahwa hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk menyelesaikan persamaan Painleve adalah sama dengan metode dekomposisi Adomian. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa metode ini lebih efektif dan akurat untuk menghampiri penyelesaian eksak jika dibandingkan dengan metode homotopi pertubasi.

Kata kunci : *Metode Dekomposisi Adomian, Metode Dekomposisi Adomian Laplace, Metode Pertubasi Homotopi, Persamaan Painleve.*

Abstract

This paper discusses about the solving Painleve equation by using Laplace Adomian Decomposition Method. Laplace Adomian Decomposition Method is a method to solve of nonlinear ordinary differential equation that combine between Laplace transform and Adomian Decompositiom Method. Based on calculation seen that the result that gotten by using Laplace Adomian Decomposition Method to solve Painleve equation are same with Adomian Decomposition Method. The result that obtained show the method this is more efecctive and accurate to draw near the exact solution if compared with homotopy perturbation method.

Keywords : *Adomian Decomposition Method, Laplace Adomian Decomposition Method, Homotopy Pertubation Method, Painleve Equation.*

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial merupakan permasalahan yang banyak dijumpai ketika analisa yang dilakukan tergantung pada waktu dan nilainya mengalami perubahan-perubahan berdasarkan waktu. Pemunculan persamaan-persamaan diferensial di dalam metematika terapan tidak lain karena kebanyakan hukum-hukum dalam kajian ilmiah dapat dimodelkan menggunakan persamaan diferensial dengan waktu sebagai variabel bebas.

Dalam menyelesaikan persamaan diferensial terkadang dapat diselesaikan secara eksak dan penyelesaiannya dapat dinyatakan dalam bentuk ekspresi fungsi secara eksplisit.
Contoh :

$$y'(x) = g(x) \tag{1}$$

Maka penyelesaiannya adalah

$$y(x) = G(x) + c \tag{2}$$

dengan $G(x)$ merupakan anti turunan dari $g(x)$ dan c adalah suatu konstanta integrasi. Selanjutnya konstanta c dapat memberikan penyelesaian khusus dengan cara menentukan nilai $y(x)$ di suatu x tertentu. Misalnya

$$y(x_0) = x_0 \tag{3}$$

Permasalahan yang sering terjadi adalah terkadang teknik-teknik analitik tidak dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan persamaan diferensial tertentu, khususnya persamaan diferensial nonlinier yang sangat sulit diselesaikan secara analitik walaupun sebagian kecil dapat diselesaikan dengan metode variabel terpisah. Untuk itu, diperlukan metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Pendekatan yang digunakan dalam metode numerik merupakan pendekatan analisis matematis. Sehingga hasil yang diperoleh merupakan nilai hampiran yang akan mendekati nilai sebenarnya.

Banyak metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier, salah satunya adalah metode dekomposisi Adomian yang diperkenalkan pertama kali oleh Adomian (1994).

Selanjutnya, beberapa peneliti mengembangkan metode Dekomposisi Adomian dengan melakukan modifikasi, yaitu dengan melibatkan transformasi Laplace yang biasa disebut Metode Dekomposisi Adomian Laplace (LADM). Syam dan Hamdan (2006) menggunakan metode Dekomposisi Adomian Laplace untuk menyelesaikan persamaan Bratu dan Yusufoglu (2006) juga menggunakan algoritma Dekomposisi Laplace untuk mencari penyelesaian persamaan Duffing.

Perkembangan selanjutnya, Kiymas (2009) juga melakukan kombinasi antara transformasi Laplace dengan metode dekomposisi Adomian untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa nonlinier orde dua dengan koefisien variabel.

2. Metodologi Penelitian

Metode yang digunakan dalam makalah ini adalah studi pustaka dengan mempelajari literatur-literatur yang berhubungan dengan pokok permasalahan dengan langkah-langkah yang digunakan sebagai berikut :

1. Menentukan persamaan Painleve yang akan dibahas dengan masalah nilai awal $y(0) = \alpha$ dan $y'(0) = \beta$ serta komponen nonliniernya $Ny = f(y)$ yang merupakan deret polinomial Adomian A_n yang ditulis sebagai $Ny = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$.
2. Mengubah persamaan ke dalam bentuk transformasi Laplace menggunakan aturan-aturan yang berlaku pada tranformasi Laplace.
3. Mendapatkan nilai $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$, selanjutnya diubah ke dalam bentuk transformasi Laplace menggunakan aturan-aturan yang berlaku pada tranformasi Laplace.
4. Selanjutnya mencari nilai-nilai $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} (n = 0, 1, 2, \ldots)$ dengan menggunakan invers transformasi Laplace.
5. Terakhir menjumlahkan nilai-nilai $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ yang merupakan penyelesaian persamaan diferensial biasa nonlinier orde dua tersebut.

3. Hasil dan Pembahasan

Persamaan Painleve merupakan persamaan diferensial nonlinier orde dua yang mempunyai bentuk umum

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y^3 + xy + \mu, \quad y(0) = \alpha \text{ dan } y'(0) = \beta \tag{4}$$

dengan μ merupakan parameter dari persamaan tersebut.

Selanjutnya, untuk mencari penyelesaian persamaan (4) dapat menggunakan persamaan

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{\mu\} + \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\{y\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\{f(y)\} \tag{5}$$

Oleh karena, penyelesaian untuk persamaan (5) merupakan komposisi fungsi-fungsi tak diketahui yaitu fungsi $y(x)$ yang merupakan deret $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$, ditulis

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \end{aligned} \tag{6}$$

Maka persamaan (5) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{y_0\} + \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\{y\} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{f(y)\} \tag{7}$$

dengan

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{\mu\}$$

 ISSN : 2085-9902

Selanjutnya, pada persamaan (7) komponen y pada ruas kanan dapat diekspansi menggunakan deret $y_0, y_1, y_2, \ldots$ dan untuk komponen nonlinier $f(y)$ diekspansi menggunakan deret polinomial Adomian A_i, sehingga persamaan (7) menjadi

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{y_0\} + \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} y_i\right\} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right\} \tag{8}$$

dengan

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{\mu\} \tag{9}$$

dan

$$\mathcal{L}\{y_1\} = \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\{y_0\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\{A_0\}$$

$$\mathcal{L}\{y_2\} = \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\{y_1\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\{A_1\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\{y_{i+1}\} = \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\{y_i\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\{A_i\} \tag{10}$$

Contoh :

Tentukan penyelesaian dari persamaan Painleve berikut :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xy + 2y^3 + 5 \tag{11}$$

dengan nilai awal $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 0$.

Penyelesaian :

Untuk mencari penyelesaian persamaan (11) dapat dilakukan dengan menentukan nilai $y_0(x)$ terlebih dahulu, yaitu

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{\mu\}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{5}{s^3} \tag{12}$$

Inverskan persamaan (12), sehingga diperoleh

$$y_0(x) = 1 + \frac{5}{2}x^2 \tag{13}$$

Untuk memperoleh nilai $y_1(x)$, maka harus dicari nilai A_0, yaitu

$$A_0 = y_0^3$$

$$= 1 + \frac{15}{2}x^2 + \frac{75}{4}x^4 + \frac{125}{8}x^6$$

maka

$$\mathcal{L}\{y_1\} = \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\{y_0\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\{A_0\}$$

$$= \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\left\{1 + \frac{5}{2}x^2\right\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\left\{1 + \frac{15}{2}x^2 + \frac{75}{4}x^4 + \frac{125}{8}x^6\right\}$$

$$= \frac{x}{s^3} + \frac{5x}{s^5} + \frac{2}{s^3} + \frac{30}{s^5} + \frac{900}{s^7} + \frac{22500}{s^9} \tag{14}$$

Inverskan persamaan (14), sehingga diperoleh

$$y_1(x) = x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^4 + \frac{5}{24}x^5 + \frac{5}{4}x^6 + \frac{125}{224}x^8 \tag{15}$$

Dengan cara yang sama untuk memperoleh nilai $y_2(x)$, maka harus dicari nilai A_1, yaitu

$$A_1 = 3y_0^2 y_1$$

$$= 3x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{75}{4}x^4 + \frac{65}{8}x^5 + \frac{165}{4}x^6 + \frac{25}{2}x^7 + \frac{9825}{224}x^8 + \frac{125}{32}x^9 + \frac{7125}{224}x^{10} + \frac{9375}{896}x^{12}$$

maka

$$\mathcal{L}\{y_2\} = \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\{y_1\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\{A_1\}$$

$$= \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\left\{x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^4 + \frac{5}{24}x^5 + \frac{5}{4}x^6 + \frac{124}{224}x^8\right\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\left\{3x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{75}{4}x^4 + \frac{65}{8}x^5 + \frac{165}{4}x^6 + \frac{25}{2}x^7 + \frac{9825}{224}x^8 + \frac{125}{32}x^9 + \frac{7125}{224}x^{10} + \frac{9375}{896}x^{12}\right\}$$

$$= \frac{22500x}{s^{11}} + \frac{900x}{s^9} + \frac{25x}{s^8} + \frac{30x}{s^7} + \frac{3x}{s^6} + \frac{2x}{s^5} + \frac{12}{s^5} + \frac{18}{s^6} + \frac{900}{s^7} + \frac{1950}{s^8} + \frac{59400}{s^9} + \frac{126000}{s^{10}} + \frac{3537000}{s^{11}} + \frac{2835000}{s^{12}} + \frac{230850000}{s^{13}} + \frac{1002375000}{s^{15}} \tag{16}$$

Inverskan persamaan (16), sehingga diperoleh

$$y_2(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{7}{30}x^5 + \frac{51}{40}x^6 + \frac{3}{7}x^7 + \frac{745}{504}x^8 + \frac{745}{2016}x^9 + \frac{655}{672}x^{10} + \frac{3425}{44352}x^{11} + \frac{2375}{4928}x^{12} + \frac{9375}{81536}x^{14} \tag{17}$$

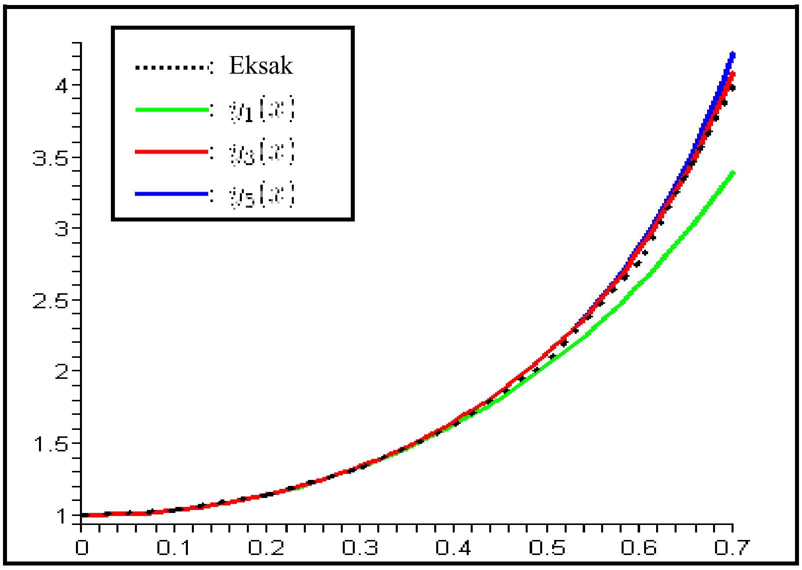
Penyelesaian persamaan dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan suku-suku $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$ atau ditulis

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \ldots$$

$$= 1 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{4}x^4 + \frac{53}{120}x^5 + \frac{101}{40}x^6 + \frac{3}{7}x^7 + \frac{4105}{2016}x^8 + \frac{745}{2016}x^9 + \frac{665}{672}x^{10} + \frac{3425}{44352}x^{11} + \frac{2375}{4928}x^{12} + \frac{9375}{81536}x^{14} + \ldots$$

 ISSN : 2085-9902

Akurasi penyelesaian bergantung kepada banyaknya jumlah suku yang dijumlahkan. Gambar 1 memperlihatkan akurasi penyelesaian menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk jumlah suku satu $(y_1(x))$, jumlah suku tiga $(y_3(x))$, dan jumlah suku lima $(y_5(x))$ di $0 \leq x \leq 0,7$.



Gambar 1 Hampiran penyelesaian persamaan Painleve $y'' = xy + 2y^3 + 5$ dengan nilai awal $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 0$ di $0 \leq x \leq 0,7$ untuk beberapa jumlah suku.

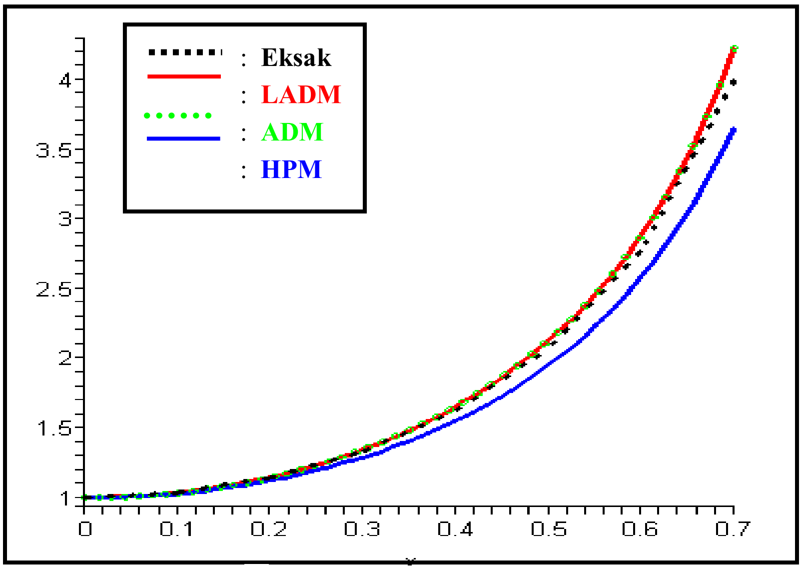
Tabel 1 menunjukkan perbandingan akurasi penyelesaian menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace (LADM), Metode Dekomposisi Adomian (ADM), dan Metode Homotopi Pertubasi (HPM) dengan jumlah suku lima $(y_5(x))$.

Tabel 1 Perbandingan penyelesaian persamaan Painleve $y'' = xy + 2y^3 + 5$ dengan nilai awal $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 0$ di $-0,7 \leq x \leq 0,7$ untuk jumlah suku lima $(y_5(x))$.

x	Eksak	Metode		
		ADM	HPM	LADM
-0,7	3,6877	3,4503	3,3841	3,4503
-0,5	2,0139	1,9613	1,8901	1,9613
-0,3	1,3263	1,3168	1,2814	1,3168
-0,1	1,0350	1,0347	1,0300	1,0347
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	1,0353	1,0357	1,0304	1,0357
0,3	1,3366	1,3462	1,2915	1,3462
0,5	2,0757	2,1294	1,9513	2,1294
0,7	4,0022	4,2284	3,6573	4,2284

Gambar 2 menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian persamaan $y(x)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian, metode pertubasi homotopi, dan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk jumlah suku lima $(y_5(x))$ terhadap penyelesaian eksak untuk $0 \leq x \leq 0,7$.

 ISSN : 2085-9902



Gambar 2 Perbandingan penyelesaian persamaan Painleve $y'' = xy + 2y^3 + 5$ dengan nilai awal $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 0$ di $0 \le x \le 0,7$ menggunakan LADM, ADM, dan HPM.

Berdasarkan Gambar 2 dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh $y_5(x)$ untuk metode dekomposisi Adomian dan metode dekomposisi Adomian Laplace lebih mendekati dibandingkan kurva metode homotopi pertubasi. Hal ini menjelaskan bahwa metode dekomposisi Adomian Laplace mempunyai hasil yang sama dengan metode dekomposisi Adomian dalam mendekati penyelesaian eksak dan memiliki hampiran yang lebih baik jika dibandingkan dengan metode homotopi pertubasi.

4. Kesimpulan

Hasil penyelesaian untuk persamaan Painleve menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace adalah sama dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian dan hasilnya penyelesaiannya lebih baik jika dibandingan penyelesaian menggunakan metode homotopi pertubasi, hal ini dapat terlihat pada Gambar 2. Hasil penyelesaian yang diperoleh dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk beberapa suku yang digunakan semakin mendekati nilai eksak, sehingga semakin banyak jumlah suku-suku $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$ yang digunakan untuk metode dekomposisi Adomian Laplace maka hasil yang diperoleh akan cukup akurat dan efektif.

Daftar Pustaka

Jurnal :

[1] Batiha, B., *et. al.*, Application of variational iteration method to a general Riccati equation, *International Mathematical Forum*, 56(2) : 2759 – 2770, 2007.
[2] Chowdhury, M. S. H., Solving linier and nonlinier differential equations by homotopy perturbation method, *Faculty of Science and Thechnology Universiti Kebangsaan Malaysia*, Thesis : 33 – 37, 2007.
[3] Hesemaddini, E., *et.al.*, Homotopy perturbation method for second Painleve equation and comparisons with analityc continuation extension and Chebishev series method, *Int. Mathematical Forum*, 13(5) : 629 – 637, 2010.
[4] Kiyamas, O., An algorithm for solving initial value problems using Laplace Adomian decomposition method, *Applied Mathematical Science*, 30(3) : 1453 – 1459, 2009.
[5] Syam, M. I. and Hamdan, A., An efficient method for s olving Bratu equations, *Applied Mathematics and Computation*, 176 : 704 – 713, 2006.
[6] Vahidi, A. R., Improving the accuracy of solutions of linear and nonlinier ODEs in decomposition method, *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 3(3) : 2255 – 2261, 2009.
[7] Yusufoglu, E., Numerical solution of Duffing equation by the Laplace decomposition algorithm, *Applied Mathematics and Computation*, 177 : 572 – 580, 2006.

Buku :

[1] Adomian, G., *Solving Frontier Problems of Physics : The Adomian Decomposition Method*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.
[2] Campbell, S. L., *An Introduction to Differential Equations and Their Applications*, *2th Edition*, Wadswort, Inc., USA, 1990.
[3] Edwards, C. H. and Penney, D. E., *Differential Equations & Linear Algebra*, Printice-Hall, Inc., New Jersey, 2001.
[4] Kreyszig, E., *Advance Engineering Mathematics, 9th Edition*, Jhon Wiley & Sons, Inc., Singapore, 2006.
[5] Varberg, D, Edwin J. P, and Steven E. R., *Calculus, 9th Edition*, Person Education, Inc., USA, 2007.