ISSN : 2085-9902

Vektor Kendali Permainan Dinamis LQ Non-Kooperatif Waktu Tak Berhingga

Nilwan Andiraja
UIN Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru
Jl. H.R Soebrantas No 155 Km. 18 telp : 0761-8359937
e-mail: nilwanandiraja@uin-suska.ac.id

Abstrak

Pada tulisan ini dibahas mengenai membentuk vektor kendali dengan kriteria Nash pada kasus permainan dinamis linier kuadratik non-kooperatif dua pemain dengan waktu tak berhingga. Pembahasan diawali dari persamaan umum untuk permainan dinamis non-koopertaif N pemain untuk waktu berhingga dengan beberapa asumsi. Kemudian, dengan asumsi yang sama dibentuk persamaan untuk pemainan dinamis non-kooperatif dua pemain untuk waktu tak berhingga. Kemudian dibentuk persamaan aljabar Riccati yang sesuai dengan persamaan diferensial dan fungsi objektif untuk pemain pertama dan untuk pemain kedua, yang digunakan untuk memperoleh vektor kendali Nash. Akhirnya, dianalisa kestabilan fungsi dinamik berdasarkan vektor kendali pemain pertama dan vektor kendali pemain kedua yang diperoleh.

Kata kunci: *permainan, linier, kuadratik, non-kooperatif, kendali*

Abstract

In this paper discuss about control vector with Nash criterion in linier quadratic non-cooperative dynamic game two player case with infinite time. Discuss was started from general equations for non-cooperative dynamic game N player for infinite time with several assumption. Then, with same assumption to made general equation for non-cooperative dynamic game two player for infinite time. Based on differential equation and objective function for each player algebraic Riccati equation was formed for first player and second player, to made control vector with Nash criterion. Finally, control vector with Nash for first player and second player used to analysis about stability of dynamic function.

Keywords: *game, linear, quadratic, non-cooperative, control*

1. Introduction

Teori Permainan dinamis telah banyak digunakan dalam berbagai bidang seperti, bidang ekonomi, bidang politik, bidang ekologi, dan bidang kehidupan lainnya. Permainan dalam matematika, merupakan suatu interaksi minimal oleh dua pemain yang terdapat sebuah sistem dinamik permainan dengan masing-masing pemain memiliki fungsi objektif. Sebuah permainan dikatakan permainan dinamis jika strategi yang diambil oleh seorang pemain dilakukan dengan mempertimbangkan strategi pemain lain.

Permainan dinamis yang dikaji di penelitian ini adalah permainan dinamis non-kooperatif kontinu umpan balik Nash dua pemain dengan waktu tak berhingga. Hal yang menarik dalam permainan dinamis non-kooperatif, bahwa untuk mencapai suatu tujuan, masing-masing pemain akan saling berkompetisi. Agar tujuan yang diinginkan tercapai dengan baik, maka dapat dipahami dalam berkompetisi tentu masing-masing pemain tidak saling bekerjasama (non-kooperatif).

Pada permainan dinamis non-kooperatif kontinu umpan balik Nash, para pemain akan mengoptimalkan dalam arti Nash fungsi objektif, untuk mengoptimalkan fungsi objektif maka para pemain memerlukan strategi, sehingga dengan strategi tersebut hasil fungsi objektif yang diperoleh oleh seorang pemain tidak akan lebih buruk dari pada hasil yang diperoleh oleh pemain lain. Mencari strategi yang mengoptimalkan fungsi objektif dalam arti Nash, dapat dibawa menjadi mencari penyelesaian persamaan diferensial Riccati.

Beberapa penelitian yang telah dilakukan diantaranya mengenai teori permainan salah satunya yang dijelaskan oleh Jacob Engwerda (2000) yang menjelaskan tentang titik ekuilibrium permainan dinamis non-kooperatif dengan waktu tak hingga, namun tidak menjelaskan tentang kestabilan untuk masing-masing pemain dan Weeren (1999) yang menjelaskan titik ekuilibrium persoalan permainan dinamis non-kooperatif dengan waktu tak hingga kasus non skalar dan skalar. Berdasarkan uraian tersebut maka dalam penelitian ini yang akan dibahas adalah vektor kendali umpan balik Nash permainan dinamis linier kuadratik dua pemain non-kooperatif waktu tak berhingga.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan studi literatur dan langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Membentukan persamaan diferensial dinamik permainan non-kooperatif dua pemain berdasarkan persamaan umum

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B_1\mathbf{u}_1(t) + B_2\mathbf{u}_2(t) + \cdots + B_N\mathbf{u}_N(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,$$

2. Membentuk fungsi tujuan pemain pertama dan pemain kedua untuk waktu tak berhingga, berdasarkan persamaan umum fungsi tujuan yaitu

$$J_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_i, T) = \int_0^T \{\mathbf{x}^T(t)Q_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_i^T(t)R_{ii}\mathbf{u}_i(t) + \mathbf{u}_j^T(t)R_{ij}\mathbf{u}_j(t)\}dt, \quad j \neq i$$

   Dengan dipenuhi $J_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \lim_{T\to\infty} J_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, T)$

   Kemudian, didefinisikan $S_i = B_iR_{ii}^{-1}B_i^T$ dan $S_{ij} = B_iR_{ii}^{-1}R_{ji}R_{ii}^{-1}B_i^T$ untuk $i \neq j$.

2. Membentuk persamaan aljabar Riccati untuk pemain pertama dan pemain kedua berdasarkan langkah 1 dan 2.
3. Membentuk vektor kendali Nash untuk pemain pertama dan pemain kedua, berdasarkan solusi persamaan aljabar Riccati di langkah 2.
4. Analisa kestabilan permainan dinamis non-kooperatif untuk waktu tak berhingga, berdasarkan vektor kendali yang diperoleh dari langkah 3.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Permainan Dinamis Non-Kooperatif Untuk Waktu Tak Berhingga

Pembahasan mengenai kasus permainan dinamis non-kooperatif untuk waktu tak berhingga diawali dengan didefinisikan persamaan diferensial dinamik permainan untuk dua pemain yaitu,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B_1\mathbf{u}_1(t) + B_2\mathbf{u}_2(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

dengan pemain pertama dan pemain kedua akan meminimalkan dalam arti Nash fungsi objektif yaitu

$$J_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, T) = \int_0^T \{\mathbf{x}^T(t)Q_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_i^T(t)R_{ii}\mathbf{u}_i(t) + \mathbf{u}_j^T(t)R_{ij}\mathbf{u}_j(t)\}dt, \quad j \neq i \tag{2}$$

Diketahui bahwa fungsi tujuan (2) untuk kedua pemain, maka persamaan (2) memenuhi $i = 1, 2$. Selanjutnya, pada bagian ini dibahas untuk kasus waktu tak berhingga, maka fungsi tujuan memenuhi kriteria $J_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \lim_{T\to\infty} J_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, T)$. Matriks-matriks pada fungsi tujuan permainan pada persamaan (2) memenuhi asumsi kedua matriks Q_i dan matriks R_{ii}

adalah matriks simetris dan untuk matriks R_{ii} memenuhi matriks positif definit, untuk $i = 1, 2$. Pada pembahasan ini diasumsikan juga bahwa $(A, [B_1, B_2])$ dapat distabilkan.

Selanjutnya, setiap pemain akan memberikan vektor kendali $\mathbf{u}_i(t) = F_i(t)\mathbf{x}(t)$, dengan $F_i(t) = -R_{ii}^{-1} B_i^T K_i(t)$ untuk $i = 1, 2$ kepada persamaan diferensial dinamik pada persamaan (1). Vektor kendali yang akan diberikan sebagai berikut,

vektor kendali pemain pertama, $\mathbf{u}_1(t) = F_1(t)\mathbf{x}(t)$ dengan $F_1(t) = -R_{11}^{-1} B_1^T K_1(t)$,

vektor kendali pemain kedua, $\mathbf{u}_2(t) = F_2(t)\mathbf{x}(t)$ dengan $F_2(t) = -R_{22}^{-1} B_2^T K_2(t)$.

Sementara itu, diketahui bahwa model permainan pada penelitian ini merupakan permainan dengan umpan balik. Oleh karena itu, pemain pertama akan mengetahui vektor kendali yang diberikan oleh pemain kedua. Jika pemain pertama mengetahui vektor kendali pemain kedua yaitu $\mathbf{u}_2(t) = -R_{22}^{-1} B_2^T K_2(t)\mathbf{x}(t)$ dengan $F_2^*(t) = -R_{22}^{-1} B_2^T K_2$, sehingga jika $\mathbf{u}_2 = F_2^* \mathbf{x}$ maka $\mathbf{u}_2^T = \mathbf{x}^T F_2^{*^T}$. Selanjutnya diketahui sistem dinamik $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_1\mathbf{u}_1 + B_2\mathbf{u}_2$, maka sistem dinamik setelah diberi kendali umpan balik adalah

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - S_2 K_2)\mathbf{x} + B_1\mathbf{u}_1, \text{ dengan } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{3}$$

fungsi tujuan yang akan diminimalkan pemain pertama yaitu

$$J_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_1, F_2^*) = \int_0^{\infty} \{\mathbf{x}^T Q_1 \mathbf{x} + \mathbf{u}_1^T R_{11} \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2^T R_{12} \mathbf{u}_2\} dt$$

$$J_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_1, F_2^*) = \int_0^{\infty} \{\mathbf{x}^T (Q_1 + F_2^{*^T} R_{12} F_2^*)\mathbf{x} + \mathbf{u}_1^T R_{11} \mathbf{u}_1\} dt \tag{4}$$

Dengan melihat persamaan (3) dan (4), maka persoalan ini dapat dipandang sebagai masalah satu pemain. Maka dapat dibentuk persamaan aljabar Riccati sebagai berikut

$$0 = -A^T K_1 - K_1 A + K_1 B_1 R_{11}^{-1} B_1^T K_1 - Q$$

$$0 = -(A - S_2 K_2)^T K_1 - K_1(A - S_2 K_2) + K_1 S_1 K_1 - Q_1 - K_2 S_{21} K_2 \tag{5}$$

dengan persamaan alajabar Riccati (5) memiliki solusi K_1, maka diperoleh vektor kendali pemain pertama yaitu $\mathbf{u}_1^* = -R_{11}^{-1} B_1^T K_1 \mathbf{x}$.

Selanjutnya, untuk kasus pemain kedua, vektor kendali Nash dapat diperoleh dengan terlebih dahulu diketahui bahwa $F_1^* = -R_{11}^{-1}B_1^{\mathrm{T}}K_1$ sehingga $\mathbf{u}_1 = F_1^*\mathbf{x}$ maka $\mathbf{u}_1^T = \mathbf{x}^T F_1^{*T}$. Maka sistem dinamik untuk kasus pemain kedua menjadi

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - S_1K_1)\mathbf{x} + B_2\mathbf{u}_2 \text{ dengan } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \qquad (6)$$

fungsi tujuan yang akan diminimalkan pemain kedua yaitu

$$J_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_2, F_2^*) = \int_0^{\infty} \{\mathbf{x}^T Q_2 \mathbf{x} + \mathbf{u}_2^T R_{22}\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_1^T R_{21}\mathbf{u}_1\} dt$$

$$J_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_2, F_2^*) = \int_0^{\infty} \{\mathbf{x}^T (Q_2 + F_1^{*T} R_{21} F_1^*)\mathbf{x} + \mathbf{u}_2^T R_{22}\mathbf{u}_2\} dt \qquad (7)$$

dengan melihat persamaan (6) dan (7), maka dapat diberikan persamaan aljabar Riccati sebagai berikut,

$$0 = -A^T K_2 - K_2 A + K_2 B_2 R_{22}^{-1} B_2^T K_2 - Q$$

$$0 = -(A - S_1K_1)^T K_2 - K_2(A - S_1K_1) + K_2 S_2 K_2 - Q_2 - K_1 S_{12} K_1 \qquad (8)$$

dengan persamaan (8) memiliki solusi K_2, maka dapat diperoleh vektor kendali untuk pemain kedua yaitu $\mathbf{u}_2^* = -R_{22}^{-1}B_2^T K_2 \mathbf{x}$.

3.2. Analisa Kestabilan Permainan Dinamis Non-Kooperatif Untuk Waktu Tak Berhingga

Berdasarkan pembahasan pada bagian 3.1, diketahui vektor kendali untuk pemain pertama yaitu $\mathbf{u}_1^* = -R_{11}^{-1}B_1^T K_1 \mathbf{x}$ dengan diketahui vektor kendali pemain kedua yaitu $\mathbf{u}_2 = F_2^*\mathbf{x}$. Maka kestabilan persamaan diferensial dinamik untuk pemain pertama sebagai berikut,

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_1\mathbf{u}_1 + B_2\mathbf{u}_2$$

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_1(-R_{11}^{-1}B_1^T K_1)\mathbf{x} + B_2F_2^*\mathbf{x} = (A + B_2F_2^* - S_1K_1)\mathbf{x} \qquad (9)$$

Sehingga $A + B_2F_2^* - S_1K_1$ menjadi stabil.

Sementara itu untuk pemain kedua diketahui bahwa vektor kendali pemain kedua yaitu $\mathbf{u}_2^* = -R_{22}^{-1}B_2^T K_2 \mathbf{x}$ dengan diketahui vektor kendali pertama yaitu $\mathbf{u}_1 = F_1^*\mathbf{x}$. Sehingga kestabilan persmaan diferensial dinamik untuk pemain kedua yaitu

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_1\mathbf{u}_1 + B_2\mathbf{u}_2$$

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B_2(-R_{22}^{-1}B_2^T K_2)\mathbf{x} + B_1F_1^*\mathbf{x} = (A + B_1F_1^* - S_2K_2)\mathbf{x} \qquad (10)$$

Sehingga $A + B_1F_1^* - S_2K_2$ menjadi stabil.

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan $F_1^* = -R_{11}^{-1}B_1^T K_1$ dengan $F_1^{*T} = -K_1 B_1 R_{11}^{-1}$ dan $F_2^* = -R_{22}^{-1}B_2^T K_2$ dengan $F_2^{*T} = -K_2 B_2 R_{22}^{-1}$ ke sistem persamaan (9) dan (10), maka dapat diperoleh persamaan aljabar Riccati sebagai berikut

$$-(A - S_2K_2)^T K_1 - K_1(A - S_2K_2) + K_1S_1K_1 - Q_1 - K_2S_{21}K_2 = 0 \tag{11}$$

Dan

$$-(A - S_1K_1)^T K_2 - K_2(A - S_1K_1) + K_2S_2K_2 - Q_2 - K_1S_{12}K_1 = 0 \tag{12}$$

Dapat dilihat bahwa persamaan (5) dan (8) sama dengan persamaan (11) dan (12). Sehingga persamaan (11) dan (12) akan memiliki solusi K_1 dan K_2

Selanjutnya, diketahui $A\mathbf{x} + B_1(-R_{11}^{-1}B_1^T K_1)\mathbf{x} + B_2F_2^*\mathbf{x} = (A + B_2F_2^* - S_1K_1)\mathbf{x}$

dengan mensubstitusikan $F_2^* = -R_{22}^{-1}B_2^T K_2$ diperoleh

$$A\mathbf{x} + B_1(-R_{11}^{-1}B_1^T K_1)\mathbf{x} + B_2F_2\mathbf{x} = (A + B_2(-R_{22}^{-1}B_2^T K_2) - S_1K_1)\mathbf{x} = (A - S_1K_1 - S_2K_2)\mathbf{x}$$

Kemudian diketahui $A\mathbf{x} + B_1F_1^*\mathbf{x} + B_2(-R_{22}^{-1}B_2^T K_2)\mathbf{x} = (A + B_1F_1^* - S_2K_2)\mathbf{x}$ dengan mensubstitusikan $F_1^* = -R_{11}^{-1}B_1^T K_1$ diperoleh

$$A\mathbf{x} + B_1F_1\mathbf{x} + B_2(-R_{22}^{-1}B_2^T K_2)\mathbf{x} = (A + B_1(-R_{11}^{-1}B_1^T K_1) - S_2K_2)\mathbf{x} = (A - S_1K_1 - S_2K_2)\mathbf{x}$$

Karena $(A,[B_1, B_2])$ dapat distabilkan, maka persamaan diferensial dinamik (1) dengan vektor kendali pemain pertama $\mathbf{u}_1 = -R_{11}^{-1}B_1^T K_1\mathbf{x}$ dan vektor kendali pemain kedua $\mathbf{u}_2 = -R_{22}^{-1}B_2^T K_2\mathbf{x}$ maka dapat diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B_1\left(-R_{11}^{-1}B_1^T K_1\mathbf{x}\right) + B_2\left(-R_{22}^{-1}B_2^T K_2\mathbf{x}\right) = A - S_1K_1\mathbf{x} - S_2K_2\mathbf{x} \\ &= (A - S_1K_1 - S_2K_2)\mathbf{x}\end{aligned}$$

Sehingga matriks $A - S_1K_1 - S_2K_2$ stabil.

4. Kesimpulan

Berdasarkan uraian pada hasil dan pembahasan yang telah diberikan, maka diperoleh kesimpulan bahwa berdasarkan persamaan diferensial sistem dinamik permainan non-kooperatif, diperoleh persamaan untuk dua pemain yaitu,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B_1\mathbf{u}_1(t) + B_2\mathbf{u}_2(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

dengan masing-masing pemain meminimalkan fungsi objektif

$$J_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_i, T) = \int_0^\infty \{\mathbf{x}^T(t)Q_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_i^T(t)R_{ii}\mathbf{u}_i(t) + \mathbf{u}_j^T(t)R_{ij}\mathbf{u}_j(t)\}dt, \; j \neq i, \quad i = 1, 2$$

dapat diperoleh vektor kendali untuk pemain pertama yaitu $\mathbf{u}_1^* = -R_{11}^{-1}B_1^T K_1 \mathbf{x}$ dan untuk pemain kedua yaitu $\mathbf{u}_2^* = -R_{22}^{-1}B_2^T K_2 \mathbf{x}$. Vektor-vektor kendali dari kedua pemain tersebut dapat menstabilkan sistem $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B_1\mathbf{u}_1(t) + B_2\mathbf{u}_2(t)$.

Referensi

Jurnal:

[1] Engwerda J. Feedback Nash equilibria in the scalar infinite horizon LQ-game. *Automatica*. 2000; 36 : 135-139.

[2] Weeren AJTM, Schumacher JM, Engwerda J. Asymptotic analysis of linear feedback Nash equilibria in nonzero-sum linear-quadratic differential games. *Journal of Optimization Theory and Applications*.1999: 101: p693–723.

Texbooks:

[1]. Basar T. Dynamic noncooperative game theory. Philadelphia: SIAM. 1999.

[2] Bellman R. Introduction to Matrix Analysis. Philadelphia: SIAM. 1997

[3] Engwerda J. LQ Dynamic Optimization and Differential Games. Chichester: John Wiley & Sons. 2005.

[4] Lewis FL. Applied Optimal Control and Estimation. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1992.

[5] Olsder GJ. Mathematical System Theory. Delft: University of Technology. 1994.

[6] Perko L. Differential Equations and Dynamical System. New York: Springer-Verlag. 1991.